数学名著译丛

现代分析基础

第一卷

〔法〕J.迪厄多内 著

科学出版社

数学名著译丛

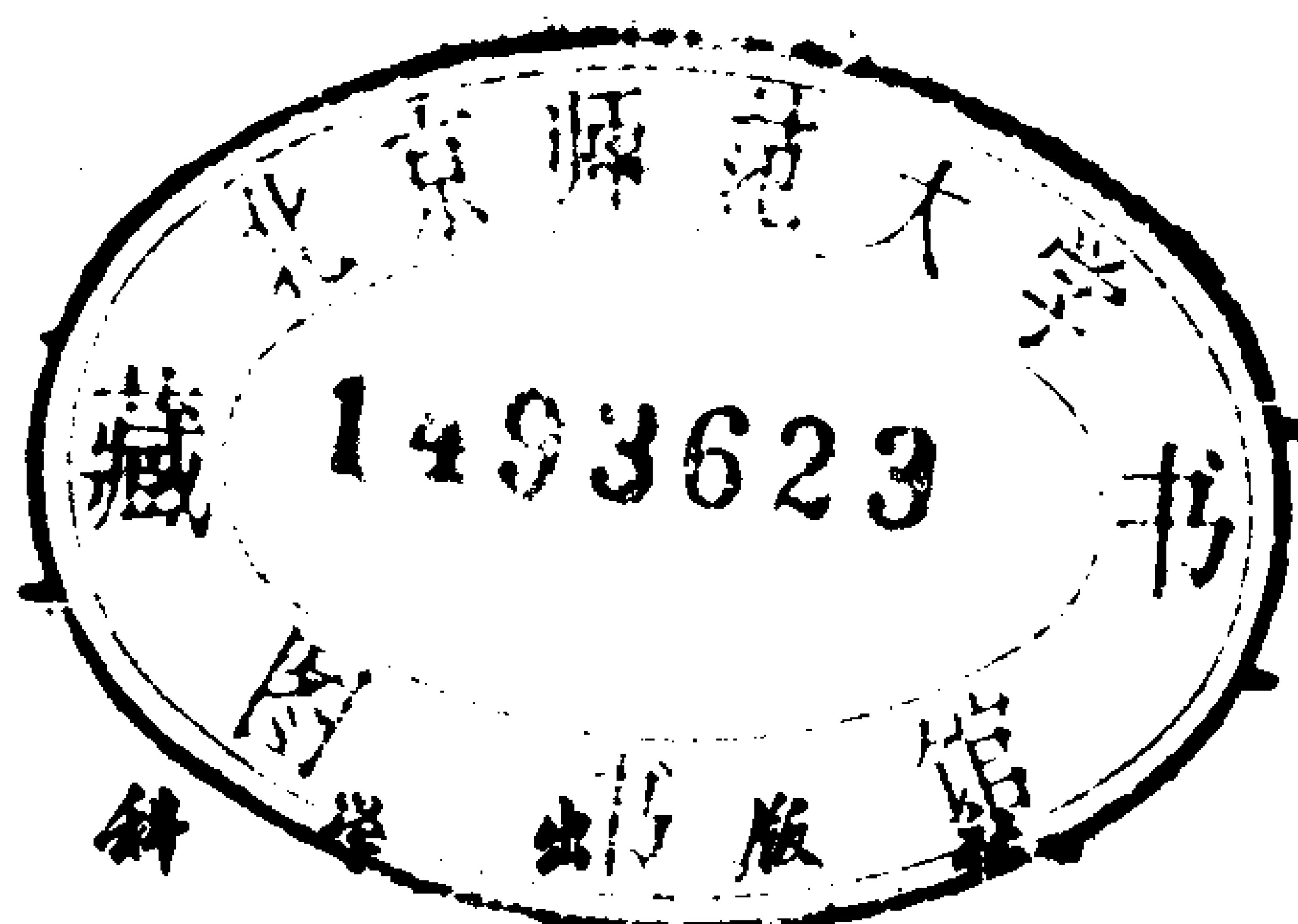
现代分析基础

第一卷

〔法〕J. 迪厄多内 著

郭瑞芝 苏维宜 译

郑维行 校



科学出版社

1987

内 容 简 介

本书为法国著名数学家 J. 迪厄多内关于现代分析的多卷集的第一卷. 内容包括: 集论初步;实数;距离空间;赋范空间; Hilbert 空间;连续函数空间;微分学;解析函数;初等谱论等.

本书从公理出发发展理论,论证严谨. 每节后面附有大量问题,以便帮助读者加深理解本书内容.

本书原根据 1960 年英文版翻译,后又对照 1969 年法文版进行了补译,但变动不大.

本书适于高等学校数学系高年级学生、研究生、教师和数学工作者阅读.

J. Dieudonné
Éléments d'analyse
1
Gauthier-Villars

数学名著译丛

现 代 分 析 基 础

第一卷

〔法〕J. 迪厄多内 著
郭瑞芝 苏维宜 译
郑维行 校

责任编辑 刘嘉善

科 学 出 版 社 出 版
北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院开封印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1982 年 11 月第 一 版 开本:850×1168 1/32
1987 年 9 月第二次印刷 印张:14 3/8
印数:9,501—10,900 字数:375,000

统一书号:13031·2030
本社书号:2777·13—1

定价: 4.05 元

再 版 序 言

本书是我的一部九卷本著作的第一卷.它也是1960年出版的《现代分析基础》的修订版,但本质上没有变动. 很多读者、同事与朋友敦促我去写续篇,结果使我相信,确实还可以写一些现代分析的基本知识,它们的内容介于我曾想写的基本性质的"最小工具箱"与引向研究前缘的专著之间. 我的教学经验也使我确信,学数学的学生在跨过了"基础"的第一步以后,在置身于数学文献的海洋或进入他自己研究课题的狭径以前,需要进一步的引导以及对于他的论题的一般性鸟瞰.

因此,最后我就试图为七十年代的数学家们写一本象 Jordan, Picard 与 Goursat 曾经为1880到1920年间的学数学的学生们写的分析教程那样的相应著作.

写成一本百科全书式的著作显然不可能,同时改写 N. Bourbaki 的著作也想必是多余的,因而我被迫无情地删割到这样一种地步,使之能与古典著作相比拟. 我宁可将宽度看得比深度重些,因为我认为,向读者指明现代分析许多分支的入门比给他提供少量课题的详尽论述要好一些.

经验似乎表明,通常学生遇到新理论,难于在初读时一下子掌握.在他觉得熟悉这种理论并能区分哪些是主要概念,哪些是次要结果以前,需要多次翻阅它,只有这样,他才能运用自如. 因而,这部著作的各章是采样式的而非完整的理论;事实上我有意使它不成为包罗万象的. 文献中所引的著作总可使读者深入学习任何特殊的理论.

然而,我不赞成用过于特殊的形式介绍分析的主要概念,这样做容易掩盖一般性工具的效能. 例如,借口直观或易于接受而把微分几何限于二维或三维情形,或把积分限于 Lebesgue 测度情形,

在我看来，这将导致错误的观念.

另一方面，我却认为，初学时限于考察可分可距离化拓扑空间，不会丢掉所涉及的一些概念的基本内容．我们这一代数学家对可数性假设能不用就不用这种做法确实很对，因为这是求得一种清晰理解的唯一办法．现在下述情况已很清楚：分析中最中心的部分(指的是与有限维流形有关的那些概念)在大多数重要应用中只涉及可分可距离化空间．此外，有一种有效的与通常便于使用的一般技巧，可使基于可数性假设的证法过渡到一般的证法(在多数情况下，这是可能的)．概括地说，秘诀在于“用滤系代替序列”．应该说，结果往往只是使原来证法更为精炼．因而，冒着被责骂的危险，我记取我的格言“唯有可数存在于无限”．我相信初学者集中注意象微分流形与积分概念中涉及的真正难点将会学得更好些，用不着同时担心实际上罕见的有关第二级拓扑问题[1].

在本教程中，分析的整个结构是从基础开始建立起来的．最初承认的仅是逻辑规则与自然数的通常性质，并且除了这两者以外，课文中所有证明都依赖于公理和以前已证过的定理[2]．然而，这部著作(包括第一卷)对尚未学完大学头两年数学专业课程的学生来说是不适宜的.

本书在分析的基本部分一个明显的特点是要求少量代数知识．实际上只要求一点初等线性代数知识(为了读者方便，把它放在第一卷末的附录中)．然而，代数所起的作用在以后几卷中是不断增加的，并且最后当这种作用异常显著，尤其是高等交换代数与同调代数出现时，我们就把它留给读者了．至于代数方面的参考书，我们选取了 R. Godement 的《抽象代数》(Houghton-Mifflin, New York, 1968, 原文为法文版，Hermann, Paris, 1963) 与 S. A. Lang 的《代数学》(Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1965)，并且可能会在某些方向上用附录方式增加它们.

---

1) 根据同样精神，在可分可距离化空间中我已不用(有时以较长篇幅为代价)超限归纳法.

2) 在包含定义与结果的某些问题以及例题中，逻辑次序全然没有象课文中已出现的或将要出现的那样严格，

至于第一卷，当准备本著作时，我从接触 N. .Bourbaki 与其协作者们的大批未出版手稿中深受教益. 某些课题介绍中的任何独到之处完全属于他们.

J. 迪厄多内

1969 年 4 月于尼斯

序 言

本卷是为一年级研究生或者三、四年级大学生中的高材生开设的一门课程的产物. 这门课程(1956—1957年在西北大学讲授)的目的有两个:

(a) 为所有与分析有关的现代数学各分支提供必要的初步背景(事实上,可能除逻辑与纯粹代数以外,各分支都有需要);

(b) 训练学生去应用现代最基本的数学工具——公理化方法(学生在大学期间,即使对它有所接触的话,也是非常少的).

读者将会非常明显地看到: 我们宁肯处处强调每个论题的概念方面,而不强调它的计算方面,后者是经典分析中最关心的;不仅在课文中如此,而且在大部分问题中也是这样. 我们列入了大量问题用以补充课文并指出进一步有趣的发展. 同时这些问题将给学生一个机会,来检验他对所学内容的理解程度.

虽然本卷包括一般在较为初等的教程中讨论的许多内容(包括通常所谓"高等微积分"),但是我们考虑问题的观点与通常这些教程完全不同.关于函数论与微积分的一些基本概念的叙述,是在这样充分一般的理论体系下进行的,它们在揭示这些概念的范围、效力与本性方面都远较在古典分析的通常限制下所做的为佳. 没有必要去强调由这种一般性处理所产生的众所周知的"思想的节省";但可指出有一种对应的"记号的节省",它省略了大量附标,这几乎完全与"向量代数"简化古典解析几何一样. 另外,这种一般性处理还使我们,至少在正式的证明中,必须严格持公理化方法,而不求助于任何"几何直观": 这一点我们又通过在书中故意不引进任何图解来加以强调. 我个人认为: 今天的研究生必须尽快地在这种思维的抽象与公理化方法上得到彻底训练,如果他想了解数学研究的目前趋向的话. 本书的目的在于帮助学生建立起"抽

象的直观”,这在现代数学家的头脑中是相当基本的.

很清楚，学生在接触本教程之前必须精通古典分析. 然而从严格逻辑的观点来看,这里的论述并不以任何预先的知识为基础,只是除了:

1. 数理逻辑的最基本法则,数学归纳法与(正、负)整数的基本性质.

2.(域上的)初等线性代数,为此读者可以参考 Halmos [11], Jacobson [13] 或 Bourbaki [4]; 然而这些书包含的内容比我们实际需要的多得多(例如我们不利用对偶理论,读者如果熟悉向量子空间,超平面,直和,线性映射,线性式,维数与余维数等概念,就足够了).

在证明每一论断时，除了刚才提到的两点以外，我们只依靠公理与课文中已经证明的定理. 这种逻辑步骤的严格顺序在例题与问题中稍微有点放松,那里我们常常应用课文中尚未(甚至永远也不)论证的定义或结果.

就研究生在第一学年应当学习的那些分析内容而论，确实有些地方意见分歧很大. 因为我们要让本书的内容实际上能在一学年内教完,所以某些题目不得不舍去. 有些题目之所以没有列入，或因它们过于专门化了，或因它们可能要求较通常一年级研究生有更多的数学修养，或因这种内容无疑地已被包括在高等微积分教程中了. 如果要我们为数学家们提出研究生学习的一般课目，那么我们将推荐说：每个研究生都应熟悉本书的内容，不管他将来的专门方向如何.

我要向帮助我编写本讲义的数学家们，特别是 H. Cartan 与 N. Bourbaki 表示感谢，他们允许我接触未发表的讲义稿与手稿，这对本书的定稿有很大影响. 我也向西北大学数学系的同事们致以深切的谢意,他们使我能够按照既定的方针讲授这门课程,并以建设性的批评,大大地鼓励了我.

J. 迪厄多内

1960 年 4 月

目　录

第一章 集论初步

本章我们不打算讲述以公理为基础的集论；要获得完全公理式的描述，我们建议有兴趣的读者参看 Kelley [15] 与 Bourbaki [3]. 本章所列举的不带任何证明或定义的条文，可以认为是与未定义的术语有关的公理.

本章从关于集合、子集与积集的一些基本定义与公式开始(1.1 到 1.3)；而其大部分篇幅用来讲述映射的基本概念，映射是一个或几个数值“变量”的经典(数值)函数概念的现代推广. 关于这个概念有两点应加以说明:

a) 映射最重要的(与特有的)属性是对变量的任何值对应一个元素；换句话说，不存在象多值函数那样的东西，尽管有很多著作与此相反. 把映射定义成其值为给定集的子集，而且这些子集可以有两个以上元素，当然完全合理. 但这样的定义实际上是无用的(至少在初等分析中)，因为不可能在这种函数的值上切实地定义出代数运算. 在第九章我们再来谈这个问题.

b) 学生应当尽快熟悉这一概念，即函数 f 是一个单一的对象，它本身可以“变化”并且一般地又被看成为大“函数空间”中的一个“点”；事实上，可以说分析学的经典概念与现代概念之间的主要差别之一就是，当我们写 $f(x)$ 时，在经典数学中. f 被看成“固定的”，x 被看成“自变量”，而现在 f 与 x 都被看成是“自变量”(并且有时正是 x 为固定的，而 f 成为“变化的”对象).

最后一节(1.9)给出可数集的最初等的性质，这是由 Cantor 及其继承者发展起来的“基数”的广阔理论的起点，对它有兴趣的读者可以参看 Bourbaki[3](第三章)或者(更详尽的) Bachmann[2]. 然而，原来除了实数集不构成可数集这一否定结果以外(见(2.2.17))，在集论对分析的应用中，人们简直不需要比这些初等

性质更多的东西.

1. 元 素 与 集

我们将讨论一些对象，其中有的称为集. 这些对象具有某种性质或者具有相互关系. 对象用符号(主要是字母)表示，至于性质或关系，则用所连接的对象的符号的组合、以及标志所考虑的性质或关系的一些其他符号的组合表示. 关系 $x=y$ 的意思是由符号 x 与 y 表示的对象是相同的；其否定关系写成 $x\neq y$.

若 X 是一个集，则关系 $x\in X$ 表示 x 是集 X 的元素，或 x 属于 X；其否定关系写成 $x\notin X$.

若 X 与 Y 是两个集，则关系 $X\subset Y$ 表示 X 的每一个元素都是 Y 的元素(换句话说，它等价于关系 $(\forall x)(x\in X\Longrightarrow x\in Y)$)；我们有 $X\subset X$，并且关系 $(X\subset Y$ 与 $Y\subset Z)$ 蕴含 $X\subset Z$. 若 $X\subset Y$ 且 $Y\subset X$，则 $X=Y$. 换句话说，两个集相等，当且仅当它们具有相同的元素. 若 $X\subset Y$，则我们说 X **含于** Y **中**，或者说 Y **包含** X，或者说 X 是 Y 的**子集**；也可写成 $Y\supset X$. $X\subset Y$ 的否定关系写成 $X\not\subset Y$.

给定集 X 与性质 P，存在 X 的这样一个唯一的子集，它的元素是所有使 $P(x)$ 为真的元素 $x\in X$；这个子集记为 $\{x\in X|P(x)\}$. 关系 $\{x\in X|P(x)\}\subset\{x\in X|Q(x)\}$ 等价于 $(\forall x\in X)(P(x)\Longrightarrow Q(x))$；关系 $\{x\in X|P(x)\}=\{x\in X|Q(x)\}$ 等价于 $(\forall x\in X)(P(x)\Longleftrightarrow Q(x))$. 例如，我们有 $X=\{x\in X|x=x\}$ 与 $X=\{x\in X|x\in X\}$. 集 $\phi_X=\{x\in X|x\neq x\}$ 称为 X 的**空子集**；它不含任何元素. 若 P 是任意一个性质，则关系 $x\in\phi_X\Longrightarrow P(x)$ 对每个 x 为真，因为 $x\in\phi_X$ 的否定关系对每个 x 为真（记住 $Q\Longrightarrow P$ 意思是“或者 Q 假，或者 Q 真则 P 真”). 因此，若 X 与 Y 是两个集，则由 $x\in\phi_X$ 推出 $x\in\phi_Y$，这就是说，$\phi_X\subset\phi_Y$；类似地，我们有 $\phi_Y\subset\phi_X$，于是 $\phi_X=\phi_Y$，即所有空集是相等的. 因而，我们把空集记为 ϕ.

若 a 是一个对象，则以 a 作为唯一元素的集记为 $\{a\}$.

若 X 是一个集，则存在这样一个(唯一的)集，其元素是所有 X 的子集；这个集记为 $\mathfrak{P}(X)$. 我们有 $\phi \in \mathfrak{P}(X)$, $X \in \mathfrak{P}(X)$; 关系 $x \in X$ 与 $\{x\} \in \mathfrak{P}(X)$ 是等价的; 关系 $Y \subset X$ 与 $Y \in \mathfrak{P}(X)$ 是等价的.

问　　题

试证，具有 $n(n \geqslant 0)$ 个元素的有限集，它的所有子集的集是具有 2^n 个元素的有限集.

2. 布尔代数

设 X, Y 是两个集且 $Y \subset X$, 则集合 $\{x \in X | x \notin Y\}$ 是 X 的子集，称为 X 与 Y 的**差**或 Y 关于 X 的**余**，记为 $X-Y$ 或 $C_X Y$ (或 CY, 当不会混淆时).

给定两个集 X, Y，存在这样一个集，其元素同时属于 X 与 Y，即 $\{x \in X | x \in Y\}$; 它称为 X 与 Y 的**交**，记为 $X \cap Y$. 又存在这样一个集，其元素至少属于两个集 X, Y 中之一；它称为 X 与 Y 的**并**，记为 $X \cup Y$.

下列命题立即由定义推出:

(1.2.1)　$X - X = \phi$,　　$X - \phi = X$.

(1.2.2)　$X \cup X = X$,　　$X \cap X = X$.

(1.2.3)　$X \cup Y = Y \cup X$,　$X \cap Y = Y \cap X$.

(1.2.4)　关系 $X \subset Y$, $X \cup Y = Y$, $X \cap Y = X$ 是等价的.

(1.2.5)　$X \subset X \cup Y$,　　$X \cap Y \subset X$.

(1.2.6)　关系"$X \subset Z$ 与 $Y \subset Z$"等价于 $X \cup Y \subset Z$;
　　关系"$Z \subset X$ 与 $Z \subset Y$"等价于 $Z \subset X \cap Y$.

(1.2.7)　$X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$, 写成 $X \cup Y \cup Z$.
　　$X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$, 写成 $X \cap Y \cap Z$.

(1.2.8)　$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$,

$$X\cap(Y\cup Z)=(X\cap Y)\cup(X\cap Z)\ (\text{分配律}).$$

(1.2.9) 对于集 E 的两个子集 X, Y (这里所写的 C 代表 C_E)

$$C(CX)=X;$$

$$C(X\cup Y)=CX\cap CY,\ C(X\cap Y)=(CX)\cup(CY).$$

关系 $X\subset Y$ 与 $CX\supset CY$ 是等价的; 关系 $X\cap Y=\phi$, $X\subset CY$, $Y\subset CX$ 是等价的; 关系 $X\cup Y=E$, $CX\subset Y$ $CY\subset X$ 是等价的. 并集 $\{x\}\cup\{y\}$ 写成 $\{x, y\}$; 类似地, $\{x\}\cup\{y\}\cup\{z\}$ 写成 $\{x, y, z\}$; 等等

如果 $X\cap Y\neq\phi$, 则我们说 X 和 Y **相交**.

3. 两个集的积

任意两个对象 a, b 对应于一个新对象，就是它们的**序对** (a, b);关系 $(a, b)=(a', b')$ 等价于"$a=a'$"与"$b=b'$"; 特别地, $(a, b)=(b, a)$ 当且仅当 $a=b$. 序对 $c=(a, b)$ 的第一(相应地,第二)元素称为 c 的**第一**(相应地,**第二**)**射影**, 并记为 $a=\mathrm{pr}_1 c$ (相应地, $b=\mathrm{pr}_2 c$).

给定任意两个集 X, Y (不同或相同), 存在一个(唯一的)集, 其元素是所有使得 $x\in X$, $y\in Y$ 的序对 (x, y); 这个集记为 $X\times Y$,并称为 X 与 Y 的**笛卡儿积**(或简称**积**).

我们把 $x\in X$ 与 $y\in Y$ 之间的关系 $R(x, y)$ 同 $z\in X\times Y$ 的性质 $R(\mathrm{pr}_1 z, \mathrm{pr}_2 z)$ 联系起来; 则使这个性质为真的那些元素所组成的 $X\times Y$ 的子集就是使 $R(x, y)$ 为真的所有序对 (x, y) 的集;它称为关系 R 的**图象**. $X\times Y$ 的任意子集 G 都是某个关系的图象, 这个关系就是 $(x, y)\in G$. 若 $X'\subset X$, $Y'\subset Y$, 则关系"$x\in X'$, $y\in Y'$"的图象就是 $X'\times Y'$.

对每个 $x\in X$, $G(x)$ 为满足 $(x, y)\in G$ 的所有元素 $y\in Y$ 的集, 且对每个 $y\in Y$, $G^{-1}(y)$ 为满足 $(x, y)\in G$ 的所有元素 $x\in X$ 的集; $G(x)$ 与 $G^{-1}(x)$ 称为 G 在 x 与 y 的**交叉截痕**.

下列命题立即由定义推出:

(1.3.1) 关系 $X \times Y = \phi$ 等价于"$X = \phi$ 或 $Y = \phi$".

(1.3.2) 若 $X \times Y \neq \phi$(意即 X 与 Y 均非空),则

关系 $X' \times Y' \subset X \times Y$ 等价于"$X' \subset X$ 与 $Y' \subset Y$".

(1.3.3) $(X \times Y) \cup (X' \times Y) = (X \cup X') \times Y$.

(1.3.4) $(X \times Y) \cap (X' \times Y') = (X \cap X') \times (Y \cap Y')$.

三个集 X, Y, Z 的积定义为 $X \times Y \times Z = (X \times Y) \times Z$, n 个集的积用归纳法类似地给出定义:

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = (X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n.$$

$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 的元素 Z 记为 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 而不是 $(\cdots(x_1, x_2), x_3)\cdots, x_{n-1}), x_n)$; 对于 $1 \leqslant i \leqslant n$, x_i 是 Z 的第 i 射影, 记为 $x_i = \mathrm{pr}_i Z$. 更一般地, 若 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 是 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 中不同的指标,我们可记

$$\mathrm{pr}_{i_1 i_2 \cdots i_k}(z) = (x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}) \in X_{i_1} \times X_{i_2} \times \cdots \times X_{i_k}.$$

若 $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = X$, 则我们记为 X^n 而不是 $X \times X \times \cdots \times X$ (乘 n 次).

4. 映　　射

设 X, Y 是两个集, $R(x, y)$ 是 $x \in X$ 与 $y \in Y$ 间的关系; 我们说 R 是关于 y 的**函数关系**, 若对于每个 $x \in X$, 都有一个且仅有一个 $y \in Y$ 使得 $R(x, y)$ 为真. 这种关系的图象称为 $X \times Y$ 中**函数的图象**;因此 $X \times Y$ 的这种子集 F 可由下述事实刻划出来,即对于每个 $x \in X$, 有且仅有一个 $y \in Y$ 使得 $(x, y) \in F$; 这个元素 y 称为 F 在 x 处的值,记为 $F(x)$. $X \times Y$ 中函数的图象也称为 x 到 y 的**映射**,或者称为在 X 中定义在 Y 中取值的**函数**. 在说话当中,通常谈到映射与函数图象时, 就好象它们是一一对应的两种不同的对象一样,并因此说及"映射的图象",但这仅仅是心理上的区别(即对应于我们是"几何地"还是"分析地"看 F). 在现代数学中要惯于把映射看作单独的对象,就好象一个点或者一个数一样,并要弄清映射 F 与它的任意值 $F(x)$ 之间的区别, 这在任何情况下都

是很重要的;第一个是 $\mathfrak{P}(X \times Y)$ 的元素,第二个是 Y 的元素,我们有 $F = \{(x, y) \in X \times Y | y = F(x)\}$. $X \times Y$ 中所有能成为函数的图象的那些子集构成 $\mathfrak{P}(X \times Y)$ 的一个子集,称为 X 到 Y **的映射的集**,并记为 Y^X 或 $\mathscr{F}(X, Y)$.

映射的例

(1.4.1) 若 b 是 Y 的元素,则 $X \times \{b\}$ 是一个函数的图象,称为 X 到 Y 的具有值 b 的**常映射**;我们必须把它与 Y 的元素 b 区分开.

(1.4.2) 对 $Y = X$,关系 $y = x$ 是关于 y 的函数;它的图象是所有序对 (x, x) 的集,称为 $X \times X$ 的**对角线**,或称为 X 到它自身的**恒等映射**,并记为 1_X.

如果对每个 $x \in X$,我们都构造出对象 $T(x)$,它是 Y 的元素,则关系 $y = T(x)$ 是关于 y 的函数;对应的映射记为 $x \to T(x)$.这当然是映射的通常定义;本质上它与前面所给定义是一致的,因为,若 F 是函数的图象,则它就是映射 $x \to F(x)$. 例 (1.4.1) 与 (1.4.2) 分别记为 $x \to b$ 与 $x \to x$. 另外的例子有:

(1.4.3) $\mathfrak{P}(X)$ 到它自身的映射 $Z \to X - Z$.

(1.4.4) $X \times Y$ 到 X 的映射 $Z \to \mathrm{pr}_1 Z$,与 $X \times Y$ 到 Y 的映射 $Z \to \mathrm{pr}_2 Z$,分别称为 $X \times Y$ 的**第一**与**第二射影**.

据两个集相等的定义 (1.1) 推知,X 到 Y 的两个映射之间的关系 $F = G$ 等价于关系"对每个 $x \in X$,都有 $F(x) = G(x)$".

若 A 是 X 的子集,F 是 X 到 Y 的映射,则集 $F \cap (A \times Y)$ 是 $A \times Y$ 中函数的图象,它作为一个映射,称为 F 在 A 上的**限制**.当 F 与 G 在 A 上有相同的限制时(即对每个 $x \in A$,都有 $F(x) = G(x)$),我们就说它们在 A 中**重合**. X 到 Y 的映射 F 如果有给定的在 A 上的限制 F',则它称为 F' 到 X 上的**延拓**,一般地,存在着 F' 的许多不同的延拓.

我们认为下面的命题是一个公理(选择公理):

(1.4.5) 给定 X 到 $\mathfrak{P}(Y)$ 的映射 F,使得对每个 $x \in X$,$F(x) \neq \phi$,则存在 X 到 Y 的映射 f,使得对每个 $x \in X$,$f(x) \in F(x)$.

有时可以看到：借助于选择公理证出的定理实际上不用这个公理也能证明．我们绝不去研究这种问题，因为它完全属于逻辑教程的范围．

5. 象与逆象

设 F 是 X 到 Y 的映射．对于 X 的任意子集 A，由"存在 $x \in A$ 使得 $y = F(x)$"这个性质定义的 Y 的子集称为 A 在 F 下的**象**(或**直接象**)，记为 $F(A)$．

我们有：

(1.5.1) $F(A) = \mathrm{pr}_2(F \cap (A \times Y))$．

(1.5.2) 关系 $A \neq \phi$ 等价于 $F(A) \neq \phi$．

(1.5.3) 对每个 $x \in X$，$F(\{x\}) = \{F(x)\}$．

(1.5.4) 若 $A \subset B$，则 $F(A) \subset F(B)$．

(1.5.5) $F(A \cap B) \subset F(A) \cap F(B)$．

(1.5.6) $F(A \cup B) = F(A) \cup F(B)$．

因为据(1.5.4) $F(A) \subset F(A \cup B)$ 与 $F(B) \subset F(A \cup B)$；另一方面，若 $y \in F(A \cup B)$，则存在 $x \in A \cup B$ 使得 $y = F(x)$；因 $x \in A$ 或者 $x \in B$，所以有 $y \in F(A)$ 或者 $y \in F(B)$．

$F(A \cap B) \neq F(A) \cap F(B)$ 的例子立即可得(例如，可取 F 是积的第一射影 pr_1)．

对于 Y 的任意子集 A'，由满足性质 $F(x) \in A'$ 定义的 X 的子集称为 A' 在 F 下的**逆象**，记为 $F^{-1}(A')$．我们有

(1.5.7) $F^{-1}(A') = \mathrm{pr}_1(F \cap (X \times A'))$．

(1.5.8) $F^{-1}(A') = F^{-1}(A' \cap F(X))$． 因为 $F(x) \in F(X)$ 对每个 $x \in X$ 都真．

(1.5.9) $F^{-1}(\phi) = \phi$ (但对非空子集 A'，仍可能有 $F^{-1}(A') = \phi$，这就是使 $A' \cap F(X) = \phi$ 的那些集 A')．

(1.5.10) 若 $A' \subset B'$，则 $F^{-1}(A') \subset F^{-1}(B')$．

(1.5.11) $F^{-1}(A' \cap B') = F^{-1}(A') \cap F^{-1}(B')$．

(1.5.12) $F^{-1}(A' \cup B') = F^{-1}(A') \cup F^{-1}(B')$.

(1.5.13) $F^{-1}(A' - B') = F^{-1}(A') - F^{-1}(B')$, 若 $A' \supset B'$.

注意(1.5.11)与(1.5.5)之间的差别. 若 $B \subset A \subset X$, 则由(1.5.6)有 $F(A) = F(B) \cup F(A - B)$. 于是 $F(A - B) \supset F(A) - F(B)$; 但是 $F(X - A)$与$Y - F(A)$之间没有这种关系.

集 $F^{-1}(\{y\})$ 恒等于在 1.3 节中定义的交叉截痕 $F^{-1}(y)$,我们有

(1.5.14) $F(F^{-1}(A')) = A' \cap F(X)$, 对于 $A' \subset Y$.

(1.5.15) $F^{-1}(F(A)) \supset A$, 对于 $A \subset X$.

最后指出关于积的特殊关系:

(1.5.16) 对任意 $A \subset X$, $\mathrm{pr}_1^{-1}(A) = A \times Y$; 对任意 $A' \subset Y$, $\mathrm{pr}_2^{-1}(A') = X \times A'$.

(1.5.17) 对于每个 $C \subset X \times Y$, $C \subset \mathrm{pr}_1(C) \times \mathrm{pr}_2(C)$.

设 X, Y, Z 为三个集合, A 为 $X \times Y$ 的子集. 对A到Z的任意映射F与每个 $x \in \mathrm{pr}_1(A)$ (相应地, 每个 $y \in \mathrm{pr}_2(A)$), 我们用 $F(x, \cdot)$ 表示交叉截痕 $A(x) \to Z$ 的映射 $y \to F(x, y)$ (相应地, $F(\cdot, y)$ 表示交叉截痕 $A^{-1} \to Z$ 的映射 $x \to F(x, y)$). 这些映射称为F的**偏映射**.

问　　题

1) 举出X的两个子集$A \supset B$与一个映射F的实例, 使得 $F(A - B) \neq F(A) - F(B)$.

2) 举出$X \to Y$的映射F与子集$A \subset X$的例子,使得:

a) $F(X - A) \subset Y - F(A)$;

b) $F(X - A) \supset Y - F(A)$;

c) 集 $F(X - A)$, $Y - F(A)$ 互不包含(例如, 我们可以把X与Y取为有限集).

3) 对于积$X \times Y$的任意子集G, 任意子集 $A \subset X$, 任意子集 $A' \subset Y$, 记 $G(A) = \mathrm{pr}_2(G \cap (A \times Y))$, $G^{-1}(A') = \mathrm{pr}_1(G \cap (X \times A'))$. 对于$x \in X, y \in Y$, 则写成 $G(x)$ (相应地, $G^{-1}(y)$) 而不是 $G(\{x\})$ 与 $G^{-1}(\{y\})$. 试证下列四条性质等价:

a) G 是 X 的子集到 Y 的映射的图象.

b) 对于 Y 的任意子集 A', $G(G^{-1}(A')) \subset A'$.

c) 对于 Y 的任意一对子集 A', B', $G^{-1}(A' \cap B') = G^{-1}(A') \cap G^{-1}(B')$.

d) 对于 Y 的任意一对子集 A', B' 只要 $A' \cap B' = \phi$,我们就有

$$G^{-1}(A') \cap G^{-1}(B') = \phi.$$

(提示: 证明当 a) 不满足时, b), c) 和 d) 也不成立.)

6. 满映射,单映射与双映射

设 F 是 X 到 Y 的映射. 称 F 为满射的,或**满映射**,如果 $F(X) = Y$,也就是对于每个 $y \in Y$,存在(至少)一个 $x \in X$ 满足 $y = F(x)$. 称 F 为**单射的**(一一映射)或**单映射**,如果关系 $F(x) = F(x')$ 蕴含 $x = x'$. 称 F 为**双射的**(或**双映射**),如果它既是单射的又是满射的. 单射的任意限制仍是单射.

X 到 Y 的任意映射 F 也可以认为是 X 到 $F(X)$ 的映射;这时它是满射的,如果它(作为 X 到 Y 的映射)是单射的,则它作为 X 到 $F(X)$ 的映射是双射的.

例. (1.6.1) 若 A 是 X 的子集,恒等映射 $x \to x$ 在 A 上的限制是单映射 j_A,称为 A 到 X 的自然单映射;对于 X 的任意子集 B, $j_A^{-1}(B) = B \cap A$.

(1.6.2) 若 F 是 X 到 Y 的任意映射,则映射 $x \to (x, F(x))$ 是 X 到 $X \times Y$ 的单映射.

(1.6.3) 射影 pr_1 与 pr_2 分别是 $X \times Y$ 到 X 与 Y 的满映射.

(1.6.4) 任意集合的恒等映射是双射的.

(1.6.5) $B(X)$ 到它自身的映射 $Z \to X - Z$ 是双射的.

(1.6.6) 若 $Y = \{b\}$ 是单元素集,则 X 到 $X \times \{b\}$ 的映射 $x \to (x, b)$ 是双射的.

(1.6.7) $X \times Y$ 到 $Y \times X$ 的映射 $(x, y) \to (y, x)$ 是双射的.

若 F 是单射的,则对任意 $A \subset X$ 都有 $F^{-1}(F(A)) = A$;若 F 是满射的,则对任意 $A' \subset Y$ 都有 $F(F^{-1}(A')) = A'$.

若 F 是双射的，则由定义，关系 $y = F(x)$ 是关于 x 的函数关系；对应的 Y 到 X 的映射称为 F 的**逆映射**，记为或 F^{-1}（若 F 不是双射的，我们就不能定义这个映射！）．因此，关系 $y = F(x)$ 与 $x = F^{-1}(y)$ 是等价的；F^{-1} 是双射的且 $(F^{-1})^{-1} = F$．对于 Y 的每个子集 A'，A' 在 F^{-1} 下的直接象与 A' 在 F 下的逆象相同，因此这些记法是相容的.

问　　题

设 F 是 X 到 Y 的一个映射.证明下列性质是等价的：a）F 是单射的；b）对于 X 的任意子集 A，$F^{-1}(F(A)) = A$；c）对于 X 的任意一对子集 A，B，$F(A\cap B) = F(A)\cap F(B)$；d）对于 X 的任意一对使 $A\cap B = \phi$ 的子集 A，B，$F(A)\cap F(B) = \phi$；e）对于 X 的任一对使 $B\subset A$ 的子集 A，B，$F(A-B) = F(A) - F(B)$.

7. 映射的合成

设 X，Y，Z 是三个集，F 是 X 到 Y 的映射，G 是 Y 到 Z 的映射．则 $x \to G(F(x))$ 是 X 到 Z 的映射，我们说它是由 G 与 F 合成的（依所述顺序）并记为 $H = G\circ F$．我们有

(1.7.1)　对任意 $A\subset X$，$H(A) = G(F(A))$.

(1.7.2)　对任意 $A''\subset Z$，$H^{-1}(A'') = F^{-1}(G^{-1}(A''))$.

若 F 与 G 都是单射的（相应地，满射的，双射的），则 $H = G\circ F$ 也是单射的（相应地，满射的，双射的）；若 F 与 G 都是双射的，则 $H^{-1} = F^{-1}\circ G^{-1}$．若 F 是双射的，则 $F^{-1}\circ F$ 是 X 的恒等映射，$F\circ F^{-1}$ 是 Y 的恒等映射.

反之，若 F 是 X 到 Y 的映射，G 是 Y 到 X 的映射，满足 $G\circ F = I_X$ 与 $F\circ G = I_Y$，则 F，G 是彼此互逆的双射．因为，第一关系表明 F 是单射的，G 是满射的，而第二关系表明 G 是单射的而 F 是满射的.

设 T 是一个集，F_1 是 X 到 Y 的映射，F_2 是 Y 到 Z 的映射，F_3

是Z到T的映射．则由定义 $F_3\circ(F_2\circ F_1)=(F_3\circ F_2)\circ F_1$；它是$X$到$T$的映射，也记为 $F_3\circ F_2\circ F_1$．任意有限个映射的合成可同样定义．

问　　题

1) 设A, B, C, D都是集合，f是A到B的映射，g是B到C的映射，h是C到D的映射．证明：若 $g\circ f$ 和 $h\circ g$ 都是双射的，则f, g, h也都是双射的．

2) 设A, B, C都是集合，f是A到B的映射，g是B到C的映射，h是C到A的映射．证明：若映射 $h\circ g\circ f$，$g\circ f\circ h$，$f\circ h\circ g$ 中有两个是满射的，而第三个是单射的，或者有两个是单射的，而第三个是满射的，则三个映射f, g和h都是双射的．

3) 设F是$X\times Y$的子集，G是$Y\times X$的子集．用 1.5 节问题 3 的记号，设对于任意$x\in X$，$G(F(x))=\{x\}$，并且对于任意 $y\in Y$，$F(G(y))=\{y\}$．证明：F是X到Y的双射的图象．G是F的逆映射的图象．

4) 设X, Y是两个集合，f是X到Y的单映射，g是Y到X的单映射．证明：存在X的两个子集A, B与Y的两个子集A', B'，使得 $B=X-A$，$B'=Y-A'$，而且 $A'=f(A)$，$B=g(B')$．(令 $R=X-g(Y)$，且 $h=g\circ f$；把A取为X的所有这样的子集M的交：$M\supset R\cup h(M)$.)

8. 元素的族．集族的并与交

设L与X是两个集．L到X的映射有时也称为以L为附标集的**X元素的族**，并把它记为$\lambda\to x_\lambda$，或者$(x_\lambda)_{\lambda\in L}$，或者当不致引起混淆时，简记为$(x_\lambda)$．最重要的例子由（有限或无穷）序列给出，它对应于$L$是非负整数集$N$的有限或无穷子集的情形．

必须把X的元素的族 $(x_\lambda)_{\lambda\in L}$与由该族元素组成的$X$子集区别开来，后者是$L$在映射$\lambda\to x_\lambda$下的象，它完全可以只由一个元素组成，因此不同的族可以有相同的元素集．

对于任意子集$M\subset L$，$\lambda\to x_\lambda$在M上的限制称为$(x_\lambda)_{\lambda\in L}$的以$M$为附标集的**子族**，并记为$(x_\lambda)_{\lambda\in M}$．

对于有限序列 $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$，其元素集记为 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$；对于任意有限或无穷序列的元素集，我们可以使用类似的记法．

设 $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ 是集 X 的子集族．如果对于某个 $x\in X$，至少存在一个 $\lambda\in L$，使 $x\in A_\lambda$，那么这样的 x 的集称为族 $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ 的**并**，记为 $\bigcup\limits_{\lambda\in U} A_\lambda$ 或 $\bigcup\limits_{\lambda} A_\lambda$；而如果对每个 $\lambda\in L$，都有 $x\in A_\lambda$，那么这样的元素 x 的集称为族 $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ 的**交**，记为 $\bigcap\limits_{\lambda\in L} A_\lambda$ 或 $\bigcap\limits_{\lambda} A_\lambda$．当 $L=\{1, 2\}$ 时，上述并与交分别是 $A_1\cup A_2$ 与 $A_1\cap A_2$.

下列命题容易验证：

(1.8.1) $C\left(\bigcup\limits_{\lambda\in L} A_\lambda\right)=\bigcap\limits_{\lambda\in L}(CA_\lambda)$.

(1.8.2) $\left(\bigcup\limits_{\lambda\in L}\right)\cap\left(\bigcup\limits_{\mu\in M} B_\mu\right)=\bigcup\limits_{(\lambda,\mu)\in L\times M}(A_\lambda\cap B_\mu)$.

(1.8.3) $\left(\bigcap\limits_{\lambda\in L} A_\lambda\right)\cup\left(\bigcap\limits_{\mu\in M} B_\mu\right)=\bigcap\limits_{(\lambda,\mu)\in L\times M}(A_\lambda\cup B_\mu)$.

(1.8.4) 若 F 是 X 到 Y 的映射，$(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ 是 X 的子集的族，则

$$F\left(\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda\right)=\bigcup_{\lambda\in L} F(A_\lambda).$$

若 F 是 X 到 Y 的映射，$(A'_\lambda)_{\lambda\in L}$ 是 Y 的子集的族，则

(1.8.5) $F^{-1}\left(\bigcup\limits_{\lambda\in L} A'_\lambda\right)=\bigcup\limits_{\lambda\in L} F^{-1}(A'_\lambda)$.

(1.8.6) $F^{-1}\left(\bigcap\limits_{\lambda\in L} A'_\lambda\right)=\bigcap\limits_{\lambda\in L} F^{-1}(A'_\lambda)$.

若 B 是 X 的子集，则 B 的**覆盖**是指 X 中满足 $B\subset\bigcup\limits_{\lambda\in L} A_\lambda$ 的子集族 $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$.

X 的**划分**是 X 这样的子集族 $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$：它是 X 的一个覆盖 $\left(\text{也就是 } X=\bigcup\limits_{\lambda\in L} A_\lambda\right)$，且当 $\lambda\neq\mu$ 时 $A_\lambda\cap A_\mu=\phi$.

集 X 中的**等价关系**是指满足下述条件的 X 中的两元素 x, y 之

间的关系 $R(x, y)$:

1. 对每个 $x \in X$, $R(x, x)$ 为真(自反性);

2. 关系 $R(x, y)$ 与 $R(y, x)$ 是等价的(对称性);

3. 关系 $R(x, y)$ 与 $R(y, x)$ (对 $x, y, z \in X$) 蕴含 $R(x, z)$ (传递性).

假如 $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ 是 X 的一个划分,则很清楚,关系

"存在 $\lambda \in L$,使得 $x \in A_\lambda$ 与 $y \in A_\lambda$"

是 x 与 y 之间的等价关系.

反之,设 R 是 X 中的等价关系,且 $G \subset X \times X$ 是它的图象(1.3),对每个 $x \in X$, G 的交叉截痕 $G(x)$ (1.3) 称为 x 关于 R 的类(或等价类)(或"mod$R$"). 对某个 $x \in X$, 能写成 $G(x)$ 的 X 所有子集的集是 $\mathfrak{P}(X)$ 的子集,称为 X 关于 R 的商集,并记为 X/R; 映射 $x \to G(x)$ 称为 X 到 X/R 的**典则**(或**自然**)**映射**; 由定义它是一个满射.由 X/R 到 $\mathfrak{P}(X)$ 的自然单射所定义的 X 的子集族是 X 的一个划分,它的元素是类 mod$R$. 事实上,若 $z \in G(x) \cap G(y)$, 则关系 $R(x, y)$ 与 $R(y, z)$ 两者都成立,因此 $R(z, y)$ 成立(对称性), $R(x, y)$ 也成立(传递性), 这就证明了 $y \in G(x)$; 从而蕴含 $G(y) \subset G(x)$ (传递性), 再改换 x 与 y 的位置, 就得到 $G(x) \subset G(y)$; 因此有 $G(x) = G(y)$; 又因对每个 $x \in X$ 有 $x \in G(x)$ (自反性),断言得证.

对 X 到集 Y 的每个映射 f, 关系 $f(x) = f(x')$ 是 x 与 x' 之间的一个等价关系.

设 $(X_\lambda)_{\lambda \in L}$ 是集 Y 的子集族,而对每个 $\lambda \in L$, 设 X'_λ 等于 $\{\lambda\} \times X_\lambda$ ($L \times Y$ 的子集); 很清楚, 第二射影 pr_2: $L \times Y \to Y$ 在 X'_λ 上的限制 p_λ 是 X'_λ 到 X_λ 上的双射. 子集 $S = \bigcup_{\lambda \in L} X'_\lambda \subset L \times Y$ 称为族 X_λ 的**和**(不要与族的并混淆!)显然 (X'_λ) 是 S 的一个划分. 通常由于自然双射 p_λ, X_λ 与 X'_λ 将是恒等的. 如果对每个 $\lambda \in L$, u_λ 是 X'_λ 到集 T 的映射,则有且仅有 S 到 T 的一个映射 u, 在每个 X'_λ 中与 u_λ 重合.

现在，我们考虑由所有这样的L到Y的映射$\lambda \to x_\lambda$组成的集Y^L(1.4)的子集：使得对每个$\lambda \in L$有$x_\lambda \in X_\lambda$；这个子集称为族$(X_\lambda)_{\lambda \in L}$的**积**，并记为$\prod_{\lambda \in L} X_\lambda$；对每个$x = (x_\lambda) \in \prod_{\lambda \in L} X_\lambda$与每个附标$\mu \in L$，我们记$x_\mu = \mathrm{pr}_\mu(x)$. 更一般地，对$L$的每个非空子集$J$，我们记$\mathrm{pr}_J(x) = (x_\lambda)_{\lambda \in J}$ ($x = (x_\lambda)_{\lambda \in L}$的子族). 由选择公理1.4.5可知，若对每个$\lambda \in L$，$X_\lambda \neq \phi$，则$\prod_{\lambda \in L} X_\lambda \neq \phi$，并且映射$\mathrm{pr}_J$中的每个映射都是满射. 此外，若$J$与$L-J$都非空，则映射$x \to (\mathrm{pr}_J(x), \mathrm{pr}_{L-J}(x))$是$\prod_{\lambda \in L} X_\lambda$到$\left(\prod_{\lambda \in L} X_\lambda\right) \times \left(\prod_{\lambda \in L-J} X_\lambda\right)$上的双射. 如果对每个$\lambda \in L$，$u_\lambda$是集$T$到$X_\lambda$的映射，则存在$T$到$\prod_{\lambda \in L} X_\lambda$的唯一映射$u$，使得对每个$\lambda \in L$有$\mathrm{pr}_\lambda \circ u = u_\lambda$；对每个$t \in T$，$u$对应于一个元素$u(t) = (u_\lambda(t)) \in \prod_{\lambda \in L} X_\lambda$；映射$u$通常记为$(u_\lambda)$.

问　　题

设$(X_i)_{1<i<n}$是一有限集族，对于N的区间$[1, n]$上的任意子集H，令$P_H = \bigcup_{i \in H} X_i$与$Q_H = \bigcap_{i \in H} X_i$. 设$\mathscr{T}_k$是$[1, n]$的所有具$k$个元素的子集的类，试证：

当$2k \leqslant n+1$时，$\bigcup_{H \in \mathscr{T}_k} Q_H \supset \bigcap_{H \in \mathscr{T}_k} P_H$.

当$2k \geqslant n+1$时，$\bigcup_{H \in \mathscr{T}_k} Q_H \subset \bigcap_{H \in \mathscr{T}_k} P_H$.

9. 可　数　集

我们称集X**对等于**集Y，如果存在X到Y上的双射. 显然，X

对等于 X；若 X 对等于 Y，则 Y 对等于 X；若 X 与 Y 都对等于 Z 则 X 对等于 Y. 一个集称为**可数的**，如果它对等于整数集 N.

(1.9.1) 整数集 N 的任意子集是有限或可数的.

因为，假设 $A \subset N$ 是无穷的，我们用下面的归纳法定义 N 到 A 的一个映射 $n \to x_n$: x_0 是 A 中最小元素，x_n 是集 $A - \{x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}\}$ 的最小元素，由假设它是非空的. 这个定义首先表明对于 $i < n$ 有 $x_i \neq x_n$，因此 $n \to x_n$ 是单射的；此外我们证明，对于 $i < n$ 有 $x_i < x_n$. 固定 n 并对 i 使用归纳法：由 x_n 的定义，有 $x_0 < x_n$. 于是假设 $x_j < x_n$ 对于 $j < i$ 已被证明，则由 x_i 的定义，$x_i \leqslant x_n$，从而 $x_i < x_n$，因为已有 $x_i \neq x_n$. 其次对 n 使用归纳法，立即由关系：对 $i < n$ 有 $x_i < x_n$ 推得，对每个 n 都有 $n \leqslant x_n$；故若 $a \in A$ 就有 $a \leqslant x_a$. 令 m 是使 $x_m < a$ 的最大整数 $<a$；若存在整数 $b \in A$，使得 $x_m < b < a$，则按定义我们有 $x_{m+1} \leqslant b < a$，这与 m 的定义相矛盾，于是 a 是 $A - \{x_0, \cdots, x_m\}$ 的最小元素，换句话说，$a = x_{m+1}$，因此映射 $n \to x_n$ 是双射的，证完.

由(1.9.1)推知：可数集的任意子集是有限的或可数的，这种集也称为**至多可数的**.

(1.9.2) 设 A 是可数集，f 是 A 到集 B 的满射，则 B 是至多可数的.

设 $n \to a_n$ 是 N 到 A 的双射；则 $n \to f(a_n)$ 是 N 到 B 的满射，因此可假定 $A = N$. 对于每个 $b \in B$，据假设 $f^{-1}(b)$ 是非空的；设 $m(b)$ 是它的最小元素. 则 $f(m(b)) = b$，这立即表明 m 是 B 到 N 的单射；m 可以看作 B 到 $m(B) \subset N$ 的双射，而据(1.9.1)，$m(B)$ 是至多可数的，证完.

我们注意到，若集 A 是至多可数的，则总存在 N 到 A 的一个满射；若 A 是无穷集，这是显然的；不然的话，则存在区间 $0 \leqslant i \leqslant m$ 到 A 的双射 f，然后按下述方法把 f 延拓成满射，就是对 $n > m$ 令 $g(n) = f(m)$.

(1.9.3) 集 $N \times N = N^2$ 是可数的.

定义 $N \times N$ 到 N 的单射

$$f(x, y) = (x + y)(x + y + 1)/2 + y$$

("对角线算式"; 它原是双射, 但我们不需要这一结果). 事实上, 若 $x+y=a$, 则 $(a+1)(a+2)/2=a+1+a(a+1)/2$; 于是若 $x+y<x'+y'$, 则由于 $y\leqslant a$, 而有 $f(x,y)\leqslant a+a(a+1)/2<f(x',y')$; 又若 $x+y=x'+y'$ 且 $y'<y$, 则 $f(x,y)-f(x',y')=y-y'$; 于是由 $(x,y)\neq(x',y')$ 推出 $f(x,y)\neq f(x',y')$. 然后应用(1.9.1)即得.

我们说族 $(x_\lambda)_{\lambda\in L}$ 是**可数的**(相应地,**至多可数的**),如果附标集 L 是可数的(相应地,至多可数的).

(1.9.4) 可数集的可数族的并是可数的.

设 $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ 是可数集的可数族;则存在 N 到 L 的双射 $n\to\lambda_n$, 并且对每个 $\lambda\in L$ 都存在 N 到 A_λ 的双射 $n\to f_\lambda(n)$. 设 $A=\bigcup_{\lambda\in L}A_\lambda$, 考虑 $N\times N$ 到 A 的映射 $(m,n)\to f_{\lambda_n}(m)$; 这个映射是满射的, 因为若 $x\in A_\mu$, 则存在 n 使得 $\mu=\lambda_n$ 与 m 使得 $x=f_\mu(m)=f_{\lambda_n}(m)$. 因为 A 是无穷的, 于是结果由(1.9.3)与(1.9.2)推出.

把"可数"一词处处换为"至多可数"时,结果(1.9.4)仍然有效. 在证明中, 只要用(1.9.2)后的附注把双射换成满射就行了.

最后,我们认为下面的结果是一条公理:

(1.9.5)每个无穷集都包含一个可数子集.

问 题

1) 证明 N 的所有有限子集的类 $\mathfrak{J}(N)$ 是可数的(把它写成可数集的可数并集).

2) 证明 N 的元素的所有有限序列的集是可数的(应用问题 1: 注意序列与其元素集合之间的区别!).

3) 用下面的方法证明 1.7 节问题 4 的结果: 设 $u=g\circ f$, $v=f\circ g$,并归纳地定义 u_n 与 v_n 为 $u_n=u_{n-1}\circ u$, $v_n=v_{n-1}\circ v$;然后考虑 X 中递减集列 $u_n(X)$ (相应地, $v_n(Y)$) 以及它们通过 f (相应地, g)在 Y (相应地, X)中的象.

4) 证明: 集 X 为无穷集的充要条件是: 对每个 X 到它自身的映射 f,都存在 X 的非空子集 A,使得 $A\neq X$ 且 $f(A)\subset A$. (若 f 不具备上述性质而 X 是无穷集,则首先证明 X 是可数的,然后可以假设 $X=N$ 且对于 $n\geqslant 0$, $f(n)>n$;

证明这将引出矛盾.)

5) 设E是无穷集，D是E的至多可数子集且使得$E-D$是无穷集. 证明$E-D$对等于E(应用(1.9.5)与(1.9.4)定义E到$E-D$的双射)。

第二章 实 数

本章的内容完全是经典的；与实数的许多处理方法的主要差别是，它们的性质在这里由一定数量选作公理的命题推导出来，而实际上那些命题可以证明是集论公理(或者是自然数公理连同集论的某一部分，使我们能够实行“Dedekind 分割”或“Cantor 基本序列”的经典构造)的必然结果．这些证明具有重大的逻辑意义，而且从历史上说，它们在弄清经典的(有点模糊的)“连续”概念方面非常有用．但是，它们与分析却没有关系，我们认为把它们强加给学生是不必要的；有兴趣的读者，实际上可以在任何一本分析书中找到它们；关于一个特别清晰与简洁的论述，可参看 Landau [16]．

1. 实 数 公 理

实数域是一个集 $\boldsymbol{R}$，其中定义了：1° $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{R}$ 中的两个映射 $(x, y)\to x+y$ 与 $(x, y)\to xy$；2° $\boldsymbol{R}$ 的元素间的一个关系 $x\leqslant y$ (也记为 $y\geqslant x$)，满足下列四组公理：

(I) $\boldsymbol{R}$ 是一个域，换句话说：

(I.1) $x+(y+z)=(x+y)+z$；

(I.2) $x+y=y+x$；

(I.3) 存在元素 $0\in\boldsymbol{R}$ 使得对每个 $x\in\boldsymbol{R}$，$0+x=x$；

(I.4) 对于每个元素 $x\in\boldsymbol{R}$，都存在元素 $-x\in\boldsymbol{R}$，使得 $x+(-x)=0$；

(I.5) $x(yz)=(xy)z$；

(I.6) $xy=yx$；

(I.7) 在 $\boldsymbol{R}$ 中存在 $1\neq 0$，使得对每个 $x\in\boldsymbol{R}$，$1\cdot x=x$；

(I.8) 对 $\boldsymbol{R}$ 中每一个元素 $x\neq 0$，都存在元素 $x^{-1}\in\boldsymbol{R}$ (也写为

$1/x$) 使得 $xx^{-1} = 1$;

(I.9) $x(y + z) = xy + xz$.

我们假定这些公理的基本推论(域的一般理论)都是已知的.

(II) $\boldsymbol{R}$ 是一个**有序域**,就是说满足下列公理:

(II.1) 若 $x \leqslant y$, $y \leqslant z$, 则 $x \leqslant z$;

(II.2) "$x \leqslant y$ 与 $y \leqslant x$" 等价于 $x = y$;

(II.3) 对 $\boldsymbol{R}$ 的任意两个元素 x, y, 或者 $x \leqslant y$ 或者 $y \leqslant x$;

(II.4) 若 $x \leqslant y$, 则 $x + z \leqslant y + z$;

(II.5) 若 $0 \leqslant x$ 与 $0 \leqslant y$, 则 $0 \leqslant xy$.

关系"$x \leqslant y$ 与 $x \neq y$"记为 $x < y$ 或 $y > x$. 如果 $\boldsymbol{R}$ 的任意一对元素 a, b 满足 $a < b$, 则使 $a < x < b$ 的实数 x 的集称为始点为 a 终点为 b 的开区间, 记为 $]a, b[$; 使 $a \leqslant x \leqslant b$ 的实数 x 的集称为始点为 a 终点为 b 的闭区间, 记为 $[a,b]$ (对于 $a=b$,记号$[a, a]$是指的单点集 $\{a\}$); 使 $a < x \leqslant b$ (相应地, $a \leqslant x < b$) 的实数 x 的集称为始点为 a 终点为 b 的半开区间, 开于 a (相应地,b), 闭于 b (相应地, a), 记为 $]a, b]$ (相应地, $[a, b[$). 区间的始点与终点也统称为区间的"端点".

(III) $\boldsymbol{R}$ 是一个阿基米德 (Archimedes) 有序域,就是说它满足阿基米德公理: 对于任意一对实数 x, y,满足 $0 < x$, $0 \leqslant y$, 恒存在整数 n 使得 $y \leqslant nx$.

(IV) $\boldsymbol{R}$ 满足区间套公理: 任给一个这样的闭区间序列($[a_n,b_n]$), 使得对每个 n 都有 $a_n \leqslant a_{n+1}$ 与 $b_{n+1} \leqslant b_n$, 则这个序列的交非空.

2. 实数的序性质

关系 $x \leqslant y$ 等价于"$x < y$ 或 $x = y$".

(2.2.1) 对于每一对实数 x, y, 三种关系 $x < y$, $x = y$, $x > y$ 中有一个且只有一个成立.

这由 (II.3) 与 (II.2) 推得, 因为若 $x \neq y$, 则由 (II.2), $x < y$ 与 $x > y$ 同时成立是不可能的.

(2.2.2) 若有关系“$x \leqslant y$ 与 $y < z$”或“$x < y$ 与 $y \leqslant z$”，则有 $x < z$.

因为据 (II.1)，由它们都能推出 $x \leqslant z$，又若 $x = z$，则我们将同时有 $x \leqslant y$ 与 $y < x$（或同时有 $x < y$ 与 $y \leqslant x$），这是矛盾的.

(2.2.3) $\boldsymbol{R}$ 的任意有限子集 A 都有一个最大元素 b 与一个最小元素 a（即对每个 $x \in A$，都有 $a \leqslant x \leqslant b$）.

我们对 A 的元素个数 n 用归纳法，对于 $n = 1$ 该性质是显然的. 设 c 是 A 的一个元素，令 $B = A - \{c\}$；则 B 有 $n - 1$ 个元素，于是它有一个最小元素 a' 与一个最大元素 b'. 若 $a' \leqslant c \leqslant b'$，则 a' 是 A 的最小元素，b' 是 A 的最大元素；若 $b' \leqslant c$，则 c 是 A 的最大元素，a' 是 A 的最小元素；若 $c \leqslant a'$，则 c 是 A 的最小元素，b' 是 A 的最大元素.

(2.2.4) 设 A 是 $\boldsymbol{R}$ 的具有 n 个元素的有限子集，I_n 是使得 $1 \leqslant i \leqslant n$ 的整数 i 的集，则存在唯一的由 I_n 到 A 的双射 f，使得对 $i < j$ 有 $f(i) < f(j)$（f 称为 A 的自然序）.

对 n 用归纳法，当 $n = 1$ 时，结果是显然的. 设 b 是 A 的最大元素(2.2.3)，$B = A - \{b\}$；又设 g 是 B 的自然序. 则具有上述性质的任一个 I_n 到 A 的映射 f 必使 $f(n) = b$，因此 $f(I_n - 1) = B$；于是 f 必在 I_{n-1} 上与 B 的自然序 g 重合，这就证明 f 是唯一的；反过来，在 I_{n-1} 上定义 f 等于 g 且使 $f(n) = b$，我们立即看到 f 具有所需要的性质.

(2.2.5) 设 (x_i) 与 (y_i) 是两个 n 项的有限实数序列($1 \leqslant i \leqslant n$)，且对每个 i 都有 $x_i \leqslant y_i$，则

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant y_1 + y_2 + \cdots + y_n.$$

另外，如果对于至少一个 i 有 $x_i < y_i$，那么我们有

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n < y_1 + y_2 + \cdots + y_n.$$

对于 $n = 2$，据 (II.4) 由假设依次推出 $x_1 + x_2 \leqslant y_1 + x_2 \leqslant y_1 + y_2$，于是得出这种情形下的第一结论；此外，由关系 $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ 推出 $x_1 + x_2 = x_1 + y_2 = y_1 + y_2$，于是 $x_2 = y_2$ 与 $x_1 = y_1$，

由此推得第二论断．应用刚才对 $n=2$ 所获得的结果，证明就可对 n 用归纳法完成．

(2.2.6) 关系 $x \leqslant y$ 等价于 $x+z \leqslant y+z$；当用 $<$ 代替 $\leqslant$ 时，结果不变．

由 (II.4) 我们已经知道若 $x \leqslant y$，则 $x+z \leqslant y+z$；反之，若 $x+z \leqslant y+z$，则 $x+z+(-z) \leqslant y+z+(-z)$，也就是 $x \leqslant y$．另一方面，$x+z=y+z$ 等价于 $x=y$．

(2.2.7) 关系 $x \leqslant y$，$0 \leqslant y-x$，$x-y \leqslant 0$，$-y \leqslant -x$ 是等价的；用 $<$ 代替 $\leqslant$，结果不变．

这由 (2.2.6) 依次取 $z=-x$，$z=-y$ 与 $z=-x-y$ 而推得．

$x \geqslant 0$（相应地，$x>0$）的实数 x 称为**正数**（相应地，**严格正数**）；$x \leqslant 0$（相应地，$x<0$）的实数 x 称为**负数**（相应地，**严格负数**）．正数（相应地，严格正数）的集记成 $\boldsymbol{R}_+$（相应地，$\boldsymbol{R}_+^*$）．

(2.2.8) 若 $x_1, \cdots, x_n$ 是正数，则 $x_1+x_2+\cdots+x_n$ 也是正数，而且除了 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 以外，都有 $x_1+x_2+\cdots+x_n>0$．

这是(2.2.5)的特殊情形．

特别地，对任意整数 $n>0$，$x \geqslant 0$（相应地，$x>0$）等价于 $n \cdot x \geqslant 0$（相应地，$n \cdot x>0$）．

对始点为 a，终点为 b 的区间，正数 $b-a$ 叫做该区间的长度．

对任意实数 x，我们定义 $|x|$，当 $x \geqslant 0$ 时，等于 x；当 $x \leqslant 0$ 时，等于 $-x$．于是 $|-x|=x$；$|x|$ 称为 x 的**绝对值**；$|x|=0$ 等价于 $x=0$．记 $x^+=(x+|x|)/2$（x 的正部），$x^-=(|x|-x)/2$（x 的负部），于是当 $x \geqslant 0$ 时，$x^+=x$；当 $x \leqslant 0$ 时，$x^+=0$；当 $x \geqslant 0$ 时，$x^-=0$；当 $x \leqslant 0$ 时，$x^-=-x$，并且 $x=x^+-x^-$，$|x|=x^++x^-$．

(2.2.9) 若 $a>0$，则关系 $|x| \leqslant a$ 等价于 $-a \leqslant x \leqslant a$，关系 $|x|<a$ 等价于 $-a<x<a$．

事实上，若 $x \geqslant 0$，则 $x > -a$ 恒满足，且 $|x| \leqslant a$（相应地，$|x| < a$）等价于 $x \leqslant a$（相应地，$x < a$）；若 $x \leqslant 0$，则 $x < a$ 恒满足，且 $|x| \leqslant a$（相应地，$|x| < a$）等价于 $-x \leqslant a$（相应地，$-x < a$）.

(2.2.10) 对任一对实数 x，y，有 $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ 与 $||x| - |y|| \leqslant |x-y|$.

据定义，并由(2.2.8)，当 x，y 同时为正或同时为负时，第一关系式是显然的. 例如，假设 $x \leqslant 0 \leqslant y$，则 $x+y \leqslant y \leqslant y+|x| = |y|+|x|$，同时 $x+y \geqslant x \geqslant x-|y| = -|x|-|y|$. 从第一不等式推出 $|x| = |y+(x-y)| \leqslant |y| + |x-y|$ 及 $|y| = |x+(y-x)| \leqslant |x| + |y-x|$，于是 $-|x-y| \leqslant |x| - |y| \leqslant |x-y|$.

用归纳法由(2.2.10)推知

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leqslant |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|.$$

(2.2.11) 若 $z \geqslant 0$，则关系 $x \leqslant y$ 蕴含 $xz \leqslant yz$.

因为依(2.2.7)，$x \leqslant y$ 蕴含 $0 \leqslant y - x$，于是由(II.5)得出 $0 \leqslant z(y-x) = zy - zx$.

(2.2.12) 若 $x \leqslant 0$ 与 $y \geqslant 0$，则 $xy \leqslant 0$；若 $x \leqslant 0$ 与 $y \leqslant 0$，则 $xy \geqslant 0$. 把 $\leqslant$ 换为 $<$，其结果不变. 特别地，对于任何实数 x，都有 $x^2 \geqslant 0$，而且除 $x = 0$ 以外，都有 $x^2 > 0$.

第一论断由(II.5)与 $(-x)y = -xy$，$(-x)\cdot(-y) = xy$ 推出. 另一方面，$xy = 0$ 蕴含 $x = 0$ 或 $y = 0$. 由(2.2.13)对任一对实数 x，y 都有 $|xy| = |x| \cdot |y|$.

从(2.2.12)与(1.7)推出 $1 = 1^2 > 0$，于是据(2.2.8)，对于 $n > 0$，实数 $n \cdot 1$（1被加 n 次）是 >0 的；这表明自然数到 $\boldsymbol{R}$ 的映射 $n \to n \cdot 1$ 是单射的，并且保持着序关系，加法与乘法；于是自然数借此映射而视为实数.

(2.2.13) 若 $x > 0$，则 $x^{-1} > 0$. 对于 $z > 0$，关系 $x \leqslant y$（相应地，$x < y$）等价于 $xz \leqslant yz$（相应地，$xz < yz$）. 关系 $0 < x < y$ 等价于 $0 < y^{-1} < x^{-1}$，并且，对每个整数 $n > 0$ 也等价于 $0<$

$x^n < y^n$.

第一个论断由下述事实推出：因 $xx^{-1} = 1 > 0$，于是由(2.2.12)，$x^{-1} > 0$；第二个论断由第一个与(2.2.11)推出，因为 $x = (xz)z^{-1}$. 第三个论断是第二个的明显结果. 最后的论断由关系 $x^n < x^{n-1}y < y^n$ 对整数 n 用归纳法得到.

附注. $\boldsymbol{R}$ 的开区间 $]a, b[$ $(a < b)$ 非空，因为由(2.2.13)关系 $b - a > 0$ 蕴含 $(b - a)/2 > 0$；因此 $a < (a + b)/2 < b$. 由此附注导出：

(2.2.14) 设 $J_1, \cdots, J_n$ 是 n 个开区间，其中任意两个都没有公共点，并设 I 是一包含 $\bigcup_{k=1}^{n} J_k$ 的区间，若 l_k 是 J_k 的长$(1 \leqslant k \leqslant n)$，$l$ 是 I 的长，则 $l_1 + l_2 + \cdots + l_n \leqslant l$.

令 $I =]a, b[$，$J_k =]c_k, d_k[$. 对每个 $k \neq 1$，或者有 $c_k < d_k < c_1$ 或者有 $d_1 \leqslant c_k < d_k$，否则 $J_1 \cap J_k$ 就不空. 对于 $n = 1$，这个性质立即可得，因为 $a \leqslant c_1 < d_1 \leqslant b$，所以 $-c_1 \leqslant -a$，从而 $d_1 - c_1 \leqslant b - a$. 对 n 应用归纳法；设 $J_{i_1}, \cdots, J_{i_p}$ 是含于 $]a, b[$ 中的那些区间，$J_{j_1}, \cdots, J_{j_{n-1-p}}$ 是含在 $]d_1, b[$ 中的那些区间；则由归纳法知 $\sum_{h=1}^{p} l_{i_h} \leqslant c_1 - a$，$\sum_{k=1}^{n-1-p} l_{j_k} \leqslant b - d_1$，从而 $l_1 + l_2 + \cdots l_n = l_1 + \sum_k l_{i_k} + \sum_k l_{j_k} \leqslant d_1 - c_1 + c_1 - a + b - d_1 = b - a$.

形式为 $\pm r/s$ 的实数，这里 r 与 s 是自然数，$s \neq 0$，称为**有理数**. 使 $s = 1$ 的那些有理数称为**整数**(正的或负的)，所有整数的集记为 $\boldsymbol{Z}$.

(2.2.15) 有理数集 $\boldsymbol{Q}$ 是可数的.

因为 $\boldsymbol{Q}$ 是 $\boldsymbol{Q} \cap \boldsymbol{R}_+$ 与 $\boldsymbol{Q} \cap (-\boldsymbol{R}_+)$ 的并，所以只要证明 $\boldsymbol{Q} \cap \boldsymbol{R}_+$ 是可数的就行了. 但是存在 $N \times N$ 的子集到 $\boldsymbol{Q} \cap \boldsymbol{R}_+$ 的满射 $(m, n) \to m/n$，这个子集是由那些 $n \neq 0$ 的数对组成的，于是由(1.9.2)，(1.9.3)与(1.9.4)得出要证的结果.

(2.2.16) $\boldsymbol{R}$ 的每个开区间都包含有理数的无穷集.

这只要证明 $]a, b[$ 包含一个有理数 c 就够了. 因为这样 $]a, c[$ 将包含一个有理数,于是用归纳法就能得出最后的结果.令 $x = b - a > 0$; 据 (III),存在一个整数 $n > 1/x$, 故由(2.2.13)得, $1/n < x$. 我们可以假设 $b > 0$ (否则考虑区间 $]-b, -a[$, 其中 $-a > 0$). 据(III) 存在整数 $k > 0$ 使得 $b \leqslant k/n$; 设 h 是满足 $b \leqslant h/n$ 的最小的整数. 则 $(h-1)/n < b$; 我们证明 $(h-1)/n > a$; 如果不然,则据(2.2.9)有 $b - a = x \leqslant 1/n$, 与 n 的定义矛盾.

(2.2.17) 实数集是不可数的.

用反证法来证明. 假设有 $\boldsymbol{N}$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的双射 $n \to x_n$. 我们归纳地定义整数的序列 $n \to p(n)$ 如下: $p(0) = 0$, $p(1)$ 是使 $x_n > x_0$ 的 n 的最小值. 假设对 $n \leqslant 2m-1$, $p(n)$ 已定义,并且 $x_{p(2m-2)} < x_{p(2m-1)}$; 那么据(2.2.16),集 $]x_{p(2m-2)}, x_{p(2m-1)}[$ 是无穷的,于是定义 $p(2m)$ 是满足 $x_{p(2m-2)} < x_k < x_{p(2m-1)}$ 的最小整数 $k > p(2m-1)$; 然后定义 $p(2m+1)$ 是满足 $x_{p(2m)} < x_k < x_{p(2m-1)}$ 的最小整数 $k > p(2m)$. 显然序列 $p(n)$ 是严格上升的,于是对所有的 n 都有 $p(n) \geqslant n$. 另一方面, 由上述作法推知,闭区间 $[x_{p(2m)}, x_{p(2m+1)}]$ 含于开区间 $]x_{p(2m-2)}, x_{p(2m-1)}[$ 内. 据 (IV) 存在实数 y 含于所有闭区间 $[x_{p(2m)}, x_{p(2m+1)}]$ 内, 并且它不与任何端点重合, 因为一个区间的端点不属于下一个区间. 设 g 是使 $y = x_q$ 的整数,再设 n 是使 $p(n) \leqslant q$ 的最大整数,于是 $q < p(n+1)$. 先假设 $n = 2m$; 则关系 $x_{p(2m)} < x_q < x_{p(2m+1)} < x_{p(2m-1)}$ 与 $p(2m+1)$ 的定义矛盾. 反之,若 $n = 2m-1$, 则关系 $x_{p(2m-2)} < x_{p(2m)} < x_q < x_{p(2m-1)}$ 就与 $p_{(2m)}$ 的定义相矛盾. 证完.

问　　题

1) 设 A 是 $\boldsymbol{R}$ 的可数子集, 且有下述性质: 对于 A 的每一对元素 $x<y$, 总存在 A 的元素 u, v, w 使得 $u<x<v<y<w$. 试证存在 A 到有理数集 $\boldsymbol{Q}$ 上的双射 f,使 $x<y$ 蕴含 $f(x)<f(y)$. (令 $n \to a_n$, $n \to b_n$ 是 $\boldsymbol{N}$ 到 A 与 $\boldsymbol{Q}$ 上的双射. 对 n 用归纳法证明: 存在有限子集 $A_n \subset A$, $B_n \subset \boldsymbol{Q}$, 及 A_n 到 B_n 的双射 f_n,使得: 1° 对 $i \leqslant n$ 的 a_i 属于 A_n; 2° 对 $i \leqslant n$ 的 b_i 属于 B_n; 3° 在 A_n 中 $x<y$ 蕴含 $f_n(x)<f_n(y)$; 4° $A_n \subset A_{n+1}$ 并且 f_n 是 f_{n+1} 在 A_n 上的限

制.)

2) 证明所有无理数集 I 对等于 $\boldsymbol{R}$(参看 1.9 节问题 5)。

3. 上确界与下确界

称实数 b 为 $\boldsymbol{R}$ 的子集 X 的**上界**(相应地，**下界**)，假如对每个 $x\in X$，都有 $x\leqslant b$(相应地，$b\leqslant x$). 集 $X\subset\boldsymbol{R}$ 称为**有上界的**(相应地,**有下界的**),假如 X 的上界(相应地,下界)的集合不空. 若 X 是有上界的,则 $-X$($-x$ 的集合,这里 $x\in X$) 是有下界的,而且对每个 X 的上界 b，$-b$ 是 $-X$ 的下界，反之也是一样. 既有上界又有下界的集,称为**有界集**.

(2.3.1) 集 $X\subset\boldsymbol{R}$ 有界的充要条件是存在整数 n，使对每个 $x\in X$ 都有 $|x|\leqslant n$.

因由 (III) 推知,若 a 是 X 的下界，b 是它的上界,则存在整数 p，q 使得 $-p<a$ 与 $b<q$; 于是取 $n=p+q$ 即可. 逆命题是显然的.

(2.3.2) 若 $\mathbf{R}$ 的非空子集 X 有上界，则 X 的上界的集合 M 有一个最小元素.

设 $a\in X$，$b\in M$; 据 (III)，对每个整数 n，都存在整数 m，使得 $b\leqslant a+m\cdot 2^{-n}$; 另一方面,若 c 是 X 的上界,则每个 $y\geqslant c$ 亦然,因此存在最小的整数 p_n，使得 $a+p_n\cdot 2^{-n}$ 是 X 的上界; 由此推知，若 $I_n=[a+(p_n-1)2^{-n},\ a+p_n\cdot 2^{-n}]$，则 $I_n\cap X$ 是不空的. 由于 $p_n\cdot 2^{-n}=(2p_n)2^{-n-1}$，所以必然有 $p_{n+1}=2p_n$ 或 $p_{n+1}=2p_n-1$，因为 $(2p_n-2)2^{-n-1}$ 不是上界,换句话说，$I_{n+1}\subset I_n$. 由 (IV) 推出，区间 I_n 有一个非空的交集 J; 若 J 至少包含两个不同的元素 $\alpha<\beta$，则区间 $[\alpha,\beta]$ 就含于每一个 I_n 中，因此据 (2.2.14)，对每个 n 有 $2^{-n}\geqslant\beta-\alpha$ 或 $1\geqslant 2^n(\beta-\alpha)$，这与 (III) 矛盾(记住 $2^n\geqslant n$，由归纳法这是显然的). 因此 $J=\{\gamma\}$. 我们首先证明 γ 是 X 的上界;若不然,则存在 $x\in X$，使得 $x>\gamma$; 但是这时存在 n 使 $2^{-n}<x-\gamma$，又因 $\gamma\in I_n$，所以有 $a+p_n\cdot 2^{-n}<$

x，这与 p_n 的定义矛盾．另一方面，每个 $y \in M$ 都 $\geqslant \gamma$；若不然，则存在 n 使得 $2^{-n} < \gamma - y$，又因 $\gamma \in I_n$，所以有 $a + (p_n - 1)2^{-n} > y$，从而 $a + (p_n - 1)2^{-n}$ 是 X 的上界；这又与 p_n 的定义矛盾．于是数 γ 是 M 的最小元素；称它为 X 的**最小上界**或**上确界**，并记为 $\sup X$．

(2.3.3) 若 $\boldsymbol{R}$ 的非空子集 X 有下界，则 X 的下界的集合 M' 有一个最大元素．

把(2.3.2)应用到集 $-X$ 上即得．

M' 的最大元素称为 X 的**最大下界**或**下确界**，并记为 $\inf X$．对于非空有界集 X，$\inf X$ 与 $\sup X$ 都存在，并且 $\inf X \leqslant \sup X$．

(2.3.4) 有上界的集 X 的上确界是这样的实数 γ，它由下列两个性质表征：1° γ 是 X 的上界；2° 对于每个整数 $n > 0$，都存在元素 $x \in X$ 使得 $\gamma - \frac{1}{n} < x \leqslant \gamma$．

$\gamma = \sup X$ 的两个性质直接由定义推出，因为第二个性质表示 $\gamma - \frac{1}{n}$ 不是 X 的上界．反之，若这两个性质满足，则我们不能有 $\sup X = \beta < \gamma$；因为存在 n 使得 $\frac{1}{n} < \gamma - \beta$，因此 $\beta < \gamma - \frac{1}{n}$，于是 $\gamma - \frac{1}{n}$ 是 X 的上界，而与性质2° 矛盾．类似的特性对 $\inf X$ 也成立，这只要把(2.3.4)应用于 $-X$ 就行了，因为 $\inf X = -\sup(-X)$．

若集 $X \subset R$ 有最大元素 b（相应地，最小元素 a），则 $b = \sup X$（相应地，$a = \inf X$），这时我们记之为 $\max X$（相应地，$\min X$）而不是 $\sup X$（相应地，$\inf X$）．据(2.2.3)，这特别适用于有穷集合．但有界无穷集 X 的上确界与下确界却不一定属于 X；例如，若 X 是所有数 $1/n$ 的集，这里 n 取遍所有整数 $\geqslant 1$，则 0 是 X 的下确界．

(2.3.5) 若 $A \subset \boldsymbol{R}$ 是有上界的，且 $B \subset A$，则 B 也是有上界的，而且 $\sup B \leqslant \sup A$．

这直接由定义推出。

(2.3.6) 设$(A_\lambda)_{\lambda\in L}$是$\boldsymbol{R}$的非空有上界子集的族；且$A=\bigcup_{\lambda\in L}A_\lambda$，再设$B$是以$\sup A_\lambda$为元素的集．则$A$有上界的充要条件是$B$有上界，并且$\sup A=\sup B$。

由定义立即推出：A的任意上界都是B的上界，反之亦然．因而得出要证的结果．

设f是集A到实数集$\boldsymbol{R}$的映射；我们说f在A中是**有上界的**（**相应地，有下界的，有界的**），如果$\boldsymbol{R}$的子集$f(A)$是有上界的（相应地，有下界的，有界的）；我们记$\sup f(A)=\sup_{x\in A}f(x)$，$\inf f(A)=\inf_{x\in A}f(x)$，这时，这些数（$f$在$A$中的上确界与下确界）也就被确定了．若$f$是有上界的，则$-f$是有下界的，而且

$$\inf_{x\in A}(-f(x))=-\sup_{x\in A}f(x).$$

(2.3.7) 设f是$A_1\times A_2$到$\boldsymbol{R}$的映射；若f是有上界的，则

$$\sup_{(x_1,x_2)\in A_1\times A_2}f(x_1,x_2)=\sup_{x_1\in A_1}\left(\sup_{x_2\in A_2}f(x_1,x_2)\right).$$

因为可以把$f(A_1\times A_2)$写成形如集合$f(\{x_1\}\times A_2)$的并集，x_1取遍A_1，并应用(2.3.6)。

(2.3.8)设f，g是A到$\boldsymbol{R}$的两个映射，并且对每个$x\in A$都有$f(x)\leqslant g(x)$；那么若g是有上界的，则f也是有上界的，而且

$$\sup_{x\in A}f(x)\leqslant\sup_{x\in A}g(x).$$

这立即由定义推出．

(2.3.9) 设f与g是A到$\boldsymbol{R}$的两个映射；若f与g都是有上界的，则$f+g$（即映射$x\to f(x)+g(x)$）也是有上界的，而且

$$\sup_{x\in A}(f(x)+g(x))\leqslant\sup_{x\in A}f(x)+\sup_{x\in A}g(x).$$

若g也是有下界的，则

$$\sup_{x\in A}f(x)+\inf_{x\in A}g(x)\leqslant\sup_{x\in A}(f(x)+g(x)).$$

设$a=\sup_{x\in A}f(x)$，$b=\sup_{x\in A}g(x)$；则对每个$x\in A$，$f(x)\leqslant a$且

$g(x) \leqslant b$，于是 $f(x)+g(x) \leqslant a+b$，而得到第一个不等式.设 $c=\inf g(x)$；则对每个 $x \in A$，$f(x)+c \leqslant f(x)+g(x) \leqslant d=\sup_{x \in A}(f(x)+g(x))$；但由此得出：对每个 $x \in A$，$f(x) \leqslant d-c$，于是 $a \leqslant d-c$，或 $a+c \leqslant d$，这就是第二个不等式.

(2.3.10) 设 f 是 A 到 $\boldsymbol{R}$ 的有上界的映射；则对每个实数 c 都有

$$\sup_{x \in A}(f(x)+c)=c+\sup_{x \in A} f(x).$$

在(2.3.9)中把 g 取为常函数 c 即得.

(2.3.11) 设 f_1（相应地，f_2）是 A_1（相应地，A_2）到 $\boldsymbol{R}$ 的有上界的映射；则 $(x_1, x_2) \rightarrow f_1(x_1)+f_2(x_2)$ 是有上界的，并且

$$\sup_{(x_1, x_2) \in A_1 \times A_2}(f_1(x_1)+f_2(x_2))=\sup_{x_1 \in A_1} f_1(x_1)+\sup_{x_2 \in A_2} f_2(x_2).$$

应用(2.3.7)与(2.3.10)即得.

我们把关于 inf 类似性质的叙述留给读者(处处改变符号即可).

问　　题

设 $x \rightarrow I(x)$ 是 $\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的开区间集的映射，使得 $I(x)$ 是中心为 x、长度 $\leqslant c$ 的开区间（c 是给定的 >0 的数）. 试证：对于 $\boldsymbol{R}$ 的每个闭区间 $[a, b]$，都存在 $[a, b]$ 的有限个点 x_i 使得：1° 区间 $I(x_i)$ 构成 $[a, b]$ 的覆盖；2° $I(x_i)$ 的长度之和 $\leqslant c+2(b-a)$.（证明：若对任意满足 $a \leqslant x<u<b$ 的区间 $[a, x]$ 定理为真，则存在 v，$u<v<b$，使得对任意这样的区间 $[a, y]$，满足 $a \leqslant y<v$，定理仍真. 然后考虑所有数 $u<b$ 的上确界，它使定理对任意区间 $[a, x]$，$a \leqslant x<u$，为真.）试证：对于每一个区间 $[a, b]$，存在 $c>0$，映射 I 和点 x_i 使得区间 $I(x_i)$ 构成 $[a, b]$ 的覆盖，并且 $I(x_i)$ 的长度之和等于 $c+2(b-a)$.

第三章 距离空间

这一章与第五章一起构成了本书的核心：在这两章中我们发展了即将用来表述分析结果的几何语言，它使我们能够把那些分析结果叙述得足够一般化以及对它们给出最简单、最清楚的证明．当具体到"通常的"三维空间时，本章所引进的大部分概念都具有非常直观的意义；有了在问题与以后几章中应用它们的一些经验以后，学生就会相信，只要有一定的防护，这种直观整个说来是极为可靠的响导，并且把它局限在古典应用的范围是可惜的．

本章几乎没有什么真正的定理；大部分结果都由定义直接推出，那些要稍加推敲的东西也决不是很深奥的．3.1 节到 3.13 节实质上是建立专门名词的，初学的读者可能觉得术语太多，特别是 3.5 节到 3.8 节．其实，这不过是反复叙述同一事物的各种说法而已；我们要运用这种明显的语言重复的理由见于应用之中：废除它（这在理论上是办得到的）常常引起表述上很大的困难与麻烦，并且实践证明，为更加明了而多记几个额外的术语是完全值得的．

本章出现的最重要的概念是完备性(3.4)，紧性(3.16 到 3.18)与连通性（3.19），它们在以后将反复用到，学生在继续学习以前，应当尽可能彻底地理解它们．

距离空间只构成一种特殊的"拓扑空间"，因此我们可以把这一章看成学习例如 Kelley[15] 与 Bourbaki[5] 的"一般拓扑学"的入门；如果我们在大多数问题中实现了用以定义距离空间的距离只起一种辅助作用，并能被"等价"距离所代替而大体上不影响研究中的现象，那么，据(3.12)的附注，这种推广的方法就会变得很明显．在第十二章中，我们将讨论一般拓扑的概念，而它在其后的章节中要用到．

1. 距离与距离空间

设 E 是一个集合. E 上的距离是指 $E \times E$ 到实数集 R 的具有下列性质的映射 d:

(I) 对 E 的任意一对元素 x, y, $d(x, y) \geqslant 0$.

(II) 关系 $d(x, y) = 0$ 等价于 $x = y$.

(III) 对 E 的任一对元素 x, y, $d(y, x) = d(x, y)$.

(IV) 对 E 的任意三个元素 x, y, z, 成立 $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (三角不等式).

用归纳法由 (IV) 推得: 对任意 $n > 2$

$$d(x_1, x_n) \leqslant d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n).$$

(3.1.1) 若 d 是 E 上的距离, 则对于 E 的任意三个元素 x, y, z, $|d(x, z) - d(y, z)| \leqslant d(x, y)$. 因为由 (III) 与 (IV) 推得

$$d(x, z) \leqslant d(y, z) + d(x, y)$$

且

$$d(y, z) \leqslant d(y, x) + d(x, z) = d(x, y) + d(x, z),$$

因此

$$-d(x, y) \leqslant d(x, z) - d(y, z) \leqslant d(x, y).$$

距离空间就是在其上给定了距离的集合 E.

在本章的一般论述中, 每当我们引进距离空间 E, E', E'' 时, 一般就用 d, d', d'' 表示 E, E', E'' 上的距离.

2. 距离的例子

(3.2.1) 函数 $(x, y) \to |x - y|$ 是实数集上的距离, 这立即由 (2.2.11) 推出; 我们把对应的距离空间称为实直线. 当把 R 看作距离空间而没有明确指出用什么距离时, 我们总按刚才定义的那个距离来理解.

(3.2.2) 在通常三维空间 $R^3 = R \times R \times R$ 中, 对任意二元素

$x=(x_1, x_2, x_3)$ 与 $y=(y_1, y_2, y_3)$，由

$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}$$

定义的通常“欧氏距离”显然满足公理 (I)，(II)，(III)；(IV) 可用直接的计算来证实.

(3.2.3) 在“实平面” $R^2=R\times R$ 中，对任意二元素 $x=(x_1,x_2)$ 与 $y=(y_1,y_2)$，定义

$$d(x, y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|;$$

公理 (I)，(II)，(III) 很容易验证，而 (IV) 可由(2.2.10)推得.

(3.2.4) 设 A 是一个集，$E=\mathscr{B}(A)$ 是 A 到 R 的有界映射的集(见 2.3). 则对 E 的任意两个函数 $f, g, f-g$ 也属于 E，因而数

$$d(f, g)=\sup_{t\in A}|f(t)-g(t)|$$

有定义. 映射 $(f, g)\to d(f, g)$ 是 E 上的距离；因为 (I) 与 (III) 是显然的，而 (IV) 立即由(2.3.9)与(2.3.8)推得；另一方面，若 $d(f, g)=0$，则对所有的 $t\in A$，$f(t)-g(t)=0$，这表示 $f=g$ (见 1.4)，于是得出 (II).

(3.2.5) 设 E 是任意集，定义 $d(x, y)=1$ 若 $x\neq y$；$d(x,x)=0$. 那么 (I)，(II)，(III) 均易证实；当三元素 x, y, z 中有两个相等时，(IV) 立即可得；否则我们有 $d(x, z)=1$，$d(x, y)+d(y,z)=2$，于是 (IV) 在每种情况下均满足. 在 E 上用这种距离定义的距离空间，称为**离散的**距离空间.

(3.2.6) 设 p 是素数；对任意自然数 $n>0$，我们定义 $v_p(n)$ 是 n 的素数分解式中 p 的指数，由定义立即推得：对任一对正整数，

(3.2.6.1) $v_p(nn')=v_p(n)+v_p(n')$.

其次设 $x=\pm r/s$ 是任意非零有理数，其中 r 与 s 是正整数；定义 $v_p(x)=v_p(r)-v_p(s)$；这个数不依赖于分数 x 的特殊表示式，这是立即由(3.2.6.1)推知的；这个关系式也证明，对任意一对非零有理数，都有

(3.2.6.2) $v_p(xy)=v_p(x)+v_p(y)$.

对任意一对有理数 x,y,，令 $d(x, y)=p^{-v_p(x-y)}$ 若 $x\neq y$，又

$d(x, x) = 0$；我们将证明这是有理数集 Q 上的距离（即所谓的"p 进距离"）．公理 (I)，(II) 与 (III) 立即由定义推得；此外，我们证明公理 (IV) 的下述加强形式：

(3.2.6.3) $d(x, z) \leqslant \max(d(x, y), d(y, z))$.

因为当元素 x, y, z 中有两个相等时，这个不等式是显然的，所以可以假定它们互不相同，于是我们必须证明：对于 $x \neq 0, y \neq 0$ 与 $x - y \neq 0$ 的任意有理数 x, y，有

(3.2.6.4) $v_p(x - y) \geqslant \min(v_p(x), v_p(y))$.

可以假定 $v_p(x) \geqslant v_p(y)$；利用 (3.2.6.2) 就使要证的关系式化为：对于满足 $z \neq 0, z \neq 1$ 与 $v_p(z) \geqslant 0$ 的任意有理数 z，

(3.2.6.5) $v_p(z - 1) \geqslant 0$.

但是，由定义，$z = \pm p^h r/s$，其中 $h \geqslant 0$，r 与 s 不能被 p 整除；因为 $z - 1$ 具有不能被 p 整除的分母，所以 (3.2.6.5) 可由 v_p 的定义推出．

其他的例子将在第 V，VI，VII 章中详细研究．

3. 等 距

设 E，E' 是两个距离空间，d，d' 分别是 E 与 E' 上的距离．我们称 E 到 E' 上的双射 f 为**等距**，如果对 E 的任一对元素，有

(3.3.1) $d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$;

于是逆映射 f^{-1} 就是 E' 到 E 上的等距．两个距离空间 E，E' 是**等距的**，如果存在 E 到 E' 上的等距．在 E 中证明的任意定理，如果只与 E 中元素间的距离有关，则它在任意等距空间 E' 中都立即产生一个对应的定理，这个对应的定理与定理中牵涉到 E 的元素在 f 下的象的距离有关．

现在设 E 是一个距离空间，d 是 E 上的距离，f 是 E 到集合 E' 上的双射(这里 E' 上毋需事先定义距离)；于是我们可以用公式 (3.3.1) 在 E' 上定义一个距离 d'，并且 f 就是 E 到 E' 上的等距．我们说 f 把距离 d' 从 E **转移**到 E' 上．

(3.3.2) 例. 广义实直线 $\bar{\boldsymbol{R}}$. 在 $\boldsymbol{R}$ 内由 $f(x)=x/(1+|x|)$ 定义的函数 f 是 $\boldsymbol{R}$ 到开区间 $I=]-1,+1[$ 上的双射，逆映射 g 由 $g(x)=x/(1+|x|)(|x|<1)$ 定义. 设 J 是闭区间 $[-1,+1]$,并设 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 是 $\boldsymbol{R}$ 与两个记为 $+\infty$ 和 $-\infty$(无穷远点)的新元素的并集；我们通过令 $f(+\infty)=+1, f(-\infty)=-1$ 把 f 延拓成 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 到 J 上的双射，仍用 g 记逆映射. 因为 J 关于距离 $|x-y|$ 是一个距离空间，所以可以应用上面所说的方法,通过令 $d(x,y)=|f(x)-f(y)|$ 而把 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 定义成一距离空间. 赋予这个距离的距离空间 $\bar{\boldsymbol{R}}$ (当考虑 $\boldsymbol{R}$ 的元素时，它们的距离与(3.2.1)中所定义的不同)称为**广义实直线**;注意，对于 $x\geqslant 0$, $d(+\infty,x)=1/(1+|x|)$, 对于 $x\leqslant 0$, $d(-\infty,x)=1/(1+|x|)$.

我们可以由 $x\leqslant y$ 等价于 $f(x)\leqslant f(y)$ 来定义 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 上的一个序关系;容易验证，对 $\boldsymbol{R}$ 中的 x, y, 这等价于在 $\boldsymbol{R}$ 上已经定义的那个序关系，此外对每个 $x\in\boldsymbol{R}$ 都有 $-\infty<x<+\infty$; 实数也称为 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 的有限元素.在第 II 章中遇见的只与序关系有关的所有性质与定义(除了一切涉及代数运算的东西以外)都能由映射 g 直接转移到 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 上. $\bar{\boldsymbol{R}}$ 的任意非空子集 A 对于上述那个序关系总是有界的，因而 $\sup A$ 与 $\inf A$ 有定义，但可以是 $+\infty$, $-\infty$ 与实数. $\sup\limits_{x\in A}u(x)$ 与 $\inf\limits_{x\in A}u(x)$ 的定义(对于集 A 到 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 里的任意映射 u) 可同样地给出,而且特别地,性质(2.3.5), (2.3.6), (2.3.7) 与(2.3.8)无改变地成立.

4. 球,球面,直径

在距离空间的理论中，使用由经典几何产生的几何语言是极为方便的. 距离空间的元素通常称为**点**. 给定具有距离 d 的距离空间 E,点 $a\in E$ 与实数 $r>0$,则中心为 a 半径为 r 的**开球**(相应地,**闭球**、**球面**)是集合 $B(a;r)=\{x\in E\mid d(a,x)<r\}$ (相应地, $B'(a;r)=\{x\in E\mid d(a,x)\leqslant r\}$, $S(a;r)=\{x\in E\mid d(a,x)=r\}$).

中心为 a 的开球与闭球总包含点 a，但是中心为 a 的球面却可能是空集(关于一般距离空间中球可能具有的奇特性质的例子，见3.8 节问题 4).

例. 在实直线上，中心为 a 半径为 r 的开球(相应地，闭球)是区间 $]a-r, a+r[$ (相应地，$[a-r, a+r]$)；中心为 a 半径为 r 的球面由两点 $a-r$，$a+r$ 组成. 在广义实直线 $\bar{R}$ 上，中心为 $+\infty$ 半径为 $r<1$ 的开球是区间 $](1-r)/r, +\infty]$. 在离散空间 E 中，中心为 a 半径为 $r<1$ 的球(开的或闭的)化为一点 a，相应的球面是空的；反之，若 $r \geqslant 1$，则 $B(a; r) = B'(a; r) = E$，而当 $r>1$ 时 $S(a; r) = \phi$，当 $r=1$ 时 $S(a; r) = E - \{a\}$.

设 A，B 是 E 的两个非空子集；A 到 B 的距离定义为非负数 $d(A, B) = \inf\limits_{x\in A, y\in B} d(x, y)$. 当 A 退化为一个点时，$d(A, B)$ 也可以写成 $d(x, B)$；据 (2.3.7)，我们有 $d(A, B) = \inf\limits_{x\in B} d(x, B)$. 若 $A\cap B \neq \phi$，则 $d(A, B)=0$，但是逆命题不一定成立. 更一般地，当 $d(A, B) = a$ 时，不一定存在一对点 $x\in A$，$y\in B$，使得 $d(x, y) = a$. 例如在实直线 $\boldsymbol{R}$ 上，设 A 是所有 $\geqslant 1$ 的整数的集，B 是形如 $n-\dfrac{1}{n}$ 的数的集，其中 n 是所有 $\geqslant 2$ 的整数；A 与 B 没有公共点，但是 $d\left(n, n-\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n}$ 可以任意小，于是 $d(A, B)=0$ (见 3.7 节问题 2).

(3.4.1) 若点 x 不属于球 $B(a; r)$ (相应地，$B'(a; r)$)，则 $d(x, B(a; r)) \geqslant d(a, x) - r$ (相应地，$d(x, B'(a; r)) \geqslant d(a, x) - r$).

事实上，由假设推知：$d(a, x) \geqslant r$；对任意 $y\in B(a; r)$ (相应地，$y\in B'(a; r)$)，据三角不等式，$d(x, y) \geqslant d(a, x) - d(a, y) \geqslant d(a, x) - r$.

(3.4.2) 若 A 是 E 的非空子集，x，y 是 E 的两个点，则

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant d(x, y).$$

因对每个 $z\in A$，$d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$，故据(2.3.8)与(2.3.10)有

$$d(x,A)=\inf_{z\in A}d(x,z)\leqslant\inf_{z\in A}(d(x,y)+d(y,z))=d(x,y)$$
$$+\inf_{z\in A}d(y,z)=d(x,y)+d(y,A).$$

同样地有 $d(y,A)\leqslant d(x,y)+d(x,A)$.

对 E 中任意非空集 A，A的**直径**定义为 $\delta(A)=\sup\limits_{x\in A,y\in B}d(x,y)$；它是一个正实数或$+\infty$；由 $A\subset B$ 可以推出 $\delta(A)\leqslant\delta(B)$. 当且仅当 A 是单点集时，关系 $\delta(A)=0$ 才成立.

(3.4.3) 对任意球，有 $\delta(B'(a;r))\leqslant 2r$.

因若 $d(a,x)\leqslant r$ 与 $d(a,y)\leqslant r$，则据三角不等式有 $d(x,y)\leqslant 2r$.

E 中的**有界集**是直径为有限数的非空集. 每一个球都是有界的. 如广义实直线 $\bar{R}$ 的例所示，整个空间 E 有界. 有界集的任意非空子集是有界的.

(3.4.4) 两个有界集 A，B 的并是有界的.

因为，若 $a\in A$，$b\in B$，又若 x，y 是 $A\cup B$ 中的任意两点，则或者 x 与 y 均在 A 中，而有 $d(x,y)\leqslant\delta(A)$，或者它们在 B 中，而有 $d(x,y)\leqslant\delta(B)$ 或者，例如 $x\in A$，$y\in B$，而据三角不等式有 $d(x,y)\leqslant d(x,a)+d(a,b)+d(b,y)$，因此

$$\delta(A\cup B)\leqslant d(a,b)+\delta(A)+\delta(B);$$

这对任意 $a\in A$，$b\in B$ 都是对的，据 $d(A,B)$ 的定义有

$$\delta(A\cup B)\leqslant d(A,B)+\delta(A)+\delta(B).$$

由此推知，若 A 是有界的，则对任意 $x_0\in E$，A 都含于以 x_0 为中心，以 $d(x_0,A)+\delta(A)$ 为半径的闭球中.

5. 开　集

在距离为 d 的距离空间 E 中，**开集**是具有下列性质的 E 的子集 A；对每个 $x\in A$，总存在 $r>0$ 使 $B(x;r)\subset A$. 空集是开集

(见 1.1);整个空间 E 是开集.

(3.5.1) 任意开球是开集.

因若 $x \in B(a; r)$, 则由定义 $d(a, x) < r$; 因而由关系 $d(x, y) < r - d(a, x)$ 推出 $d(a, y) \leqslant d(a, x) + d(x, y) < r$, 这就证明了包含关系 $B(x; r - d(a, x)) \subset B(a; r)$.

(3.5.2) 任意开集族 $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ 的并是开的.

因为若对于某个 $\mu \in L$, $x \in A_\mu$, 则存在 $r > 0$ 使得 $B(x; r) \subset A_\mu \subset A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$.

例如在实直线 $\boldsymbol{R}$ 上,任意区间 $]a + \infty[$ 是开的,因为它是所有那些 $x > a$ 的开集 $]a, x[$ 的并. 同样地 $]-\infty, a[$ 是开的.

(3.5.3) 有限个开集的交是开的.

只要证明两个开集 A_1, A_2 的交是开的,然后由归纳法证明就行了. 设 $x \in A_1 \cap A_2$, 则存在 $r_1 > 0$, $r_2 > 0$ 使得 $B(x; r_1) \subset A_1$, $B(x; r_2) \subset A_2$; 显然,若 $r = \min(r_1, r_2)$, 则 $B(x; r) \subset A_1 \cap A_2$.

一般地, 无穷个开集的交不再是开的; 例如, R 中的诸区间 $]-1/n, 1/n[$ 的交是单点集 $\{0\}$, 据 (2.2.16) 它不是开的. 然而有

(3.5.4) 离散空间中的任意集都是开的.

由于(3.5.2), 只要证明任意单点集 $\{a\}$ 是开的就够了. 但是据定义 $\{a\} = B(a; 1/2)$, 于是结果由(3.5.1)推出.

6. 邻 域

若 A 是 E 的非空子集, A 的**开邻域**是包含 A 的开集; A 的**邻域**是含有 A 的一个开邻域的任意集. 当 $A = \{x\}$ 时, 我们用点 x (而不是集 $\{x\}$) 的邻域一词.

(3.6.1) 对任意非空集 $A \subset E$, 任意 $r > 0$, 集合 $V_r(A) = \{x \in E \mid d(x, A) < r\}$ 是 A 的开邻域.

因若 $d(x, A) < r$ 且 $d(x, y) < r_1 - d(x, A)$, 则由 (3.4.2) 推知 $d(y, A) < d(x, A) + r - d(x, A) = r$, 于是 $V_r(A)$ 是开

的，并且显然包含 A.

当 $A=\{a\}$ 时 $V_r(A)$ 是开球 $B(a; r)$.

A 的基础邻域系是 A 的这样的邻域族 (U_λ)，使得 A 的任意邻域都包含这些集 U_λ 中之一. 对任意集 A，$V_r(A)$ $(r>0)$ 一般不构成 A 的基础邻域系(然而参看(3.17.11)). 由定义推得：

(3.6.2) 球 $B\left(a; \frac{1}{n}\right)$ (n 是整数 >0)，构成 a 的基础邻域系.

(3.6.3) A 的有限个邻域的交是 A 的邻域.

这直接由(3.5.3)推得.

(3.6.4) 集 A 是它的每个点的邻域的充要条件是 A 为开的.

这个条件显然是充分的；反之，若 A 是每个 $x\in A$ 的邻域，则对每个 $x\in A$，都存在包含 x 的开球 $U_x\subset A$. 由关系 $x\in U_x\subset A$ 我们推得，$A=\bigcup_{x\in A}\{x\}\subset\bigcup_{x\in E}U_x\subset A$. 于是由 (3.5.2) $A=\bigcup_{x\in A}U_x$ 是开集.

问　　题

在实直线上，证明由所有 $\geqslant 0$ 的整数构成的子集 N 没有可数的基础邻域系(用反证法，并应用下面的附注：若 (a_{mn}) 是一个 >0 的双重数列，令 $b_n=a_{nn}/2$，则序列 (b_n) 对任意整数 m 都不能使不等式 $b_n\geqslant a_{mn}$ 对所有的 n 成立).

7. 集 的 内 部

点 x 称为集 A 的**内点**，如果 A 是 x 的邻域. A 的所有内点的集称为 **A 的内部**，记为 $\mathring{A}$. 例如在实直线 $\boldsymbol{R}$ 上，始点为 a 终点为 $b(a<b)$ 的任意区间的内部是开区间 $]a, b[$；因 a 或 b 都不能成为区间 $[a, b]$，$[a, b[$ 与 $]a, b]$ 的内点，理由是：任何以 a 或 b 为中心的区间都不含于上述三个区间中.

(3.7.1) 对任意集 A，$\mathring{A}$ 是含于 A 中的最大的开集.

因若 $x\in A$，则存在包含 x 的开集 $U_x\subset A$，对每个 $y\in U_x$，据定义 A 是 y 的邻域，故 $y\in \mathring{A}$，从而 $U_x\subset \mathring{A}$，据(3.6.4)，就证明 $\mathring{A}$ 是开的. 反之，若 $B\subset A$ 是开的，则据定义，显然有 $B\subset \mathring{A}$. 因此，开集由关系 $A=\mathring{A}$ 刻画出来.

(3.7.2) 如果 $A\subset B$，那么 $\mathring{A}\subset \mathring{B}$.

此论断由(3.7.1)立得.

(3.7.3) 对任意两个集 A，B，$\overset{\circ}{\widehat{A\cap B}}=\mathring{A}\cap \mathring{B}$.

包含关系 $\overset{\circ}{\widehat{A\cap B}}\subset \mathring{A}\cap \mathring{B}$ 由(3.7.2)推知；另一方面，据(3.5.3)与(3.7.1)，$\mathring{A}\cap \mathring{B}$ 是开的，且含于 $A\cap B$ 中，于是据(3.7.1) $\mathring{A}\cap \mathring{B}\subset \overset{\circ}{\widehat{A\cap B}}$.

非空集的内部可能是空的；例如 R 上的单点集就是这样. $E-A$ 的内点称为 A 的**外点**，$E-A$ 的内部称为 **A 的外部**.

(3.7.4) 点 $x\in E$ 为 A 的外点的充要条件是 $d(x,A)>0$.

因由此条件推出 $B(x;d(x,A))\subset E-A$，故 x 是 $E-A$ 的内点；反之，若 x 是 A 的外点，则存在球 $B(x;r)$ $(r>0)$ 含于 $E-A$ 中；因此，对于任意 $y\in A$，都有 $d(x,y)\geqslant r$，于是 $d(x,A)\geqslant r$.

8. 闭集，触点，集的闭包

在距离空间 E 中，**闭集**定义为开集的余. 空集是闭的，整个空间 E 也是闭的. 在实直线 $\boldsymbol{R}$ 上，区间 $[a,+\infty[$ 与 $]-\infty,a]$ 都是闭集；整数集 $\boldsymbol{Z}$ 也是闭集；区间 $]a,b[$ 与 $]a,b]$ 既不是开集也不是闭集.

(3.8.1) 闭球是闭集，球面是闭集.

因若 $x\notin B'(a;r)$，则据(3.4.1) $d(x,B'(a;r))\geqslant d(a,x)>0$，于是以 x 为中心、$d(a,x)-r$ 为半径的开球在 $B'(a;r)$ 的余中. 这就证明这个余是开的. 球面 $S(a;r)$ 的余是球 $B'(a;r)$ 的

余与球 $B(a; r)$ 的并，于是由(3.5.2)它是开的.

(3.8.2) 任意闭集族的交是闭的.

(3.8.3) 有限个闭集的并是闭的.

这立即由考虑余集而分别由 (3.5.2) 与 (3.5.3) 推出 (见公式(1.2)与(1.8.1)).

特别地，单点集 $\{x\}$ 是闭的.

(3.8.4) 离散空间中每个集都是闭的.

这可由(3.5.4)立即推出.

E 中子集 A 的**触点**是这样的点 $x\in E$，使得 x 的每个邻域与 A 的交非空. A 的所有触点的集称为 A 的**闭包**，记为 $\bar{A}$. 因此，说 x 不是 A 的触点就意味着它是 $E-A$ 的内点，换句话说：

(3.8.5) 集 A 的闭包是 A 的外部的余.

开球 $B(a; r)$ 的闭包含于闭球 $B'(a; r)$ 中，但可以不同于闭球. 若实直线上子集 A 是有上界的(相应地，有下界的) 则 $\sup A$ (相应地，$\inf A$) 是 A 的触点，这是由(2.3.4)推知的.

由于(3.8.5)，据 3.7 节对内点与内部所证明的那些性质并应用布尔代数公式，我们可看出触点与闭包的下列四条性质：

(3.8.6) 对于任意集 A，$\bar{A}$ 是包含 A 的最小闭集.

特别地，闭集由关系 $A=\bar{A}$ 刻画出来.

(3.8.7) 若 $A\subset B$，则 $\bar{A}\subset\bar{B}$.

(3.8.8) 对于任意一对集 A, B, $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

(3.8.9) 点 x 是 A 的触点的充要条件是 $d(x, A)=0$.

(3.810) 集 A 的闭包是 A 的一切开邻域 $V_r(A)$ 的交.

这不过是(3.8.9)的改述.

(3.8.11) 在距离空间 E 中，任意闭集是递减开集序列的交；任意开集是递增闭集序列的并.

通过考虑开集 $V_{1/n}(A)$ 就可证明第一论断；由第一论断通过考虑余集就可推出第二论断.

(3.8.12) 若 A 的触点 x 不属于 A，则 x 的任意邻域 V 都使 $V\cap A$ 为无穷集.

假定相反，则令 $V \cap A = \{y_1, \cdots, y_n\}$，由假设，$r_k = d(x, y_k) > 0$. 设 $r > 0$ 是使得 $B(x;r) \subset V$ 且 $r < \min(r_1, \cdots, r_n)$ 的实数；则 A 与 $B(x; r)$ 的交是空的. 与假设矛盾.

点 $x \in E$ 称为集 A 的**边缘点**，如果它同时是 A 与 CA 的触点；A 的所有边缘点的集 $\mathrm{Fr}(A)$ 称为 **A 的边缘**. 显然 $\mathrm{Fr}(A) = \bar{A} \cap \overline{CA} = \mathrm{Fr}(CA)$；据(3.8.6)，$\mathrm{Fr}(A)$ 是闭集，它可能是空的(见(3.19.9))．A 的边缘点 x 由下列性质刻画：x 的任意邻域中都至少有 A 的一个点与 CA 的一个点．整个空间 E 是 A 的内部、外部与边缘的并，因为，若 x 的一个邻域既不含于 A 中也不含于 CA 中，则它必定同时包含着两者的点；而这三个集中的任意两个都没有公共点.

$\boldsymbol{R}$ 中起点为 a 终点为 b 的任意区间的**边缘**是集 $\{a, b\}$；$\boldsymbol{R}$ 中集 $\boldsymbol{Q}$ 的边缘是 $\boldsymbol{R}$ 本身.

问　　题

1) a) 设 A 是距离空间 E 中的开集；证明对于 E 的任意子集 B，$A \cap \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$.

b) 在实直线上举出开集 A, B 的例子，使得四个集 $A \cap \bar{B}$, $B \cap \bar{A}$, $\overline{A \cap B}$ 与 $\bar{A} \cap \bar{B}$ 互不相同.

c) 在实直线上，举出两个区间 A, B 的例子，使 $A \cap \bar{B}$ 不含于 $\overline{A \cap B}$ 中.

2) 对于距离空间 E 的每个子集 A，令 $\alpha(A) = \mathring{\bar{A}}$ 与 $\beta(A) = \overline{\mathring{A}}$.

a) 试证：若 A 是开的，则 $A \subset \alpha(A)$；若 A 是闭的，则 $A \supset \beta(A)$.

b) 试证：对于 E 的每个子集 A，$\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$ 及 $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$ (利用 a)).

c) 在实直线上举出这样的集 A 的例子，使得如下七个集：A, $\mathring{A}$, $\bar{A}$, $\alpha(A)$, $\beta(A)$, $\alpha(\mathring{A})$, $\beta(\bar{A})$ 互不相同，并且除了关系 $\mathring{A} \subset A \subset \bar{A}$, $\alpha(\mathring{A}) \subset \alpha(A)$ $\beta(A) \subset \beta(\bar{A})$, $(\mathring{A}) \subset \alpha(\mathring{A}) \subset \beta(\bar{A}) \subset \bar{A}$, $\mathring{A} \subset \alpha(A) \subset \beta(\bar{A}) \subset \bar{A}$ 外，没有任何其他包含关系.

3) 设 E 是距离空间.

a) 试证：对 E 的每个子集 A，$\mathrm{Fr}(\bar{A}) \subset \mathrm{Fr}(A)$，$\mathrm{Fr}(\mathring{A}) \subset \mathrm{Fr}(A)$，且(在实直线上)举出这三个集互不相同的一些例子.

b) 设 A, B 是 E 的两个子集. 试证：$\mathrm{Fr}(A \cup B) \subset \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$，且(在

实直线上)举出这两个集不相同的例子. 若 $\bar{A}\cap\bar{B}=\phi$, 证明: $\mathrm{Fr}(A\cup B)=\mathrm{Fr}(A)\cup\mathrm{Fr}(B)$.

c) 若 A 与 B 是开的,试证:

$$(A\cap\mathrm{Fr}(B))\cup(B\cap\mathrm{Fr}(A))\subset\mathrm{Fr}(A\cap B)\subset(A\cap\mathrm{Fr}(B))\cup(B\cap\mathrm{Fr}(A))\cup(\mathrm{Fr}(A)\cap\mathrm{Fr}(B)).$$

且(在实直线上)举出这三个集互不相同的例子.

4) 设 d 是集 E 上的距离,对于 E 中的 x, y, z, 满足**超距不等式**:

$$d(x,z)\leqslant\max(d(x,y), d(y,z))$$

(见例子(3.2.6)).

a) 试证: 若 $d(x,y)\neq d(y,z)$, 则 $d(x,z)=\max(d(x,y), d(y,z))$.

b) 试证: 任意开球 $B(x;r)$ 既是开集又是闭集,而且对于任意 $y\in B(x;r)$, 都有 $B(y;r)=B(x;r)$.

c) 试证: 任意闭球 $B'(x;r)$ 既是开集又是闭集, 而且对任意 $y\in B'(x;r)$, 都有 $B'(y;r)=B'(x;r)$.

d) 若 E 中两球有一个公共点,则其中一个含于另一个中.

e) 半径为 r 的两个不同的开球,如果都含于一个半径为 r 的闭球中,则它们之间的距离等于 r.

9. 稠密子集;可分空间

在距离空间 E 中,我们称集 A 对于集 B **是稠密的**,如果 B 的任意点都是 A 的触点,换句话说,如果 $B\subset\bar{A}$ (或者, 等价地, 若对每个 $x\in B$, x 的任意邻域都包含 A 的点).

(3.9.1) 若 A 对于 B 是稠密的, B 对于 C 是稠密的,则 A 对于 C 也是稠密的.

因为据(3.8.6)由关系 $B\subset\bar{A}$ 推知 $\bar{B}\subset\bar{A}$, 又因由假设 $C\subset\bar{B}$, 所以有 $C\subset\bar{A}$.

对于 E 稠密的集 A 称为在 E 中**处处稠密的**, 或简称在 E 中**稠密的**; 这种集由下述事实刻画: 即 $\bar{A}=E$, 或者等价地, 每个非空开集都包含 A 的点. 距离空间 E 称为**可分的**, 如果存在一个在 E 中稠密的至多可数集.

(3.9.2) 实直线 R 是可分的.

事实上，据 (2.2.16)，有理数集 $\boldsymbol{Q}$ 是在 $\boldsymbol{R}$ 中稠密的，又据 (2.2.15)，$\boldsymbol{Q}$ 是可数的.

非空开集族 $(G_\lambda)_{\lambda\in L}$ 称为距离空间 E 的开集的**基**，如果 E 的每个非空开集都是族 (G_λ) 的子族的并.

(3.9.3) 族 $(G_\lambda)_{\lambda\in L}$ 为基的充要条件是，对每个 $x\in E$ 与 x 的每个邻域 V，都存在附标 λ，使得 $x\in G_\lambda\in V$.

这个条件是必要的，因为据定义存在 x 的开邻域 $W\subset V$，又因 W 是某些集 G_λ 的并，故至少存在一个附标 μ 使得 $x\in G_\mu$. 条件是充分的，因为，若条件满足且 U 是任意开集，则对每个 $x\in U$，(由 (1.4.5)) 都存在 $\mu(x)$ 使得 $x\in G_{\mu}(x)\subset U$，于是 $U\subset \bigcup\limits_{x\in U} G_\mu(x)$ $\subset U$.

(3.9.4) 距离空间 E 可分的充要条件是，存在 E 的一个至多可数的开集的基.

条件是充分的，因若 (G_n) 是一个基，a_n 是 G_n 的一个点，则每个非空开集都是某些 G_n 的并，于是它与 a_n 组成的至多可数集的交是不空的. 反之，假设存在 E 中点的序列 (a_n) 使得该序列点的集是稠密的；则开球 $B(a_n;\ 1/m)$ 的族(据(1.9.3) 与(1.9.2) 知它是至多可数的) 是 E 的开集的基. 事实上，对每个 $x\in E$ 与每个 $r>0$，都存在附标 m 使得 $1/m<r/2$，及附标 n 使得 $a_n\in B(x;\ 1/m)$. 由此推知 $x\in B(a_n;\ 1/m)$；另一方面，若 $y\in B(a_n;1/m)$，则 $d(x,y)\leqslant d(x,a_n)+d(a_n,y)\leqslant 2/m<r$，因此 $B(a_n;\ 1/m)\subset B(x;\ r)$，这就完成了证明(据(3.9.3)).

问　　题

1) 试证：在距离空间 E 中，开子集与它的外部的并是处处稠密的.

2) 设 A 为距离空间 E 的子集，我们称点 $x\in A$ 是**孤立的**，如果存在 x 在 E 中的邻域 V 使得 $V\cap A$ 退化为点 x.

a) 试证：在可分距离空间 E 中，所有点都是孤立点的这样子集是至多

可数的.

b）试证：在可分距离空间E中，如果任意非空开集的族 $(U_\lambda)_{\lambda\in L}$ 满足：只要$\lambda\neq\mu$时，$U_\lambda\cap U_\mu=\phi$，则它就是至多可数的.

3）设A是实直线的非空子集，B是满足下述条件的点$x\in\bar{A}$的集：存在$y>x$使得区间$]x, y[$与A的交是空的．试证B是至多可数的．（证明B对等于一个开区间的集，而这个集中的任意两个区间都没有公共点）.

4）设E是可分距离空间，E的子集A的**凝点**x是这样的点$x\in E$：使得在x的每个邻域内，都存在A的不可数点集．试证：

a）若A没有凝点，则它是可数的（考虑A与E的开集基中的那些集的交）.

b）若B是集A的凝点的集合，试证B的每个点都是它自己的凝点，而且 $A\cap(CB)$ 是至多可数的（注意B是闭的，并应用 a)）.

5）试证：由可分距离空间的每个开覆盖中，都能取出一个可数的开覆盖.

6）设E是可分距离空间，f是E到R的任一映射．我们称f在点$x_0\in E$达到相对极大值（相应地，严格相对极大植），如果存在x_0的邻域V，使得对于x_0以外的任意点$x\in V$都有$f(x)\leqslant f(x_0)$（相应地，$f(x)<f(x_0)$）．试证：E中使f达到严格相对极大值的点的集M是至多可数的（设(U_n)是E的开集的基，考虑n的这些值：存在唯一一点$x\in U_n$，使$f(x)$等于它在U_n中的上确界）.

7）设E是一个可分距离空间，$\mathscr{F}$是E中非空开集的不可数集合，试证：至少存在E的一个点属于$\mathscr{F}$的不可数无穷集．（可归结为：存在$\mathscr{F}$到E的双射$A\to p_A$使得对每个$A\in\mathscr{F}$，有$p_A\in A$．证明存在$\alpha>0$与$\mathscr{F}$的不可数子集$\mathscr{G}$使得对于$A\in\mathscr{G}$，有$B(p_A;\alpha)\subset A$．最后用反证法证明，对不可数无穷集$A\in\mathscr{G}$，至少存在一个点$x\in E$属于$B(p_A;\alpha)$）.

10. 距离空间的子空间

设F是距离空间E的非空子集；映射 $(x, y)\to d(x, y)$ 在$F\times F$上的限制显然是F上的距离，我们说它是由E上的距离d**导出的**（在F上）．由这个导出距离定义的距离空间F称为距离空间E的**子空间**.

(3.10.1) 集 $B \subset F$ 为子空间 F 中的开集的充要条件是存在 E 中的开集 A，使得 $B = A \cap F$.

若 $a \in F$，则 $F \cap B(a; r)$ 是子空间 F 中以 a 为中心 r 为半径的开球. 若 A 是 E 中的开集且 $x \in A \cap F$，则存在 $r > 0$，使得 $B(x; r) \subset A$，于是 $x \in F \cap B(x; r) \subset A \cap F$，这说明 $F \cap A$ 在 F 中是开的. 反之，若 B 是子空间 F 中的开集，则对每个 $x \in B$，都存在数 $r(x) > 0$，使得 $F \cap B(x; r(x)) \subset B$. 于是 $B = \bigcup_{x \in B} (F \cap B(x; r(x))) = F \cap A$，其中 $A = \bigcup_{x \in B} B(x; r(x))$，据 (3.5.1) 与 (3.5.2) A 是在 E 中开的.

(3.10.2) F 中每个开子集 B 在 E 中也为开集的充要条件是，F 在 E 中为开的.

取 $B = F$ 可知条件是必要的；由于(3.10.1)与(3.5.3)，条件是充分的.

(3.10.3) 设 $x \in F$，则 F 的子集 W 为 x 在 F 中的邻域的充要条件是 $W = V \cap F$，其中 V 为 x 在 E 中的邻域.

(3.10.4) 点 $x \in F$ 在 F 中的每个邻域为 x 在 E 中邻域的充要条件是，F 为 x 在 E 中的一个邻域.

这两个性质由(3.10.1)与邻域的定义立即推出.

(3.10.5) 集 $B \subset F$ 为在子空间 F 中闭的充要条件是存在 E 中的闭集 A 使得 $B = A \cap F$.

我们说 B 是在 F 中闭的，意即 $F - B$ 是在 F 中开的，因此据(3.10.1)这就等价于存在 E 中的开集 C，使得 $F - B = C \cap F$；但据(1.2.9)这个关系等价于 $B = F \cap (E - C)$，于是得到所证的结果.

(3.10.6) F 中的每个子集 B 为在 F 中闭的充要条件是，F 在 E 中为闭的.

这个证明与 (3.10.2) 的证明一样，要用的定理是 (3.10.5) 与 (3.8.2).

(3.10.7) F 的子集 B 对于 F 的闭包等于 $\bar{B}\cap F$，其中 $\bar{B}$ 是 B 在 E 中的闭包.

事实上，对 $x\in F$ 在 E 中的每个邻域 V，都有 $V\cap B=(V\cap F)\cap B$，因此，结果由(3.10.3)与触点的定义推出.

(3.10.8) 设 F 是 E 的稠密子集，则对于每个点 $x\in F$ 与 x 在 F 中的每个邻域 W，都有：W 在 E 中的闭包 $\overline{W}$ 是 x 在 E 中的邻域.

据定义，存在 x 在 E 中的开邻域 U 使 $U\cap F\subset W$；只要证明 $U\subset\overline{W}$ 就行了. 但若 $y\in U$ 且 V 是 y 在 E 中的任意邻域，则 $U\cap V$ 也是 y 在 E 中的邻域，于是 $F\cap(U\cap V)$ 非空，这就表示 $(F\cap U)\cap V$ 非空，也就是 $y\in\overline{F\cap U}\subset\overline{W}$.

(3.10.9) 可分距离空间的任意子空间是可分的.

事实上，若 (G_n) 是 E 的至多可数的开集基，则由(3.10.1)与(1.8.2)，这些集合 $G_n\cap F$ 便构成 $F\subset E$ 的可数的开集基. 于是由(3.9.4)便得到所需的结果.

(3.10.10) 设 A 是距离空间 E 的子集；$x_0\in A$ 称为 A 的**孤立点**，如果存在 x_0 在 E 中的邻域 V，满足 $V\cap A=\{x_0\}$. 我们说 A 的每个点在 A 中是孤立的，表示在子空间 A 中每个子集都是开集(换句话说，子空间 A 与一离散空间(见 3.12)同胚). 在可分距离空间中，其点都是孤立点的子集是至多可数的(3.9.4).

问　题

1) 设 B,B' 是距离空间 E 的两个非空子集，A 是 $B\cap B'$ 的子集，它对于 B 与 B' 都是开的(相应地，闭的)，试证明 A 对于 $B\cup B'$ 是开的(相应地，闭的).

2) 设 (U_α) 是距离空间 E 的由开集组成的覆盖. 则 E 的子集 A 在 E 中为闭的充要条件是，每个集 $A\cap U_\alpha$ 对于 U_α 都是闭的.

3) 在距离空间 E 中，我们说子集 A 是**局部闭的**，如果对每个 $x\in A$，都存在 x 的邻域 V，使得 $V\cap A$ 对于 V 是闭的. 试证 E 的局部闭子集是 $U\cap F$ 这样的集：其中 U 是在 E 中开的，F 是在 E 中闭的.（应用问题 2 去证明局部闭集具有那种形式.）

4) 举出平面 R^2 的子空间 E 的例子，使得在 E 中存在开球，它是闭集，但

非闭球；又存在闭球，它是开集，但非开球．（取 E 由两点$(0, 1)$与$(0, -1)$以及 x 轴的适当子集组成）．

5）不用基的概念给出(3.10.9)的一个证明（换句话说，找出在子空间中稠密的至多可数子集．）

11. 连 续 映 射

设E与E'是两个距离空间，d与d'是E与E'上的距离．我们称E到E'的映射 f **在点** $x_0\in E$ **是连续的**，如果对于 E' 中 $f(x_0)$ 的每个邻域 V'，在E中总存在 x_0 的邻域V使得 $f(V)\subset V'$；我们称 f **在E中是连续的**（或简称"连续的"），如果它在E的每一点都是连续的．

如果我们容许数学上的邻域概念对应于直观的"接近"概念，则可以用下面的说法更直观地表述上面的定义，即 $f(x)$ 可任意靠近 $f(x_0)$，只要 x 足够靠近 x_0．

(3.11.1) f 在 $x_0\in E$ 连续的充要条件是：对于 $f(x_0)$ 在 E' 中的每一个邻域 V'，$f^{-1}(V')$ 都是 x_0 在E中的邻域．

(3.11.2) f 在 $x_0\in E$ 连续的充要条件是：对每个 $\varepsilon>0$，都存在 $\delta>0$ 使得只要 $d(x_0, x)<\delta$ 就有 $d'(f(x_0), f(x))<\varepsilon$．

这两个定理都不过是定义的改述而已．

E的子空间F到E中的自然单射 j_F：$F\to E$ (1.6.1) 是连续的．任意常值映射是连续的．

(3.11.3) 若 $x_0\in E$ 是集 $A\subset E$的触点，又若 f 在点 x_0 连续，则 $f(x_0)$ 是 $f(A)$ 的触点．

因为，若 V' 是 $f(x_0)$ 在 E' 中的任意邻域，则 $f^{-1}(V')$ 是 x_0 在E中的邻域，于是存在 $y\in A\cap f^{-1}(V')$，因而 $f(y)\in f(A)\cup V'$．

(3.11.4) 设 f 是E到 E' 的映射，则下列性质是等价的：

a) f 是连续的；

b) 对于 E' 中的每个开集 A'，$f^{-1}(A')$ 是E中的开集；

c) 对于 E' 中的每个闭集 A'，$f^{-1}(A')$ 是E中的闭集；

d) 对于E中的每个集A，$f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$.

我们在(3.11.3)中已看到a)⇒d). d)⇒c)，因若A'是闭的且$A=f^{-1}(A')$，则$f(\overline{A})\subset\overline{A}'=A'$，于是$\overline{A}\subset f^{-1}(A')=A$；又因$A\subset\overline{A}$，所以$A$是闭的．据闭集的定义与公式(1.5.13)，得c)⇒b)．最后b)⇒a)，因为若V'是$f(x_0)$的任意邻域，则存在$f(x_0)$的开邻域$W'\subset V'$；$f^{-1}(W')$是包含x_0的开集且含于$f^{-1}(V')$中，于是据(3.11.1)，f在每个点x_0都是连续的．

必须注意，开(相应地，闭)集在连续映射下的直接象一般不是开(相应地，闭)集；例如，$x\to x^2$在$\boldsymbol{R}$中是连续的，但开集$]-1,+1[$的象$[0,1[$不是开的；$x\to 1/x$在$\boldsymbol{R}$的子空间$E=[1,+\infty]$中是连续的，但是闭集E的象是区间$]0,1]$，它不是$\boldsymbol{R}$中的闭集(然而可参看(3.17.9)与(3.20.13))．

(3.11.5) 设f是距离空间E到距离空间E'的映射，g是E'到距离空间E''的映射；若f在x_0连续，g在$f(x_0)$连续，则$h=g\circ f$在x_0连续．若f在E中连续，g在E'中连续，则h在E中连续．

第二论断显然可由第一论断推出．设W''是$h(x_0)=g(f(x_0))$的任意邻域，则据(3.11.1)与假设，$g^{-1}(W'')$是$f(x_0)$在E'中的邻域，而$f^{-1}(g^{-1}(W''))$是x_0在E中的邻域；但是$f^{-1}(g^{-1}(W''))=h^{-1}(W'')$．**特别地，**

(3.11.6) 若f是E到E'的映射且在x_0连续，又F是包含x_0的E的子空间，则f在F上的限制在x_0连续．

因为这个限制就是映射$f\circ j_F$，它是F到E中的自然单射，因而是连续的．

然而要注意，$E\to E'$的映射f在子空间F上的限制可以是连续的，即使f不是在E的任意点都连续；例子由$\boldsymbol{R}$到$\boldsymbol{R}$的下述映射f给出：它在有理点集$\boldsymbol{Q}$上等于0，在$\boldsymbol{Q}$的余集上等于1(即“Dirichlet 函数”)；f在$\boldsymbol{Q}$上的限制是常值的，因而是连续的．

E到E'的**一致连续映射**是满足下述条件的映射，对每个$\varepsilon>0$，都存在$\delta>0$，使得只要$d(x,y)<\delta$就有$d'(f(x),f(y))$

$<\varepsilon$. 从这个定义与(3.11.2)可以推出:

(3.11.7) 一致连续映射是连续的.

一般地,逆命题不真: 例如,函数 $x \to x^2$ 在 $\boldsymbol{R}$ 中不一致连续,因为对给定的 $\alpha>0$, 差 $(x+\alpha)^2-x^2=\alpha(2x+\alpha)$ 能取到任意大的值(然而可参看(3.16.5)).

前面举出的例子(常值映射,自然单射)都是一致连续的.

(3.11.8) 对于E的任意非空子集A, $x \to d(x, A)$ 是一致连续的.

这由定义与(3.4.2)推出.

(3.11.9) 若 f 是 E 到 E' 的一致连续映射, g 是 E' 到E''的一致连续映射. 则 $h=g\circ f$ 是一致连续的.

事实上,任意给定 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得只要 $d'(x',y')<\delta$, 就有 $d''(g(x'), g(y'))<\varepsilon$; 其次存在 $\eta>0$, 使得只要 $d(x, y)<\eta$, 就有 $d'(f(x), f(y))<\delta$; 因此, 只要 $d(x, y)<\eta$, 就有 $d''(h(x), h(y))<\varepsilon$.

问　　题

1) 设 f 是距离空间 E 到距离空间 E' 的映射,试证下列性质等价:

a) f 连续;

b) 对于 E' 的每个子集 A', $f^{-1}(\mathring{A}')\subset(f^{-1}(A'))^\circ$;

c) 对于 E' 的每个子集 A', $\overline{f^{-1}(A')}\subset f^{-1}(\bar{A}')$;

举出一个连续映射 f 与子集 $A'\subset E'$ 的例子,使得 $f^{-1}(\bar{A}')$ 不是 $f^{-1}(A')$的闭包.

2) 对于任意距离空间E,任意数 $r>0$ 与 E 的任意子集 A,使得 $d(x,A)\leqslant r$ 的点 $x\in E$ 的集合 $V'_r(A)$ 是闭的(应用(3.11.8)).

3) 在距离空间 E 中,设 A, B 是两个非空子集,满足 $A\cap\bar{B}=\bar{A}\cap B=\phi$. 试证: 存在开集$U\supset A$与开集 $V\supset B$, 使得 $U\cap V=\phi$ (考虑函数 $x\to d(x, A)-d(x,B)$).

4) 设 f 是 $\boldsymbol{R}$到自身的连续映射.

a) 试证: 若 f 在 R 中连续, 则存在二个实数 $\alpha\geqslant0$, $\beta\geqslant0$, 使对每个 $x\in\boldsymbol{R}$, 有 $|f(x)|\leqslant\alpha|x|+\beta$.

b) 试证：若 f 在 $\boldsymbol{R}$ 中单调且有界，则 f 在 $\boldsymbol{R}$ 中连续。

12. 同胚。等价距离

距离空间 E 到距离空间 E' 的映射 f 称为**同胚**，如果：1° 它是双映射；2° f 与它的逆映射 f^{-1} 都连续。我们也说这样的映射是**双连续的**。这时逆映射 f^{-1} 是 E' 到 E 的同胚。若 f 是 E 到 E' 的同胚，g 是 E' 到 E'' 的同胚，则由(3.11.5) $g\circ f$ 是 E 是 E'' 的同胚。同胚可以是不一致连续的(例如 $\boldsymbol{R}$ 到其自身的同胚 $x\to x^3$)。两个距离空间 E，E' 是**同胚的**，如果有 E 到 E' 的同胚存在。若两个空间都同胚于第三个空间，则它们是同胚的。说得随便点，与离散距离空间(3.2.5)同胚的空间也称为离散空间，即使它的距离不象 (3.2.5) 那样定义。

据定义，等距总是一致连续的，因此是同胚。例如，据定义，广义实直线 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 同胚于 $\boldsymbol{R}$ 的子空间 $[-1, 1]$。

设 d_1，d_2 是集 E 上的两个距离；这就在 E 上定义两个距离空间，我们一定要把它们看做不相同的(虽然它们有同一个"基本集")；设 E_1，E_2 是这两个空间。若 E_1 到 E_2 上的恒等映射 $x\to x$ 是同胚，则 d_1，d_2 称为 E 上的**等价距离**(或**拓扑等价距离**)；据(3.11.4)，我们知道这表示 E_1 与 E_2 中开集的族是相同的。距离空间 E 的开集族通常称为 E 的**拓扑**；因此等价距离就是产生相同拓扑的那些距离。这里我们可以指出：邻域、闭集、触点、闭包、内部、外部、稠集、边缘、连续函数等定义都只取决于所考虑空间的拓扑；因此，它们是**拓扑概念**；另一方面，球、球面、直径、有界集、一致连续函数等概念都不是拓扑概念。距离空间的拓扑性质是在同胚下不变的性质。

用上述记号，我们可能遇到：E_1 到 E_2 的恒等映射 $x\to x$ 是连续的但不是双连续的情形。例如，取 $E=\boldsymbol{R}$，$d_2(x, y)=|x-y|$ 而把 $d_1(x, y)$ 取为 (3.2.5) 中定义的仅取值 0 与 1 的距离。在这种情形下，我们说距离 d_1 (相应地，E_1 的拓扑) 比距离 d_2 (相应

地，E_2 的拓扑)是更精的.

问　　题

1) 设 $a>0$ 是无理数；对每个有理数 $x>0$，令 $f_a(x)$ 是满足下列条件的唯一确定的实数：$0<f_a(x)<a$ 而且 $x-f_a(x)$ 是 a 的整数倍. 试证：f_a 是正有理数空间 Q_+^* 到 R 的区间$]0,a[$的连续单射，而且 $f_a(Q_+^*)$ 是在$]0,a[$中稠的. 据上述结果与2.2节的问题证明：存在 Q 到它自身的连续双射，它不是双连续的(比较(4.2.2)).

2) 设 f 是距离空间 E 到距离空间 F 的连续映射.

a) 设 (V_λ) 是 F 的由开子集组成的复盖，试证：若对每个 λ，f 在 $f^{-1}(V_\lambda)$ 的限制都是 E 的子空间 $f^{-1}(V_\lambda)$ 到 F 的子空间 V_λ 上的同胚，则 f 是 E 到 F 上的同胚.

b) 举出非单射映射 f 与 E 的由开子集组成的复盖 (U_α) 的例子，使得 f 在每个 U_α 上的限制都是 E 的子空间 U_α 到 F 的子空间 $f(U_\alpha)$ 的同胚(我们可以把 E 与 F 都取成离散的).

3) 设 E, F, G 是三个距离空间，f 是 E 到 F 的连续映射，g 是 F 到 G 上的连续映射. 试证：若 f 是满射的，$g\circ f$ 是 E 到 G 上的同胚，则 f 是 E 到 F 上的同胚，g 是 F 到 G 上的同胚.

13. 极　　限

设 E 是距离空间，A 是 E 的子集，a 是 A 的触点. 先假定 a 不属于 A. 那么，设 f 是 A 到距离空间 E' 的映射，我们称 $f(x)$ **当 $x\in A$ 趋于 a 时有极限** $a'\in E'$ (或者说 a' 是 f 在点 $a\in\bar{A}$ 关于 A 的极限)，如果如下定义的 $A\cup\{a\}$ 到 E' 的映射 g 在点 a 连续：对 $x\in A$，取 $g(x)=f(x)$，又令 $g(a)=a'$. 其次，记 $a'=\lim\limits_{x\to a, x\in A}f(x)$.
若 $a\in A$，我们用同样的语言与记号来表达 f 在点 a 是连续的，其中 $a'=f(a)$.

(3.13.1) $a'\in E'$ 为 $f(x)$ 在 $x\in A$ 趋于 a 时的极限的充要条件是，对于 a' 在 E' 中的每个邻域 V'，都存在 a 在 E 中的邻域 V 使得 $f(V\cap A)\subset V'$.

(3.13.2) $a' \in E'$ 为 $f(x)$ 在 $x \in A$ 趋于 a 时的极限的充要条件是，对每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，使得只要 $x \in A$，$d(x, a) < \delta$ 就有

$$d'(a', f(x)) < \varepsilon.$$

这些准则只不过是定义的同义语言.

(3.13.3) 一个映射在给定点 $a \in \bar{A}$ 关于 A 只能有一个极限.

因为，若 a'，b' 是 f 在点 a 的两个极限，则由 (3.13.2) 与三角不等式推知：对任意 $\varepsilon > 0$ 都有 $d'(a', b') \leqslant 2\varepsilon$，这在 $a' \neq b'$ 时是荒谬的.

(3.13.4) 设 f 是 E 到 E' 的映射，$x_0 \in E$ 是 $E - \{x_0\}$ 的触点. 则 f 在点 x_0 连续的充要条件是 $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0, x \in E - \{x_0\}} f(x)$.

这不过是定义的改述.

(3.13.5) 设 $a' = \lim\limits_{x \to a, x \in A} f(x)$. 则对每个 $a \in \bar{B}$ 的子集 $B \subset A$，a' 也是 f 在点 a 关于 B 的极限. 这在 $B = V \cap A$ 时特别有用，其中 V 是 a 的任意邻域.

这是定义与 (3.11.6) 的明显结果.

(3.13.6) 设 f 在点 $a \in \bar{A}$ 关于 A 有极限 a'；若 g 是 E' 到 E'' 的映射，在点 a' 连续，则 $g(a') = \lim\limits_{x \to a, x \in A} g(f(x))$.

这立即由(3.11.5)推出.

(3.13.7) 若 $a' = \lim\limits_{x \to a, x \in A} f(x)$，则 $a' \in \overline{f(A)}$.

因由(3.13.1)可知，对 a' 的每个邻域 V'，$V' \cap f(A)$ 都包含 $f(V \cap A)$，而由于 $a \in \bar{A}$，$f(V \cap A)$ 是不空的.

重要的情形是**序列的极限**：在广义实直线上考虑点 $+\infty$，它是自然数集 $\boldsymbol{N}$ 的一个触点. $\boldsymbol{N}$ 到距离空间 E 的映射就是 E 中点的序列 $n \to x_n$；若 $a \in E$ 是这个映射在 $+\infty$ 关于 $\boldsymbol{N}$ 的极限，则我们称 a 是**序列 (x_n) 的极限**(或称序列 (x_n) 收敛于 a)且记为 $a = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$. 判别准则(3.13.1)与(3.13.2)在这里成为：

(3.13.8) $a = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ 的充要条件是：对 a 的每个邻域 V，都存在

整数 n_0，使得只要 $n \geqslant n_0$ 就有 $x_n \in V$（换句话说，V 包含除有限个附标以外的全部 x_n）.

(3.13.9) $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ 的充要条件是对每个 $\varepsilon > 0$，都存在整数 n_0，使得只要 $n \geqslant n_0$ 就有 $d(a, x_n) < \varepsilon$.

这个判别准则也可以写成：$\lim_{n\to\infty} d(a, x_n) = 0$.

无穷序列 (x_n) 的子列是指序列 $k \to x_{n_k}$，其中 $k \to n_k$ 是严格递增的无穷整数列. 由 (3.13.5) 立即可得

(3.13.10) 若 $a = \lim_{n\to\infty} x_n$，则对无穷序列 (x_n) 的任意子列都有 $a = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$.

设 (x_n) 是距离空间 E 中点的无穷序列. 点 $b \in E$ 称为序列 (x_n) 的**触值**，如果存在子列 (x_{n_k}) 使得 $b = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$.

序列 (x_n) 的子序列的触值也是 (x_n) 的触值. 若 (x_n) 有极限 a，则 a 是 (x_n) 的唯一的触值，这是由 (3.13.10) 推知的；一般地，逆命题不成立，例如令 $x_{2n} = 1/n$ 与 $x_{2n+1} = n$ 所得的实数列 (x_n) 就有唯一的触值 0，但是它并不收敛于 0（然而参看(3.16.4)）.

(3.13.11) $b \in E$ 为 (x_n) 的触值的充要条件是：对于 b 的任意邻域 V 与任意整数 m，都存在整数 $n \geqslant m$ 使得 $x_n \in V$.

条件显然是必要的. 反之，若条件满足，我们用下述条件定义子列 (x_{n_k})：n_k 是使得 $d(b, x_{n_k}) < 1/k$ 且大于 n_{k-1} 的最小整数. 因为对任意 $k \geqslant h$，$d(x_{n_k}, b) < 1/h$，所以子列 (x_{n_k}) 收敛于 b.

(3.13.12) 若 b 是 E 中 (x_n) 的触值，又若 E 到 E' 的映射 g 在 b 连续，则 $g(b)$ 是序列 $(g(x_n))$ 的触值.

由定义与 (3.13.6) 这是很清楚的.

由(3.13.7)推知：若 b 是由属于 E 的子集 A 的点 x_n 组成的序列的触值(极限更行)，则 $b \in \overline{A}$. 反之，

(3.13.13) 对于任意点 $a \in \overline{A}$，都存在 A 中点的序列 (x_n) 使得 $a = \lim_{n\to\infty} x_n$.

因为据假设，集 $A \cap B(a; V_n)$ 不空，于是(由(1.4.5))对每个

n 都存在 $x_n \in A \cap B(a; 1/n)$，又由 (3.13.9) 序列 (x_n) 收敛于 a.

(3.13.14) 设 f 是 $A \subset E$ 到距离空间 E' 的映射，且 $a \in \overline{A}$. 则 f 在点 a 关于 A 有极限 $a' \in E'$ 的充要条件是，对于 A 中点的每个序列 (x_n)，只要 $a = \lim_{n\to\infty} x_n$，就有 $a' = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$.

必要性由定义与 (3.13.6) 推得. 反之，若假设条件满足而 a' 不是 f 在点 a 关于 A 的极限，则由 (3.13.2)，存在 $\alpha > 0$ 使得对每个整数 n，都存在 $x_n \in A$，满足这样两个条件: $d(a, x_n) < 1/n$ 与 $d(a', f(x_n)) \geqslant \alpha$. 于是序列 (x_n) 收敛于 a，而 $(f(x_n))$ 却不收敛于 a'，这是个矛盾.

问　　题

1) 设 (u_n) 是 $\geqslant 0$ 的实数序列，且 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. 试证存在无穷多个附标 n，使得对每个 $m \geqslant n$，都有 $u_n \geqslant u_m$.

2) a) 设 (x_n) 是距离空间 E 中的序列，证明：若三个子列 (x_{2n})，(x_{2n+1}) 与 (x_{3n}) 都收敛，则 (x_n) 也收敛.

b) 举出一个实数列 (x_n) 的例子，使得它不收敛，但是对于每个 $k \geqslant 2$，它的子列 (x_{kn}) 都收敛(考虑子列 (x_{p_k})，其中 (p_k) 是严格递增的素数序列).

3) 设 E 是可分距离空间，f 是 E 到 $\boldsymbol{R}$ 的任意映射，试证满足下面条件的点 $a \in E$ 的集是至多可数的: $\lim_{x\to a, x\neq a} f(x)$ 存在且异于 $f(a)$. (对每一对有理数 p，q 且 $p<q$，考虑满足下列条件的点 $a \in E$ 的集:

$$f(a) \leqslant p < q \leqslant \lim_{x\to a, x\neq a} f(x),$$

并应用 3.9 节问题 2a)，证明它是至多可数的. 同样地，考虑满足下列条件的点 $a \in E$ 的集，

$$\lim_{x\to a, x\neq a} f(x) \leqslant p < q \leqslant f(a).)$$

14. Cauchy 序列. 完备空间

在距离空间 E 中，**Cauchy** 序列是这样的序列 (x_n)：对任意

$\varepsilon > 0$，都存在整数 n_0，使得只要 $p \geqslant n_0$ 与 $q \geqslant n_0$ 就有 $d(x_p, x_q) < \varepsilon$.

(3.14.1) 任意收敛序列是 Cauchy 序列.

因为若 $a = \lim_{x \to \infty} x_n$，则对任意 $\varepsilon > 0$，都存在 n_0，使得只要 $n \geqslant n_0$ 就有 $d(a, x_n) < \varepsilon/2$；据三角不等式，由关系 $p \geqslant n_0$，$q \geqslant n_0$ 就可推出 $d(x_p, x_q) < \varepsilon$.

(3.14.2) 若 (x_n) 是 Cauchy 序列，则 (x_n) 的任意触值都是它的极限.

事实上，若 b 是 (x_n) 的触值，并给定 $\varepsilon > 0$，则存在 n_0，使得只要 $p \geqslant n_0$ 与 $q \geqslant n_0$ 就有 $d(x_p, x_q) < \varepsilon/2$；另一方面，据(3.13.11)，存在 $p_0 \geqslant n_0$，使得 $d(b, x_{p_0}) < \varepsilon/2$，由三角不等式推出，对于任意 $n \geqslant n_0$，$d(b, x_n) \leqslant \varepsilon$.

距离空间 E 称为完备的，如果 E 中的任意 Cauchy 序列都收敛(当然是收敛于 E 中的点).

(3.14.3) 实直线 $\boldsymbol{R}$ 是完备的距离空间.

令 (x_n) 是实数的 Cauchy 序列. 归纳地定义整数序列 (n_k) 如下：n_{k+1} 是使得对于 $p \geqslant n_{k+1}$ 与 $q \geqslant n_{k+1}$，有 $|x_p - x_q| < 1/2^{k+2}$ $> n_k$ 的最小整数. 这个定义的可能性由 (x_n) 为 Cauchy 序列推知；设 I_k 是闭区间 $[x_{n_k} - 2^{-k}, x_{n_k} + 2^{-k}]$，我们有 $I_{k+1} \subset I_k$，因为 $|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}| < 2^{-k-1}$；另一方面，对于 $m \geqslant n_k$，由定义 $x_m \in I_k$. 因由公理 (2.1.(IV)) 推知区间套 I_k 有非空的交集；所以可设对所有 k，a 都在 I_k 中. 于是对于所有 $m \geqslant n_k$ 都显然有 $|a - x_m| \leqslant 2^{-k+1}$，因此 $a = \lim_{n \to \infty} x_n$.

(3.14.4) 若距离空间 E 的子空间 F 是完备的，则 F 是在 E 中闭的.

事实上，据(3.13.13)，任意点 $a \in \bar{F}$ 都是 F 中点的序列 (x_n) 的极限. 由(3.14.1)，序列 (x_n) 是 Cauchy 序列，于是，据假设，它收敛于 F 中的一点 b；但是由 (3.13.3)，$b = a$，故 $a \in F$；这表明 $\bar{F} = F$，证完.

(3.14.5) 在完备距离空间 E 中，任意闭子集 F 都是完备子空间.

因为 F 中点的 Cauchy 序列据定义收敛于一点 $a \in E$，由于 x_n 属于 F，所以，由(3.13.7)，$a \in \bar{F} = F$.

从实直线为完备的这一事实出发，定理(3.14.4)与(3.14.5)使我们能够立即举出完备与非完备空间的例子.

完备空间的重要性在于：在这种空间中要证明序列收敛，只要证明它是 Cauchy 序列(我们也说这个序列满足 Cauchy 准则)；该判别准则与收敛序列的定义在应用上的主要区别在于：应用 Cauchy 准则时，不必预先知道极限的值.

我们已经提到：在同一个集 E 上，两个距离 d_1，d_2 可以是拓扑等价的，但 E_1 到 E_2 (E_1，E_2 是相应的距离空间)的恒等映射可以是不一致连续的.例如，当我们取 $E = \boldsymbol{R}$，$d_2(x,y) = |x-y|$，$d_1(x,y)$ 是限制在 $\boldsymbol{R}$ 上的广义实直线中的距离时，就是这种情况.这时 E_2 是完备的，而 E_1 不是，因为 E_1 在 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 中不是闭的.当两个距离 d_1，d_2 使 E_1 到 E_2 中的恒等映射及其逆映射都一致连续时，我们就称 d_1 与 d_2 是**一致等价的**. 这时，Cauchy 序列对于这两个距离是不变的.例如，如果存在两个实数 $\alpha > 0$，$\beta > 0$ 使得对于 E 中任意一对点 x，y，都有 $\alpha d_1(x,y) \leqslant d_2(x,y) \leqslant \beta d_1(x,y)$，则 d_1 与 d_2 是一致等价距离.

设 E，E' 是两个距离空间，A 是 E 的子集，f 是 A 到 E' 的映射；f 在 A 中的振幅定义为直径 $\delta(f(A))$ (可以是 $+\infty$). 设 a 是 A 的触点；f 在点 a 关于 A 的振幅是 $\Omega(a,f) = \inf\limits_V \delta(f(V \cap A))$，其中 V 取遍 a 的邻域集(或只取遍 a 的一个基础邻域系).

(3.14.6) 设 E' 是完备距离空间；$\lim\limits_{x \to a, x \in A} f(x)$ 存在的充要条件是 f 在点 a 关于 A 的振幅为 0.

由(3.13.2)条件是必要的.反之，假设条件已满足，并设 (x_n) 是 A 中点的序列，且收敛于 a；那么由假设推出，序列 $f(x_n)$ 是 E' 中的 Cauchy 序列，因为：任意给定 $\varepsilon > 0$，都存在 a 的这样的邻域 V，使得对于 $V \cap A$ 中的任意两点 x，y，都有 $d'(f(x), f(y)) <$

ε，又除去有限个附标以外，有 $x_n \in V \cap A$，于是序列 $(f(x_n))$ 有极限 a'. 此外，对于 A 中其他任意收敛于 a 的点列 (y_n)，由于只要 x_n 与 y_n 都在 $V \cap A$ 中，就有 $d'(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$，所以 $(f(x_n))$ 与 $(f(y_n))$ 的极限相同. 于是由极限的定义与(3.13.14)得出 $\lim\limits_{x \to a, x \in A} f(x) = a'$.

问　　题

1) a) 设 E 是超距空间 (3.8 节,问题 4)). 试证: E 中序列 (x_n) 为 Cauchy 序列的充要条件是 $\lim\limits_{n \to \infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$.

b) 设 X 是任意集，E 是 X 中元素的所有无穷序列 $x = (x_n)$ 的集. 对 E 的任意两个不同元素 $x = (x_n)$, $y = (y_n)$, 令 $k(x, y)$ 是使得 $x_n \neq y_n$ 的最小的整数 n; 令 $d(x, y) = 1/k(x, y)$, 当 $x \neq y$ 时;又令 $d(x, x) = 0$. 试证: d 是 E 上的超距离,而且由 d 定义的距离空间 E 是完备的.

2) 设 φ 是定义在区间 $0 \leqslant u < +\infty$ 上的实值递增函数，且满足条件: $\varphi(0) = 0$;当 $u > 0$ 时，$\varphi(u) > 0$ 以及 $\varphi(u + v) \leqslant \varphi(u) + \varphi(v)$. 设 $d(x, y)$ 是集 E 上的距离,则 $d_1(x, y) = \varphi(d(x, y))$ 是 E 上的另一个距离.

a) 试证,若 φ 在点 $u = 0$ 连续,则距离 d 与 d_1 是一致等价的. 反之，若对于距离 d, 存在 E 中非孤立点 $x_0 \in E$ (3.9 节,问题 2),又若 d 与 d_1 是拓扑等价的,则 φ 在点 $u = 0$ 是连续的.

b) 证明函数

$u^r (0 < r \leqslant 1)$, $\log(1 + u)$, $u/(1 + u)$, $\inf(1, u)$ 满足上述条件. 应用后两个,就可知道,对 E 上的任意距离,都存在有界的一致等价距离.

3) 在实直线上，设 $d(x, y) = |x - y|$ 是普通距离，$d'(x, y) = |x^3 - y^3|$; 证明这两个距离拓扑等价,而且 Cauchy 序列对于它们不变，但它们并不一致等价.

4) 设 E 是完备距离空间，d 是 E 上的距离，A 是 E 的开子集序列 (U_n) 的交;又设 $F_n = E - U_n$ 并且对 A 的每一对点 x, y, 我们记

$$f_n(x, y) = \left| \frac{1}{d(x, F_n)} - \frac{1}{d(y, F_n)} \right|,$$

$$d_n(x, y) = f_n(x, y)/(1 + f_n(x, y))$$

且
$$d'(x, y) = d(x, y) + \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x, y)/2^n.$$

试证,在 E 的子空间 A 上，d' 是拓扑等价于 d 的距离，而且对于距离 d', A 是

完备距离空间.（附注：对于 d' 的 Cauchy 序列也是对于 d 的 Cauchy 序列，但是它在 E 中的极限不可能属于任何 F_n.）应用于由全部无理数组成的 $\boldsymbol{R}$ 的子空间 I 上去。

15. 初等延拓定理

(3.15.1) 设 f 与 g 是距离空间 E 到 E' 的两个连续映射．则满足 $f(x)=g(x)$ 的点 $x\in E$ 的集 A 是在 E 中闭的。

这等价于证明集 $E-A$ 是开的．设 $a\in E-A$，则 $f(a)\neq g(a)$；设 $d'(f(a), g(a))=\alpha>0$．由 f，g 在 a 连续与(3.6.3)推出：存在 a 在 E 中的邻域 V，使得对 $x\in V$，有 $d'(f(a), f(x))<\alpha/2$ 与 $d'(g(a), g(x))<\alpha/2$．于是对 $x\in V$，有 $f(x)\neq g(x)$，因为，否则由三角不等式有 $d'(f(a), g(a))<\alpha$.

(3.15.2) （恒等延拓原理）．设 f，g 是距离空间 E 到距离空间 E' 的两个连续映射，若对于 E 中的稠密子集 A 的所有点 x，都有 $f(x)=g(x)$ 则 $f=g$.

因为，据(3.15.1)，使得 $f(x)=g(x)$ 的点 x 的集是闭的，并且包含 A。

(3.15.3) 设 f，g 是距离空间 E 到广义实直线 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 的两个连续映射．则使得 $f(x)\leqslant g(x)$ 的点 $x\in E$ 的集 P 是在 E 中闭的。

我们再来证明 $E-P$ 是开的．假设 $f(a)>g(a)$，并令 $\beta\in\bar{\boldsymbol{R}}$ 满足条件：$f(a)>\beta>g(a)$（参考(2.2.16)与3.3节中 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 的定义）．则据(3.11.1)开区间 $]\beta,+\infty]$ 在 f 下的逆象 V 是 a 的邻域；开区间 $[-\infty,\beta[$ 在 g 下的逆象 W 也如此，于是由(3.6.3)，$V\cap W$ 也是 a 的邻域，并且对 $x\in V\cap W$ 有 $f(x)>\beta>g(x)$，证完.

(3.15.4) （不等延拓原理）．设 f，g 是距离空间 E 到广义实直线 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 的两个连续映射；若对 E 的稠密子集 A 的所有点 x，都有 $f(x)\leqslant g(x)$，则对于所有点 $x\in E$，都有 $f(x)\leqslant g(x)$.

证明由(3.15.3)推出，如(3.15.2)由(3.15.1)推出一样.

(3.15.5) 设 A 是距离空间 E 的稠子集，f 是 A 到距离空间 E' 的

映射. 为使存在 E 到 E' 的连续映射 $\bar{f}$, 它在 A 中与 f 相同, 充要条件是: 对任意 $x\in E$, 极限 $\lim\limits_{y\to x, y\in A} f(y)$ 都在 E' 中存在;此外,这个连续映射 $\bar{f}$ 是唯一的.

因任意 $x\in E$ 都属于 $\bar{A}$,所以据(3.13.5)必定有 $\bar{f}(x)=\lim\limits_{y\to x, y\in A}\bar{f}(y)$, 于是 $\bar{f}(x)=\lim\limits_{y\to x, y\in A} f(y)$; 这证明了条件的必要性与下列事实: 如果连续映射 $\bar{f}$ 存在, 则它是唯一的(这也可由(3.15.2)推出). 反之,假设条件满足, 我们证明由 $\bar{f}(x)=\lim\limits_{y\to x, y\in A} f(y)$ 定义的映射 $\bar{f}$ 就是该延拓问题的解. 首先, 若 $x\in A$,则据定义, 由该极限的存在推出 $\bar{f}(x)=f(x)$, 于是 $\bar{f}$ 是 f 的延拓, 尚待证明的是 $\bar{f}$ 连续. 设 $x\in E$, V' 是 $\bar{f}(x)$ 在 E' 中的邻域; 则存在以 $\bar{f}(x)$ 为中心的闭球 B' 含在 V' 中. 由假设, 存在 x 在 E 中的开邻域 V, 使得 $f(V\cap A)\subset B'$(据(3.13.1)). 对于任意 $y\in V$,$\bar{f}(y)$ 是 f 在点 y 关于 A 的极限,于是由(3.13.5)它也是关于 $V\cap A$ 的极限; 从而由(3.13.7)推出 $\bar{f}(y)\in\overline{f(V\cap A)}$,因为 B' 是闭的, 所以 $\bar{f}(y)\in B'$; 这就是要证明的.

(3.15.6) 设 A 是距离空间 E 的稠密子集, f 是 A 到完备距离空间 E' 的一致连续映射. 则存在 E 到 E' 的连续映射 $\bar{f}$, 它在 A 中与 f 相合;并且 $\bar{f}$ 是一致连续的.

要证明 $\bar{f}$ 存在,据(3.15.5)与(3.14.6), 只要证明 f 在任意点 $x\in E$ 关于 A 的振幅是 0. 既然对任意 $\varepsilon>0$, 都存在 $\delta>0$ 使得只要 $d(y, z)<\delta$ 就有 $d'(f(y), f(z))<\varepsilon/3$ (y, z 在 A 中), 故 $f(A\cap B(x; \delta/2))$ 的直径至多是 $\varepsilon/3$, 这就证明了我们的断言.现在考虑 E 中任意这样两点 s, t, 满足 $d(s, t)<\delta/2$. 可以找到一点 $y\in A$, 使 $d(s,y)<\delta/4$ 与 $d'(\bar{f}(s), f(y))<\varepsilon/3$; 又可找到一点 $z\in A$, 使得 $d(t, z)<\delta/4$ 与 $d'(\bar{f}(t), f(z))<\varepsilon/3$. 由三角不等式推出 $d(y, z)<\delta$. 又因为 y, z 在 A 中,所以 $d(f(y), f(z))<\varepsilon/3$; 于是据三角不等式, $d'(\bar{f}(s), \bar{f}(t))<\varepsilon$; 这就证明了 $\bar{f}$ 是一致连续的.

问　　题

设 $n \to r_n$ 是 $\mathbf{N}$ 到 A 上的双射，A 是使 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 成立的所有有理数 x 的集(2.2.15)．在 $E = [0, 1]$ 上定义函数 $f(x) = \sum_{r_n<x} 1/2^n$，这里无穷和是只对使 $r_n<x$ 的那些 n 取的．证明：f 在所有无理数 $x \in [0, 1]$ 的集 B 上的限制是连续的，但不能延拓成在 E 上连续的函数．

16. 紧　空　间

距离空间 E 称为**紧的**，如果它满足下述条件（"Borel-Lebsgue 公理"）：对于 E 的每一个由开集组成的覆盖("开覆盖")$(U_\lambda)_{\lambda \in L}$，都存在有限子族 $(U_\lambda)_{\lambda \in H}$ ($H \subset L$ 且有限)，它仍是 E 的覆盖．

距离空间 E 称为**准紧的**；如果它满足下述条件：对于任意 $\varepsilon > 0$，都存在由直径 $< \varepsilon$ 的集合组成的 E 的有限覆盖．这直接等价于下述性质：对任意 $\varepsilon > 0$，都存在 E 的有限子集 F，使得对每个 $x \in E$，$d(x, F) < \varepsilon$．

在距离空间的理论中，上述这些概念是纯集合论中"有限"概念的替代者；它们表明，距离空间可以说成是"近似有限的"．注意，由定义推知：紧性是拓扑概念，但准紧性不是(见(3.17.6)后的附注)．

(3.16.1)　对于距离空间 E，下面三个论断是等价的：

a)　E 是紧的；

b)　E 中任意无穷序列都至少有一个触值；

c)　E 是准紧的与完备的．

a)⇒b)：设 (x_n) 是紧空间 E 中的序列，且设 F_n 是集合 $\{x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+p}, \cdots\}$ 的闭包．我们来证明存在一点属于所有 F_n．如果不然，则这些开集 $U_n = E - F_n$ 就构成 E 的开覆盖，于是在这些开集中有有限个 $U_{n_1}, \cdots, U_{n_k}$ 构成 E 的覆盖；这就意味着 $F_{n_1} \cap F_{n_2} \cap \cdots \cap F_{n_k} = \phi$；但这是荒谬的，因为当 n 比 $\max(n_1, \cdots, n_k)$ 大时，F_n (依定义它是不空的) 就含于所有 F_{n_i} ($1 \leqslant i \leqslant k$)

中．于是交 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ 至少包含一个点 a． 据(3.13.11)与触点的定义，a 是 (x_n) 的触值．

b)⇒c) 首先，E 中任意 Cauchy 序列都有触值，于是据(3.14.2)它是收敛的，因此 E 是完备的．假设 E 不是准紧的，即存在数 $\alpha>0$，使得 E 不具有由半径为 α 的球组成的有限覆盖．于是我们可以归纳地定义序列 (x_n) 如下：假设对 $1\leqslant i\leqslant n-1$，$1\leqslant j\leqslant n-1$，$i\neq j$ 有 $d(x_i, x_j)\geqslant\alpha$． 则半径为 α 中心为 $x_i(1\leqslant i\leqslant n-1)$ 的诸球的并就不是整个空间，因此存在 x_n，使得对 $i<n$ 有 $d(x_i, x_n)\geqslant\alpha$．这个序列 (x_n) 不能有触值，因为若 a 是它的触值，则存在子序列 (x_{n_k}) 收敛于 a，于是对 $k\geqslant k_0$ 有 $d(a, x_{n_k})<\alpha/2$，因此，对 $h\geqslant k_0$，$k\geqslant k_0$，$h\neq k$，就有 $d(x_{n_h}, x_{n_k})<\alpha$，与 (x_n) 的定义矛盾．

c)⇒a) 假设有 E 的这样一个开覆盖 $(U_\lambda)_{\lambda\in L}$，使得它的任何有限子族都不是 E 的覆盖． 我们归纳地定义球序列 (B_n) 如下：假设 B_{n-1} 具有半径 $1/2^{n-1}$，并且 $(U_\lambda)_{\lambda\in L}$ 的任何有限子族都不是 B_{n-1} 的覆盖． 然后考虑由半径为 $1/2^n$ 的球组成的 E 的有限覆盖 $(V_k)_{1\leqslant k\leqslant m}$；在那些与 B_{n-1} 的交非空的球 V_k 中间，至少存在一个 B_n，使得 (U_λ) 的任何有限子族都不是它的覆盖；否则，由于这些 V_k 构成 B_{n-1} 的覆盖，于是就有 (U_λ) 的有限子族是 B_{n-1} 的覆盖．设 x_n 是 B_n 的中心；由于 B_n 与 B_{n-1} 有公共点，所以三角不等式给出：$d(x_{n-1}, x_n)\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}\leqslant\frac{1}{2^{n-2}}$．于是，若 $n\leqslant p<q$，我们有 $d(x_p, x_q)\leqslant d(x_p, x_{p+1})+\cdots+d(x_{q-1}, x_q)\leqslant\frac{1}{2^{p-1}}+\cdots+\frac{1}{2^{q-2}}\leqslant\frac{1}{2^{n-2}}$．这表明 (x_n) 是 E 中的 Cauchy 序列，于是收敛于一点 a． 设 λ_0 是使得 $a\in U_{\lambda_0}$ 的附标，则存在数 $\alpha>0$ 使 $B(a;\alpha)\subset U_{\lambda_0}$． 由 a 的定义推知，存在整数 n 满足 $d(a, x_n)<\alpha/2$ 且 $1/2^n<\alpha/2$． 于是三角不等式给出 $B_n\subset B(a;\alpha)\subset U_{\lambda_0}$． 但这

就产生了矛盾，因为我们已假设 (U_λ) 的任何有限子族均不是 B_n 的覆盖.

(3.16.2)　任意准紧距离空间是可分的.

若 E 是准紧的，按定义，对任意 n 都存在 E 的有限子集 A_n，使得对每个 $x\in E$ 都有 $d(x, A_n) < 1/n$. 设 $A = \bigcup_n A_n$，则 A 是至多可数的，并且对每个 $x\in E$ 与任意 n，都有 $d(x,A) \leqslant d(x,A_n) < 1/n$，于是 $d(x, A) = 0$，$E = \bar{A}$.

(3.16.3)　设 E 是距离空间. 则由下列性质中的任意两个可推出第三个：

a)　E 是紧的；

b)　E 是离散的(更确切地说，同胚于一个离散空间)；

c)　E 是有限的.

由 a) 与 b) 推出 c)，因为每一个单点集 $\{x\}$ 都是开的，于是集 $\{x\}$ 的族是 E 的开覆盖，一个有限子族只有当 E 有限时才可能是 E 的覆盖. 另一方面，由 c) 同时推出 a) 与 b)，因每一个单点集都是闭的，所以 E 的每个子集，作为有限个闭集的并是闭的，从而 E 的每个子集都是开的，因此 E 与离散空间同胚. 最后，因为只存在有限个开集，所以 E 是紧的.

(3.16.4)　在紧距离空间 E 中，任意序列 (x_n)，如果只有一个触值 a，则它必收敛于 a.

假设 a 不是 (x_n) 的极限；则存在数 $\alpha > 0$ 使存在 (x_n) 的无穷子列 (x_{n_k})，它的点全属于 $E - B(a;\alpha)$. 据假设，这个子序列有一个触值 b，又因 $E - B(a;\alpha)$ 是闭的，所以据(3.13.7)，b 属于 $E - B(a;\alpha)$. 因此序列 (x_n) 有两个不同的触值，与假设矛盾.

(3.16.5)　紧距离空间 E 到距离空间 E' 的任意连续映射 f 都是一致连续的.

假若相反，则存在数 $\alpha > 0$ 以及 E 中两个点列 (x_n) 与 (y_n) 使得 $d(x_n, y_n) < 1/n$ 而 $d'(f(x_n), f(y_n)) \geqslant \alpha$. 我们可以找到收敛于一点 a 的子列 (x_{n_k})，又由于 $d(x_{n_k}, y_{n_k}) < 1/n_k$，于是由三角

不等式推知序列 (y_{n_k}) 也收敛于 a. 但是 f 在点 a 是连续的，于是存在 $\delta > 0$ 使得对 $d(a, x) < \delta$，有 $d'(f'(a), f(x)) < \alpha/2$. 选取这样的 k 使得 $d(a, x_{n_k}) < \delta$，$d(a, y_{n_k}) < \delta$；于是 $d'(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) < \alpha$，这与序列 (x_n) 与 (y_n) 的定义矛盾.

(3.16.6) 设 E 是紧距离空间，$(U_\lambda)_{\lambda \in L}$ 是 E 的开覆盖. 则存在数 $\alpha > 0$，使得以 α 为半径的任一开球至少含于一个 U_λ 之中 (Lebesgue 性质).

对每个 $x \in E$，存在一个开球 $B(x; r_x)$，含于某一集 U_λ 中. 因球 $B(x; r_x/2)$ 构成 E 的一个覆盖，故存在有限个点 $x_i \in E$ 使球 $B(x_i; r_{x_i}/2)$ 构成 E 的覆盖. 如果令 $\alpha > 0$ 是数 $r_{x_i}/2$ 中的最小者，则它满足所需性质；事实上，每个 $x \in E$ 对某个 i 属于球 $B(x_i; r_{x_i}/2)$，因此 $B(x; \alpha)$ 含于 $B(x_i; r_{x_i})$ 中，因为 $\alpha \leqslant r_{x_i}/2$；但这与 $B(x_i; r_{x_i})$ 含于某个 U_λ 相矛盾.

问　　题

1) 举出一个准紧空间的实例，使得(3.16.6)的结果对于它不成立.

2) 对于距离空间 E，证明下列性质等价:

a) E 是紧的，

b) E 的每个可数的开覆盖都包含一个有限子覆盖；

c) E 的每个非空闭集的递减序列 (F_n) 恒有一个非空的交；

d) 对于 E 的任意无穷开覆盖 $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$，恒存在子集 $H \subset L$，它异于 L 且使得 $(U_\lambda)_{\lambda \in H}$ 仍然是 E 的覆盖；

e) E 的每个**点态有限开覆盖** (U_λ) (意即对任意点 $x \in E$，$x \in U_\lambda$ 只对附标的有限子集成立)都包含一个有限子复盖；

f) E 的每个离散的无穷子空间都是不闭的. (用(3.16.1)证明由 f) 可推出 a)，又由 d) 与 e) 都可推出 f)).

3) 设 E 是距离空间，d 是 E 上的距离，$\mathscr{F}(E) \subset \mathscr{B}(E)$ 是 E 的所有非空闭子集的集合. 我们可以假设 E 上的这个距离是有界的 (3.14 节，问题 2). 对 $\mathscr{F}(E)$ 的任意两个元素 A, B，令 $\rho(A, B) = \sup\limits_{x \in A} d(x, B)$，$h(A, B) = \sup(\rho(A, B), \rho(B, A))$.

a) 试证：在 $\mathscr{F}(E)$ 上，h 是一个距离 (Hausdorff 距离).

b) 试证：对$\mathscr{F}(E)$中任意四个元素A,B,C,D，有$h(A\cup B,C\cup D)\leqslant \max(h(A,C),h(B,D))$。

c) 试证：若E是完备的，则$\mathscr{F}(E)$也是完备的。(设(X_n)是$\mathscr{F}(E)$中的任意 Cauchy 序列；对每个n，Y_n是那些$p\geqslant 0$的集X_{n+p}的并的闭包，考虑E中递减序列(Y_n)的交。)

(d) 试证：若E是准紧的，则$\mathscr{F}(E)$也是准紧的(应用1.1节中的问题)。因此，若E是紧的，则$\mathscr{F}(E)$也是紧的。

4) 设E是紧距离空间，对每个$\varepsilon>0$令$N_\varepsilon(E)$是满足下列性质的最小整数n：存在直径$\leqslant 2\varepsilon$的几个集的E的覆盖；又令$M_\varepsilon(E)$是满足下列性质的最大整数m：存在E中m个点的有限序列，其中任意两个(不同)点之间的距离$>\varepsilon$。数$H_\varepsilon(E)=\log N_\varepsilon(E)$称为$E$的$\varepsilon$-熵，数$C_\varepsilon(E)=\log M_\varepsilon(E)$称为$E$的$\varepsilon$-容量。

a) 试证$M_{2\varepsilon}(E)\leqslant N_\varepsilon(E)\leqslant M_\varepsilon(E)$，因此$C_{2\varepsilon}(E)\leqslant H_\varepsilon(E)\leqslant C_\varepsilon(E)$。

b) 试证对每个$\varepsilon>0$，ε的函数$N_\varepsilon(E)$与$M_\varepsilon(E)$是递减的与右连续的(为证$N_\varepsilon(E)$的右连续性，利用反证法并用问题3) d))。

c) 如果A，B是E的非空闭子集，试证

$$N_\varepsilon(A\cup B)\leqslant N_\varepsilon(A)+N_\varepsilon(B),\ M_\varepsilon(A\cup B)\leqslant M_\varepsilon(A)+M_\varepsilon(B),$$

$$H_\varepsilon(A\cup B)\leqslant H_\varepsilon(A)+H_\varepsilon(B),\ C_\varepsilon(A\cup B)\leqslant C_\varepsilon(A)+C_\varepsilon(B).$$

d) 设E是$\boldsymbol{R}$中长为l的区间，试证：若$l/2\varepsilon$是整数，则$N_\varepsilon(E)=M_{2\varepsilon}(E)=l/2\varepsilon$，若$l/2\varepsilon$不是整数，则$N_\varepsilon(E)=M_{2\varepsilon}(E)=[l/2\varepsilon]+1$(这里$[t]$表示$\leqslant t$的最大整数，其中$t>0$)。

17. 紧　集

距离空间E中的**紧**(相应地，**准紧**)集是这样的集A：使E的子空间A是紧的(相应地，准紧的)。

(3.17.1) 任意准紧集是有界的。

这由下面的事实推出：有界集的有限并集是有界的(3.4.4)。(3.17.1)的逆一般不成立，因为任意距离都等价于一个有界距离(3.4节问题2)(但参看(3.17.6))。

(3.17.2) 距离空间中的任意紧集是闭的。

事实上，据(3.16.1)这种子空间是完备的，于是我们只要应用

(3.14.4)就行了.

(3.17.3) 在紧空间E中,每个闭子集都是紧的.

因为这种集显然是准紧的,又由(3.14.5)它是完备子空间.

距离空间E中的**相对紧集**是指这样的集A,它的闭包$\bar{A}$是紧的.

(3.17.4) 相对紧集(相应地,准紧集)的任意子集是相对紧的(相应地,准紧的).

这立即由定义与(3.17.3)推出.

(3.17.5) 相对紧集是准紧的. 在完备空间中,准紧集是相对紧的.

第一个断言由(3.17.4)立即可得. 其次假定E是完备的,$A\subset E$是准紧的. 则对于任意$\varepsilon>0$,存在A的这样的覆盖,它是由A的有限个直径小于$\varepsilon/2$的集C_k组成的;每个C_k都含于(E中的)半径为$\varepsilon/2$的闭球D_k内. 因为集$\bigcup_k D_k$是闭的,所以有$\bar{A}\subset\bigcup_k D_k$,且每个$D_k$的直径$\leqslant\varepsilon$. 另一方面,据(3.14.5) $\bar{A}$是完备子空间,于是得到结果.

非完备的准紧空间E给出了在E中不是相对紧的准紧集的例.

(3.17.6) (Borel-Lebesgue 定理). 实直线的子集为相对紧的充要条件是它是有界的.

由于(3.17.1),(3.17.4)与(3.17.5),我们只要证明任意闭区间$[a,b]$是准紧的. 对每个整数n,设$x_k=a+k(b-a)/n$,$(0\leqslant k\leqslant n)$;则中心为$x_k$长度为$2/n$的开区间就构成了$[a,b]$的覆盖,这就是要证明的.

附注. 如果在实直线上考虑3.14节所定义的那两个距离d_1,d_2,则由(3.17.1)推出: E_2不是准紧的,而E_1是准紧的,因为据(3.17.6),与$\boldsymbol{R}$的闭区间$[-1,+1]$同胚的广义实直线$\bar{\boldsymbol{R}}$(3.12)是

紧的。

(3.17.7) 距离空间E的子集A为相对紧的充要条件是A中每个点列在E中都有触值.

由(3.16.1)条件显然是必要的. 反之，假定条件满足，我们来证明$\bar{A}$中每个点列(x_n)在E中都有触值(因此由(3.13.7)这触值将在$\bar{A}$中)，于是由(3.16.1) $\bar{A}$是紧的. 对每个n，由闭包的定义推知存在$y_n \in A$满足$d(x_n, y_n) \leqslant 1/n$，由假设，存在收敛于一点$a$的子列$(y_{n_k})$；由三角不等式推出$(x_{n_k})$也收敛于$a$，这就是要证明的。

(3.17.8) 两个相对紧集的并是相对紧的.

由(3.8.8)推知：我们只要证明两个紧集A，B的并是紧的。设$(U_\lambda)_{\lambda\in L}$是子空间$A\cup B$的开覆盖；由(3.10.1)每个$U_\lambda$都能写成$(A\cup B)\cap V_\lambda$，其中$V_\lambda$是在$E$中开的. 据假设，存在$L$的有限子集$H$(相应地，$K$)使得子族$(A\cap V_\lambda)_{\lambda\in H}$(相应地，$(B\cap V_\lambda)_{\lambda\in K}$)是$A$(相应地，$B$)的覆盖. 于是很清楚，族$((A\cup B)\cap V_\lambda)_{\lambda\in H\cup K}$就是$A\cup B$的覆盖.

(3.17.9) 设f是距离空间E到距离空间E'的连续映射，则对于E的每个紧(相应地，相对紧)子集A，$f(A)$都是紧的，因而是在E'中闭的(相应地，在E'中相对紧的).

只要证明，当A紧时$f(A)$也紧就够了. 设$(U_\lambda)_{\lambda\in L}$是$E'$的子空间$f(A)$的开覆盖；则由(3.11.4)，集合$A\cap f^{-1}(U_\lambda)$构成子空间$A$的开覆盖；据假设，存在$L$的有限子集$H$，使得对于$\lambda\in H$，诸集合$A\cap f^{-1}(U_\lambda)$仍然构成$A$的覆盖；于是对于$\lambda\in H$，诸集合$U_\lambda = f(A\cap f^{-1}(U_\lambda))$构成$f(A)$的覆盖，这就是要证明的.

(3.17.10) 设E是非空紧距离空间，f是E到$\boldsymbol{R}$的连续映射；则$f(E)$是有界的，并且在E中存在这样两点a，b，使得$f(a) = \inf_{x\in E} f(x)$，$f(b) = \sup_{x\in E} f(x)$.

第一个断言由(3.17.9)与(3.17.1)推出. 另一方面，据(3.17.2)，$f(E)$在$\boldsymbol{R}$中是闭的，于是$\sup f(E)$与$\inf f(E)$由于是$f(E)$的触

点而属于 $f(E)$.

(3.17.11) 设 A 是距离空间 E 的紧子集. 则集 $V_r(A)$ (见 3.6) 构成 A 的基础邻域系.

设 U 是 A 的任意邻域;则据(3.11.8),实函数 $x \to d(x, E-U)$ 在 A 中是 >0 且连续的,从而由(3.17.10),存在这样一点 $x_0 \in A$,满足 $d(x_0, E-U) = \inf_{x \in A} d(x, E-U)$. 但 $d(x_0, E-U) = r > 0$; 于是 $V_r(A) \subset U$.

(3.17.12) 设 E 是紧距离空间,f 是 E 到距离空间 E' 的连续单映射,则 f 是 E 到 $f(E)$ 的同胚.

据 (3.11.4), 只要证明对每个闭集 $A \subset E$, $f(A)$ 都是在 $f(E)$ 中闭的;但这可由(3.17.3)与(3.17.9)推出.

问　　题

1) 设 f 是距离空间 E 到距离空间 E' 的一致连续映射. 试证: 对于 E 的任意准紧子集 A, $f(A)$ 是准紧的.

2) 在距离空间 E 中,设 A 是一个紧子集,B 是一个闭子集且使得 $A \cap B = \phi$. 试证 $d(A, B) > 0$.

3) 设 E 是紧的超距空间 (3.8 节,问题 4),d 是 E 上的距离. 试证: 对于每个 $x_0 \in E$, E 在映射 $x \to d(x_0, x)$ 下的象都是区间 $[0, +\infty[$ 的一个至多可数子集, 且其中每一点 (0 可能除外) 都是孤立的 (3.10.10). (对于任意 $r = d(x_0, x) > 0$, 考虑 $d(x_0, y)$ 在满足 $d(x_0, y) < r$ 的点 y 的集上的上确界, 以及 $d(x_0, z)$ 在满足 $d(x_0, z) > r$ 的点 z 的集上的下确界; ;并利用 3.8 节, 问题 4).

4) 设 E 是紧距离空间, d 是 E 上的距离. f 是 E 到 E 的映射且使得对 E 的任意一对点 (x, y), $d(f(x), f(y)) \geqslant d(x, y)$. 试证 f 是 E 到 E 上的等距. (设 a, b 是 E 的任意两点; 令 $f_n = f_{n-1} \circ f$, $a_n = f_n(a)$, $b_n = f_n(b)$; 证明: 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在附标 k 使得 $d(a, a_k) \leqslant \varepsilon$ 与 $d(b, b_k) \leqslant \varepsilon$, 于是得出结论: $f(E)$ 是在 E 中稠的,并且 $d(f(a), f(b)) = d(a, b)$.)

5) 设 E, E' 是两个距离空间, f 是 E 到 E' 的映射. 试证: 若 f 在 E 的任意紧子空间上的限制都是连续的,则 f 在 E 中是连续的(利用(3.13.14)).

6) 设 E, E' 是两个距离空间, f 是 E 到 E' 的连续映射, K 是 E 的紧子

集，若 f 在 K 上的限制 $f|K$ 是单映射，并且对每个 $x\in K$，存在 x 在 E 中的邻域 V_x，使 f 在 V_x 上的限制 $f|V_x$ 是单映射．试证，存在 K 在 E 中的邻域 U，使限制 $f|U$ 是单映射（用反证法与(3.17.11)）。

18. 局部紧空间

我们称距离空间 E 是**局部紧的**，如果对每个 $x\in E$ 都存在 x 在 E 中的紧邻域．任意离散空间是局部紧的，但不是紧的，除非它有限(3.16.3).

(3.18.1) 实直线 $\boldsymbol{R}$ 是局部紧的，但不是紧的.

这由 Borel-Lebesgue 定理(3.17.6)直接推出.

(3.18.2) 设 A 是局部紧距离空间 E 中的紧集．则存在 $r>0$ 使得 $V_r(A)$ (见 3.6)在 E 中是相对紧的.

对每个 $x\in A$，都存在 x 的紧邻域 V_x；这些 $\mathring{V}_x$ 构成 A 的开覆盖，于是在 A 中存在有限子集 $\{x_1, \cdots, x_n\}$，使得 $\mathring{V}_{x_i}(1\leqslant i\leqslant n)$ 构成 A 的开覆盖．由(3.17.8)，集 $U=\bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$ 是紧的，并且是 A 的邻域；于是应用(3.17.11)，就得到要证明的结果.

(3.18.3) 设 E 是局部紧的距离空间．则下列性质是等价的：

a) 存在 E 中的相对紧的开集的递增序列 (U_n)，使得对每个 n 都有 $\overline{U}_n\subset U_{n+1}$，并且 $E=\bigcup_n U_n$；

b) E 是可数个紧子集的并；

c) E 是可分的.

由 a) 推得 b) 是显然的，因为 $\overline{U}_n$ 是紧的． 若 E 是紧集序列 (K_n) 的并，则(据(3.16.2))每个子空间 K_n 都是可分的；若 D_n 是 K_n 中的一个至多可数集，且关于 K_n 是稠的，则 $D=\bigcup_n D_n$ 是至多可数的，且在 E 中是稠的，因为 $E=\bigcup_n K_n\subset\bigcup_n \overline{D}_n\subset\overline{D}$；于是由 b) 推出 c)．最后假设 E 是可分的，并设 (V_n) 是 E 的至多可数个

开集的基(见(3.9.4))．对每个 $x\in E$，存在 x 的紧邻域 W_x，从而由(3.9.3)，存在附标 $n(x)$ 使得 $x\in V_{n(x)}\subset W_x$．于是推知那些是相对紧的 V_n 已经构成了 E 的开集的基．因此可以假定所有的 V_n 都是相对紧的，然后我们归纳地定义 U_n 如下：$U_1=V_1$，U_{n+1} 是 V_{n+1} 与 $V_r(\overline{U}_n)$ 的并，这里取 $r>0$ 使得 $V_r(\overline{U}_n)$ 是相对紧的(据(3.18.2)这是可能的)，于是很清楚，序列 (U_n) 证实了性质 a)．

(3.18.4) 在局部紧距离空间 E 中，每个开子空间与每个闭子空间都是局部紧的．

假设 A 是在 E 中开的；对每个 $a\in A$，都存在紧的闭球 $B'(a;r)$ (据局部紧空间的定义与(3.17.3))．另一方面，存在 $r'\leqslant r$ 使得球 $B'(a;r')$ 含于 A 中．因为据(3.17.3)，它是紧的，所以 A 是局部紧的．

假设 A 是在 E 中闭的，并设 $a\in A$；于是若 V 是 a 在 E 中的紧邻域，则由(3.10.4)，$V\cap A$ 是 a 在 A 中的邻域，而据(3.17.3)它是紧的，这就证明了 A 是局部紧的．

问　　题

1) 若 A 是距离空间 E 的局部紧子空间，证明 A 是在 E 中局部闭的(3.10节，问题 3)．若 E 是局部紧的，则逆命题也真(利用(3.18.4))．

2) a)试证：在一个局部紧距离空间中，两个局部紧子空间的交是局部紧的(参看问题 1)．

b) 在实直线上，举出两个局部紧子空间的例，使它们的并集不是局部紧的，再举出一个局部紧子空间的例，使它的余集不是局部紧的．

3) a)举出一个局部紧距离空间的例，使得它不是完备的．

b) 设 E 是一个距离空间，具有下面的性质：存在数 $r>0$，使得每个闭球 $B'(x;r)$ $(x\in E)$ 都是紧的．试证 E 是完备的，而且对于 E 的任意相对紧子集 A，满足 $d(x,A)\leqslant r/2$ 的点 $x\in E$ 的集 $V'_{r/2}(A)$ 是紧的．

19. 连通空间与连通集

距离空间 E 称为**连通的**，如果 E 的既开又闭的子集仅是空集

ϕ与集 E 本身．等价的叙述是：不存在 E 的这样一对非空开子集 A，B，满足 $A\cup B=E$，$A\cap B=\phi$. 退缩为单点的空间是连通的．距离空间 E 的子集 F 是连通的，如果 E 的子空间 F 是连通的．我们称距离空间 E 是**局部连通的**，如果对于每个 $x\in E$，都存在 x 的连通的基础邻域系．

(3.19.1) 实直线 $\boldsymbol{R}$ 的子集 A 连通的充要条件是：A 是一个区间（有界的或无界的）．实直线是连通的与局部连通的空间．

第二断言显然可由第一断言推出．假设 A 是连通的；若 A 退缩成单点，则 A 是区间．假设 A 包含两个不同的点 $a<b$. 我们来证明，每个 x，只要 $a<x<b$，都属于 A. 若不然，则 A 将是非空集 $B=A\cap]-\infty, x[$ 与 $C=A\cap]x,+\infty[$ 的并，这两个集都是在 A 中开的，并且 $B\cap C=\phi$. 从这个性质推出 A 必然是一个区间．事实上，设 $c\in A$，并设 p，q 是 A 在 $\bar{R}$ 中的下确界与上确界；若 $p=-\infty$，则对于每个 $x<c$，都存在 $y<x$ 属于 A；于是 $x\in A$，因此，$]-\infty, c]$ 含于 A 中；若 p 有限且 $p<c$，则对每个满足 $p<x<c$ 的 x 都存在 $y\in A$ 使得 $p<y<x$，故又有 $x\in A$，因此 A 包含区间 $]p, c]$. 类似地，可以证明 A 包含 $[c, q[$，如果 $q>c$；于是推出：在任何情况下，A 都包含区间 $]p, q[$，因而 A 必定是 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 中端点为 p，q 的四个区间之一（当然，若 $p=-\infty$（相应地，$q=+\infty$），则 p（相应地，q）不属于 A）.

反之，假设 A 是 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 中始点为 a，终点为 b 的区间（包括 $a=-\infty$，$a\notin A$，$b=+\infty$，$b\notin A$ 这种可能的情况）．假定 $A=B\cup C$，其中 B，C 是 A 中的非空开集且 $B\cap C=\phi$；例如，假设 $x\in B$，$y\in C$ 与 $x<y$. 设 z 是有界集 $B\cap[x, y]$ 的上确界；若 $z\in B$，则 $z<y$，并且据假设存在区间 $[z, z+h[$ 含于 $[x, y]$ 与 B 中，这与 z 的定义矛盾；另一方面，若 $z\in C$，则 $x<z$，并且，类似地，存在区间 $]z-h, z]\subset C\cap[x, y]$，这又与 z 的定义矛盾（见(2.3.4)）；于是 z 不能属于 B 也不能属于 C，这是荒谬的，因为闭集 $[x, y]$ 含于 A 中．于是 A 是连通的．

(3.19.2) 若 A 是距离空间 E 中的连通集，则任意满足 $A\subset B\subset\bar{A}$

的集 B 都是连通的.

假设 X, Y 是 B 中两个非空开集，且使 $X\cup Y=B$, $X\cap Y=\phi$，因 A 是在 B 中稠的，所以 $X\cap A$ 与 $Y\cap A$ 都非空，并且是在 A 中开的，而我们有 $(X\cap A)\cup(Y\cap A)=A$, $(X\cap A)\cap(Y\cap A)=\phi$，于是得出矛盾.

(3.19.3) 在距离空间 E 中，设 $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ 是连通集的族，且具有非空的交，则 $A=\bigcup\limits_{\lambda\in L}A_\lambda$ 是连通的.

设 a 是 $\bigcap\limits_{\lambda\in L}A_\lambda$ 的一个点，并设 $A=B\cup C$，其中 B, C 是 A 中的非空开集并且 $B\cap C=\phi$. 例如假定 $a\in B$; 据假设至少存在一个 λ 使得 $C\cap A_\lambda\neq\phi$; 其次由于 $B\cap A_\lambda\neq\phi$，以及 $B\cap A^\lambda$ 与 $C\cap A_\lambda$ 都是在 A_λ 中开的且满足 $(B\cap A_\lambda)\cup(C\cap A_\lambda)=A_\lambda$, $(B\cap A_\lambda)\cap(C\cap A_\lambda)=\phi$，于是得出矛盾.

(3.19.4) 设 $(A_i)_{1<i<n}$ 是连通集的序列，使得对于 $1\leqslant i\leqslant n-1$ 有 $A_i\cap A_{i+1}\neq\phi$; 则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 是连通的.

这立即由(3.19.3)通过对 n 用归纳法而推得.

从(3.19.3)推知: E 中包含点 $x\in E$ 的所有连通子集的并集 $C(x)$ 是连通的，于是得到包含 x 的最大连通集; 它称为 x 在 E 中的**连通分支**. 很清楚，对任意 $y\in C(x)$，我们有 $C(y)=C(x)$，若 $y\notin C(x)$，则 $C(x)\cap C(y)=\phi$; 此外，由(3.19.2)推知 $C(x)$ 是在 E 中闭的. 对 E 的任意子集 A，子空间 A 中点的连通分支称为 A 的连通分支; 如果 A 的每个连通分支都退缩成单点，则说 A 是**完全不连通的**.

离散空间是完全不连通的; 据(2.2.16)与(3.19.1)，有理数集与无理数集都是完全不连通的.

(3.19.5) 距离空间 E 为局部连通的充要条件是 E 中开集的连通分支都是开的.

条件是充分的，因若 V 是点 $x\in E$ 的任意开邻域，则 x 在子空

间V中的连通分支是含于V中的x的连通邻域，于是E是局部连通的.条件是必要的,因为,若E是局部连通的,A是E中的任意开集,B是A的任意连通分支,则对于任意$x\in B$，据假设，存在x的连通邻域V含于A中,又据B的定义$V\subset B$，因此B是它每一点的邻域,于是B是开集.

(31.9.6)　实直线$\mathbf{R}$中的任意非空开集A都是至多可数的开区间族的并,而且这些开区间中的任意两个都没有公共点.

从(3.19.1)与(3.19.5)推知A的连通分支都是开集的区间，于是都是开区间. A与有理数集$\mathbf{Q}$的交$A\cap\mathbf{Q}$是可数的，据(2.2.16),A的每个连通分支都包含$A\cap\mathbf{Q}$的点，于是$A\cap\mathbf{Q}$到A的连通分支的集$\mathfrak{C}$的映射$r\to C(r)$是满射的，因此，据(1.9.2)，$\mathfrak{C}$是至多可数的.

(3.19.7)　设f是E到E'的连续映射；则对于E的任意连通子集A，$f(A)$都是连通的.

假设$f(A)=M\cup N$，其中M与N是$f(A)$的非空子集，都是在$f(A)$中开的,而且满足$M\cap N=\phi$；则据(3.11.4),$A\cap f^{-1}(M)$与$A\cap f^{-1}(N)$都是非空集且是在A中开的，使得$A=(A\cap f^{-1}(M))\cup(A\cap f^{-1}(N))$与$(A\cap f^{-1}(M))\cap(A\cap f^{-1}(N))=\phi$，因而与假设矛盾.

(3.19.8)　(Bolzano 定理). 设E是连通空间，f是E到实直线$\mathbf{R}$的连续映射，假设a，b是$f(E)$的两个点且$a<b$. 则对于任意这样的c，$a<c<b$，都存在$x\in E$使得$f(x)=c$.

因为据(3.19.7)，$f(E)$是$\mathbf{R}$中的连通集,于是由(3.19.1)它是一个区间.

(3.19.9)　设A是距离空间E的子集. 若B是E的连通子集,使得$A\cap B$与$(E-A)\cap B$都不空,则$(\mathrm{Fr}(A))\cap B$也不空. 特别,若E是连通的，则E的任一异于E与ϕ的子集A都至少有一个边缘点.

假设$(\mathrm{Fr}(A))\cap B=\phi$；令$A'=E-A$；因为$E$是$\mathring{A}$，$\mathring{A}'$与$\mathrm{Fr}(A)$的并,所以$B$是$U=\mathring{A}\cap B$与$V=\mathring{A}'\cap B$的并，这两个集

都是在 B 中开的，并且据假设都非空（因为 $A\cap B$ 的点必属于 $\mathring{A}\cap B$，这是由于 $\mathrm{Fr}(A)\cap B=\phi$，对于 $A'\cap B$，情形一样），因 $U\cap V=\phi$，所以这与 B 连通的假设矛盾.

附注．如果我们同意把 $\boldsymbol{R}$ 的区间在连续映射下的象称为“曲线”（见 4.2 节问题 5），则（3.19.7）表明“曲线”是连通的，而（3.19.9）表明连接 A 的点与 $E-A$ 的点的“曲线”与 $\mathrm{Fr}(A)$ 相交，这与“连通性”的直观意义相符合（见问题 3 与 5.1 节问题 4）.

问　　题

1）设 E 是连通的距离空间，它的距离无界，试证 E 中每个球面都非空.

2）a）设 E 是紧距离空间，且 E 中任意开球 $B(a;r)$ 的闭包就是闭球 $B'(a,r)$，试证 E 中任意开球 $B(a;r)$ 是连通的.（假设 $B(a;r)$ 是两个非空集的并 $C\cup D$，它们在 $B(a;r)$ 中是开的，且使得 $C\cap D=\phi$；若 $a\in C$，则考虑使距离 $d(a,x)$ 为最小的点 $x\in D$（3.17.10）.）

b）举出一个完全不连通距离空间的例，使其中任意开球 $B(a;r)$ 的闭包都是闭球 $B'(a;r)$.

c）在距离 $d(x,y)=\max(|x_1-y_1|,|x_2-y_2|)$ 的平面 $\boldsymbol{R}^2$ 中，设 E 是由满足下述条件的点 (x_1,x_2) 组成的紧子空间：$x_1=0$ 而 $0\leqslant x_2\leqslant 1$ 或者 $0\leqslant x_1\leqslant 1$ 而 $x_2=0$. 试证：在 E 中每个球都是连通的．但是开球 $B(a;r)$ 的闭包不一定是 $B'(a;r)$.

3）在平面 $\boldsymbol{R}^2$ 中，设 E 是由满足下述条件的点 (x,y) 组成的子空间：x 是无理数而 $0\leqslant y\leqslant 1$，或者 x 是有理数而 $-1\leqslant y<0$.

a）试证 E 是连通的但不是局部连通的（利用（3.19.1）与（3.19.6）研究 E 的既开又闭的子集的结构）.

b）设 $t\mapsto(f(t),g(t))$ 是区间 $[0,1]$ 到 E 的连续映射（f 与 g 都是连续的）．试证 f 是常值的．（如果存在点 $t_0\in[0,1]$ 使得 $g(t_0)<0$，则考虑由所有使 $g(t)<0$ 的集组成的开子集 $U\subset[0,1]$，并利用（3.19.6）.）换句话说，存在 E 中不同的点对，它们与 E 中的曲线不相交.

4）在距离空间 E 中，设 A 与 B 是两个连通集且 $\bar{A}\cap B\neq\phi$，试证 $A\cup B$ 是连通的.

5）设 A 与 B 是距离空间 E 的两个非空子集．试证，若 A 与 B 都是闭的，且 $A\cup B$ 与 $A\cap B$ 都是连通的，则 A 与 B 都是连通的．在实直线上举例说明

A 与 B 都闭的假设不能除去.

6) 设 E 是至少有两个点的连通距离空间.

a) 设 A 是 E 的连通子集，B 是 CA 的子集，且关于 CA 是既开又闭的，试证 $A\cup B$ 是连通的(把3.10 节问题 1 应用到 $A\cup B$ 与 CA 这两个集上).

b) 设 A 是 E 的连通子集，B 是 CA 的连通分支，试证 CB 是连通的 (应用 a) 间接证明).

c) 试证在 E 中存在两个非空连通子集 M, N 使得 $M\cup N=E$, $M\cap N=\phi$, (利用 b)).

7) 在可数距离空间 E 中，试证每一点都具有由既开又闭的邻域组成的基础邻域系.

8) a) 在距离空间 E 中，点 x 的连通分支含于每个含有 x 的既开又闭的集中.

b) 在平面 R^2 中，设 A_n 是偶 $(1/n, y)$ 的集，其中 $-1\leqslant y\leqslant 1$，B 是偶 $(0, y)$ 的集，其中 $0<y\leqslant 1$，C 是偶 $(0, y)$ 的集，其中 $-1\leqslant y<0$; 设 E 是 R^2 的子空间，它是 B, C 与那些使 $n\geqslant 1$ 的 A_n 的并集. 试证: E 是 R^2 的局部紧子空间，但不是局部连通的; E 的连通分支是 B, C 与那些 $A_n(n\geqslant 1)$，但是含有 B 的点的所有既开又闭集的交是 $B\cup C$.

9) 设 E 是局部紧距离空间.

a) 设 C 是 E 的紧的连通分支，试证 C 是 C 的所有既开又闭的邻域的交. (利用(3.18.2)把问题化为 E 是紧的情形. 假设 C 的所有既开又闭的邻域的交 B 不同于 C; 则 B 是两个没有公共点的闭集 $M\supset C$ 与 N 的并. 考虑 E 中两个没有公共点的开集 $U\supset M$ 与 $V\supset N$ (3.11 节，问题 3)，并研究 $E-(M\cup N)$ 与 C 的既开又闭邻域之余的交.)

b) 假设 E 是连通的，并设 A 是 E 的相对紧开子集，试证 A 的每个连通分支都至少有一个触点在 CA 中(如果不然，则把 a) 应用到这个连通分支上，就得出矛盾).

c) 由 b) 推证: 对 E 的每个紧子集 K, K 的任一连通分支与 $\overline{E-K}$ 的交非空.

20. 两个距离空间的积

设 E_1, E_2 是两个距离空间，d_1, d_2 分别是 E_1 与 E_2 上的距离. 对于 $E=E_1\times E_2$ 中的任意点对 $x=(x_1, x_2)$, $y=(y_1, y_2)$，令

$$d(x, y) = \max(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)).$$

立可验证这个函数满足 3.1 节的公理 (I)—(IV)，换句话说，它是 E 上的距离；取 d 作为 E 上的距离而获得的距离空间称为距离空间 E_1 与 E_2 的积. $E_1 \times E_2$ 到 $E_2 \times E_1$ 上的映射 $(x_1,x_2) \to (x_2,x_1)$ 是一个等距.

我们注意到，由

$$d'(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2),$$

$$d''(x,y) = \sqrt{(d_1(x_1, y_1))^2 + (d_2(x_2, y_2))^2}$$

定义的两个函数 d', d'' 也是 E 上的距离，这很容易验证，而且它们一致等价于 d (见 3.14)，因为我们有

$$d(x, y) \leqslant d''(x, y) \leqslant d'(x, y) \leqslant 2d(x, y).$$

因此，对于一切涉及拓扑性质(或 Cauchy 序列与一致连续函数)的问题，不论在 E 上取 d, d', d'' 中的哪一个作距离都是等价的. 当没有相反的声明时，我们在 E 上将总是考虑距离 d. 对于距离 d, d_1, d_2 的开球(相应地，闭球)将分别记为 B, B_1, B_2 (相应地，B', B'_1, B'_2) 以代替用到现在为止的统一记号 B (相应地，B').

(3.20.1) 对于任意点 $a = (a_1, a_2) \in E$ 与任意 $r > 0$，我们有 $B(a; r) = B_1(a_1; r) \times B_2(a_2; r)$ 与 $B'(a; r) = B'_1(a_1; r) \times B'_2(a_2; r)$.

这立即由 d 的定义推出.

(3.20.2) 若 A_1 是 E_1 中的开集，A_2 是 E_2 中的开集，则 $A_1 \times A_2$ 是在 $E_1 \times E_2$ 中开的.

因为若 $a = (a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$，则存在 $r_1 > 0$ 与 $r_2 > 0$，使得 $B_1(a_1; r_1) \subset A_1$ 与 $B_2(a_2; r_2) \subset A_2$. 取 $r = \min(r_1, r_2)$，则由 (3.20.1)，有 $B(a; r) \subset A_1 \times A_2$.

(3.20.3) 对于任意一对非空集 $A_1 \subset E_1$, $A_2 \subset E_2$，都有 $\overline{A_1 \times A_2} = \overline{A}_1 \times \overline{A}_2$；特别地，$A_1 \times A_2$ 在 E 中为闭的充要条件是 A_1 在 E_1 中闭与 A_2 在 E_2 中闭.

若 $a = (a_1, a_2) \in \overline{A}_1 \times \overline{A}_2$，对于任意 $\varepsilon > 0$，据假设，都存在 $x_1 \in A_1$ 与 $x_2 \in A_2$，使得 $d_1(a_1, x_1) < \varepsilon$, $d_2(a_2, x_2) < \varepsilon$，于是

若 $x=(x_1, x_2)$，则 $d(a, x)<\varepsilon$. 另一方面，若 $(a_1,a_2)\notin \overline{A}_1\times\overline{A}_2$，则或者 $a_1\notin \overline{A}_1$ 或者 $a_2\notin \overline{A}_2$，在第一种情形下，据(3.20.2)集 $(E_1-\overline{A}_1)\times E_2$ 是在 E 中开的，它包含 a 而且与 $A_1\times A_2$ 不相交，于是 $a\notin \overline{A_1\times A_2}$；另一种情形可类似地处理.

(3.20.4) 设 $z\to f(z)=(f_1(z), f_2(z))$ 是距离空间 F 到 $E=E_1\times E_2$ 的映射，为使 f 在点 z_0 连续，必须且只须 f_1 与 f_2 都在 z_0 连续.

设 $x_0=(f_1(z_0), f_2(z_0))$；则由(3.20.1)，我们有

$f^{-1}(B(x_0; r))=f_1^{-1}(B_1(f_1(z_0); r))\cap f_2^{-1}(B_2(f_2(z_0); r))$，

因而结果由(3.11.1)与(3.6.3)推出.

(3.20.5) 设 $f=(f_1, f_2)$ 是距离空间 F 的子空间 A 到 $E_1\times E_2$ 的映射，并设 $a\in\overline{A}$；则 f 在点 a 对于 A 有极限的充要条件是极限

$$b_1=\lim_{z\to a, z\in A} f_1(z), \quad b_2=\lim_{z\to a, z\in A} f_2(z)$$

同时存在，并且 f 的极限 $b=(b_1, b_2)$.

这立即由(3.20.4)与极限的定义推出.

特别地：

(3.20.6) $E=E_1\times E_2$ 中的点列 $z_n=(x_n, y_n)$ 收敛的充要条件是极限 $a=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$，$b=\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 同时存在，并且 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=(a, b)$.

附注. 对于序列的触值，若 (a,b) 是 $((x_n,y_n))$ 的触值，则 a 是 (x_n) 的触值，b 是 (y_n) 的触值，这是由 (3.20.6) 与触值的定义推出的；但是可以遇到即使 (x_n) 和 (y_n) 都有触值，$((x_n, y_n))$ 也没有触值的情形，例如，在平面 $\boldsymbol{R}^2$ 中，取 $x_{2n}=1/n$，$y_{2n}=n$，$x_{2n+1}=n$，$y_{2n+1}=1/n$. 然而，若 (x_n) 有极限 a，且 b 是 (y_n) 的触值，则 (a, b) 是 $((x_n, y_n))$ 的触值，这是由(3.20.6)推知的.

(3.20.7) $E_1\times E_2$ 中的点列 $z_n=(x_n, y_n)$ 为 Cauchy 序列的充要条件是序列 (x_n) 与 (y_n) 都是 Cauchy 序列.

这立即由 $E_1\times E_2$ 中距离的定义与 Cauchy 序列的定义推得.

(3.20.8) 设 $z\to f(z)=(f_1(z), f_2(z))$ 是距离空间 F 到 $E_1\times E_2$

的映射，为使 f 一致连续，必须且只须 f_1 与 f_2 都一致连续.

这由定义立即推出.

(3.20.9) 若 E 是距离空间，d 是 E 上的距离，则 $E\times E$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的映射 d 是一致连续的.

因为三角不等式给出 $|d(x,y)-d(x',y')|\leqslant d(x,x')+d(y,y')$.

(3.20.10) 射影 pr_1 与 pr_2 在 $E=E_1\times E_2$ 中是一致连续的.

把(3.20.8)应用到 E 上的恒等映射即得.

(3.20.11) 对于任意 $a_2\in E_2$（相应地，$a_1\in E_1$），映射 $x_1\to(x_1,a_2)$（相应地，$x_2\to(a_1,x_2)$）是 E_1（相应地，E_2）到 $E_1\times E_2$ 的闭子空间 $E_1\times\{a_2\}$（相应地，$\{a_1\}\times E_2$）上的一个等距.

这是 $E_1\times E_2$ 中距离的定义与(3.20.3)的明显结果.

(3.20.12) 对于 $E_1\times E_2$ 中的任意开（相应地，闭）集 A 与任意点 $a_1\in E_1$，集 $A(a_1)=\mathrm{pr}_2(A\cap(\{a_1\}\times E_2))$ 是在 E_2 中开的（相应地，闭的）.

据(3.20.11)，只要证明集 $A\cap(\{a_1\}\times E_2)$ 是在 $\{a_1\}\times E_2$ 中开的（相应地，闭的）就够了，而这可由(3.10.1)与(3.10.5)推出.

(3.20.13) 对于 $E_1\times E_2$ 中的任意开集 A，pr_1A（相应地，$\mathrm{pr}_2(A)$）是在 E_1（相应地，E_2）中开的.

事实上，我们可以写出 $\mathrm{pr}_2A=\bigcup\limits_{x_1\in E_1}A(x_1)$，于是结果由(3.20.12)与(3.5.2)推出.

附注. 当 A 在 $E_1\times E_2$ 中闭时，pr_1A 不一定在 E_1 中闭. 例如，在平面 $\boldsymbol{R}^2$ 中，方程 $x_1x_2=1$ 的曲线是闭集，但是它的两个射影都等于 $\boldsymbol{R}$ 中 $\{0\}$ 的余，它是非闭的.

(3.20.14) 设 f 是 $E=E_1\times E_2$ 到距离空间 F 的映射，若 f 在点 (a_1,a_2) 连续（相应地，一致连续），则映射 $x_1\to f(x_1,a_2)$ 在 a_1 连续（相应地，一致连续）.

这个映射可以写成：$x_1\to(x_1,a_2)\to f(x_1,a_2)$，于是结果由(3.20.11)，(3.11.5)与(3.11.9)推出.

(3.20.14)的逆一般不成立，典型的反例是在 $\boldsymbol{R}^2$ 中由

$$\begin{cases} f(x, y) = xy/(x^2 + y^2), \text{当 } (x, y) \neq (0, 0)\text{时}, \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}$$

定义的函数 f；f 在(0.0)是不连续的，因为对于 $x \neq 0$，$f(x, x) = 1/2$.

(3.20.15) 设 E_1，E_2，F_1，F_2 是四个距离空间，f_1（相应地，f_2）是 E_1 到 F_1（相应地，E_2 到 F_2）的映射，为使 $E_1 \times E_2$ 到 $F_1 \times F_2$ 的映射 f: $(x_1, x_2) \rightarrow (f_1(x_1), f_2(x_2))$ 在点 (a_1, a_2) 连续（相应地，一致连续），必须且只须 f_1 在 a_1 连续，f_2 在 a_2 连续(相应地，f_1 与 f_2 都一致连续).

映射 $(x_1, x_2) \rightarrow f_1(x_1)$ 可以写成 $f_1 \circ \mathrm{pr}_1$，于是条件的充分性由(3.20.4)，(3.20.8)与(3.20.10)推出．另一方面，映射 f_1 可以写成 $x_1 \rightarrow \mathrm{pr}_1(f(x_1, a_2))$，于是条件的必要性由(3.20.14)与(3.20.10)推出.

(3.20.16) 设 E_1，E_2 是两个非空距离空间，为使 $E = E_1 \times E_2$ 是下列各种类型的空间之一，必须且只须 E_1 与 E_2 也都是那同一种类型的空间:

(i) 离散的;

(ii) 有界的，

(iii) 可分的;

(iv) 完备的;

(v) 紧的;

(vi) 准紧的;

(vii) 局部紧的;

(viii) 连通的;

(ix) 局部连通的;

对性质(i)到(vii)必要性部分的证明，采用一般的样式，由(3.20.11)推得: E_1 与 E_2 等距于 $E_1 \times E_2$ 的闭子空间；然后我们注意性质(i)到(vii)都被闭子空间继承(对于(i)与(ii)是显然的，对于性质(iii)到(vii)，已在(3.10.9)，(3.14.5)，(3.17.3)，

(3.18.4)中证明)对于性质(viii)，必要性由把(3.19.7)应用到射影 pr_1 与 pr_2 上而得到，类似地，若 E 是局部连通的，则对于任意 $(a_1, a_2) \in E$ 与 a_1 在 E_1 中的任意邻域 V_1，$V_1 \times E_2$ 都是 (a_1, a_2) 的邻域，于是包含 (a_1, a_2) 的一个连通邻域 W；但是据(3.19.7)与(3.20.13)，$pr_1 W$ 是 a_1 的连通邻域且含在 V_1 中.

对(i)和(ii)，条件的充分性是 $E_1 \times E_2$ 中距离定义的直接推论. 对于(iii)，若 D_1，D_2 是至多可数的，并且分别在 E_1，E_2 中稠密，则据(1.9.3) $D_1 \times D_2$ 是至多可数的，又据(3.20.3)它是在 E 中稠密的. 对于(iv)，若 (z_n) 是 E 中的 Cauchy 序列，则据(3.20.7)，$(pr_1 z_n)$ 与 $(pr_2 z_n)$ 分别是 E_1 与 E_2 中的 Cauchy 序列，于是它们分别收敛于 a_1，a_2，因此，由(3.20.6)，(z_n) 收敛于 (a_1, a_2). 对于(vi)，若 (A_i)（相应地，(B_j)）是由直径 $<\varepsilon$ 的集组成 E_1（相应地，E_2）的有限覆盖，则 $(A_i \times B_j)$ 是由直径 $<\varepsilon$ 的集组成的 $E_1 \times E_2$ 的有限覆盖，又据(3.16.1)，(iv)与(vi)的条件的充分性也得到了(v)的条件的充分性. 对于(v)的证明得出(vii)的证明，只要我们记住 $E_1 \times E_2$ 中邻域的定义. 对于(viii)，设 (a_1, a_2)，(b_1, b_2) 是 E 的任意两点，据(3.20.11)与假设，集 $\{a_1\} \times E_2$ 与 $E_1 \times \{b_2\}$ 是连通的，并有公共点 (a_1, b_2). 于是，由(3.19.3)，它们的并是连通的，并且包含 (a_1, a_2) 与 (b_1, b_2)，因此，(a_1, a_2) 在 E 中的连通分支是 E 本身. 上述论证也得到了(ix)的条件的充分性，只要记住 E 中邻域的定义.

(3.20.17) $E_1 \times E_2$ 的子集 A 相对紧的充要条件是 $pr_1 A$ 与 $pr_2 A$ 分别在 E_1 与 E_2 中相对紧.

必要性由把(3.17.9)应用到 pr_1 与 pr_2 上得到；充分性由(3.20.16)，(3.20.3)与(3.17.4)推得.

本节讨论的所有定义与定理都可以立即推广到有限个距离空间的积.

问　　题

1) 设 E，F 是两个距离空间，A 是 E 的子集，B 是 F 的子集；试证 $Fr(A$

$\times B) = (\mathrm{Fr}(A) \times \bar{B}) \cup (\dot{\bar{A}} \times \mathrm{Fr}(B))$.

2）设 E, F 是两个连通的距离空间，$A \neq E$ 是 E 的子集，$B \neq F$ 是 F 的子集；试证在 $E \times F$ 中，$A \times B$ 的余是连通的.

3）a）设 E, F 是两个距离空间，A（相应地，B）是 E（相应地，F）的紧子集. 若 W 是 $A \times B$ 在 $E \times F$ 中的任意邻域，试证存在 A 在 E 中的邻域 U 与 B 在 F 中的邻域 V 使得 $U \times V \subset W$（先考虑 B 退化为单点的情形）.

b）设 E 是紧距离空间，F 是距离空间，A 是 $E \times F$ 的闭子集. 试证：A 到 F 的射影是闭集（利用 a）证明 $\mathrm{pr}_2 A$ 的余是开的）.

c）反之，设 E 是这样的距离空间，使得对每个距离空间 F 与 $E \times F$ 的每个闭子集 A，A 到 F 的射影都是在 F 中闭的. 试证 E 是紧的（若不然，则在 E 中存在没有触值的序列 (x_n). 把 F 取为由 0 与点 $1/n$（n 是整数 $\geqslant 1$）组成的 R 的子空间，并考虑 $E \times F$ 中点 $(x_n, 1/n)$ 的集.）

4）设 E 是紧距离空间，F 是距离空间，A 是 $E \times F$ 的闭子集，B 是 A 到 F 的射影（闭的）. 设 $y_0 \in B$，并设 C 是截口 $A^{-1}(y_0) = \{x \in E \mid (x, y_0) \in A\}$. 试证对于 C 在 E 中的任意邻域 V，存在 y_0 在 F 中的邻域 W，使得只要 $y \in W$，就有 $A^{-1}(y) \subset V$（"由参数决定的方程'根'的连续性"）（应用问题 3a））.

5）a）设 f 是距离空间 E 到距离空间 F 的映射，又设 G 是 f 在 $E \times F$ 中的图象. 试证若 f 连续，则 G 是在 $E \times F$ 中闭的，并且 pr_1 在 G 上的限制是 G 到 E 上的同胚.

b）反之，若 F 是紧的，G 是在 $E \times F$ 中闭的，则 f 是连续的（应用问题 3b））.

c）设 F 是这样的距离空间：对任意距离空间 E，E 到 F 的任意映射，只要它的图是在 $E \times F$ 中闭的，则都是连续的. 试证 F 是紧的（应用问题 3c）的构造法）.

6）设 E, F, G 是三个距离空间，A 是 $E \times F$ 的子集，B 是 $F \times G$ 的子集，$C = B \circ A = \{(x, z) \in E \times G \mid \exists y \in F$ 使得 $(x, y) \in A, (y, z) \in B\}$. 假设 A 与 B 都是闭的以及 A 到 F 的射影是相对紧的；试证 C 是在 $E \times G$ 中闭的（应用问题 3b））.

7）设 $(E_n)(n \geqslant 1)$ 是非空距离空间的无穷序列，并假定对每个 n，E_n 上的距离 d_n 都使得 E_n 的直径 $\leqslant 1$（见 3.14 节，问题 2b））. 设 E 是所有序列 $x = (x_n)$ 的集，这里对每个 n 都有 $x_n \in E_n$（序列 (E_n) 的"无穷积"；我们记为 $E = \prod_{n=1}^{\infty} E_n$）.

a) 试证：在 E 上，函数 $d((x_n),(y_n))=\sum_{n=1}^{\infty} d_n(x_n, y_n)/2^n$ 是一个距离.

b) 对于任意 $x=(x_n)\in E$，任意整数 $m\geqslant 1$ 与任意数 $r>0$，设 $V_m(x;r)$ 是所有这样的 $y=(y_n)\in E$ 的集：使得对于 $k\leqslant m$，有 $d_k(x_k,y_k)<r$. 试证这些集 $V_m(x;r)$（对于所有的 m 与 r）构成 x 在 E 中的基础邻域系.

c) 设 $(x^{(m)})$ 是 E 中点 $x^{(m)}=(x_n^{(m)})_{n\geq 1}$ 的序列；为使 $(x^{(m)})$ 收敛于 E 中的 $a=(a_n)$（相应地，是 E 中的 Cauchy 序列），必须且只须对每个 n，序列 $(x_n^{(m)})_{m\geq 1}$ 都收敛于 E_n 中的 a_n（相应地，是 E_n 中的 Cauchy 序列）. 若要 E 是完备空间，必须且只须每个 E_n 都是完备的.

d) 对每个 n，设 A_n 是 E_n 的子集：试证 $A=\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ 在 E 中的闭包等于 $\prod_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n$.

e) 为使 E 是准紧的（相应地，紧的）必须且只须每一个 E_n 都是准紧的（相应地，紧的）.

f) 为使 E 是局部紧的，必须且只须每个 E_n 都是局部紧的，而且所有的 E_n，最多除去有限个以外都是紧的.

g) 为使 E 是连通的，必须且只须每个 E_n 都是连通的.

h) 为使 E 是局部连通的，必须且只须每一个 E_n 都是局部连通的，而且所有的 E_n，最多除去有限个以外，都是连通的.

第四章　实直线的补充性质

实直线的许多性质已在第三章中讲述过了，是与该章中讨论的各种拓扑概念联系在一起讲的．本章所收集的性质，大部分都是初等的与经典的，没有上述的直接联系，而真正是使实直线在更一般的空间中占有特殊地位的性质．对数与指数函数的引进略带非正统的方式，以对数而不是以指数开始．这具有技巧上的优点，使得没有必要为对任意 x 定义 a^x 而首先定义 $a^{m/n}$（m, n 是整数 >0）．

Tietze-Urysohn 定理(4.5)目前在泛函分析与代数拓扑二者之中都占有中心地位．可以认为它是研究一般延拓问题，即把空间 E 的闭子集 A 到空间 F 的连续映射延拓成整个空间 E 到 F 的连续映射的第一步．这个一般问题自然地引向现代代数拓扑中那些最重要、也是被人们最积极地研究着的问题．

1. 代数运算的连续性

(4.1.1) $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的映射 $(x, y)\to x+y$ 是一致连续的．

这立即可由不等式

$$|(x'+y')-(x+y)|\leqslant|x'-x|+|y'-y|$$

与定义推得．

(4.1.2) $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的映射 $(x, y)\to xy$ 是连续的；对于任意 $a\in\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的映射 $x\to ax$ 是一致连续的．

xy 在点 (x_0, y_0) 的连续性可由恒等式

$$xy-x_0y_0=x_0(y-y_0)+(x-x_0)y_0+(x-x_0)(y-y_0)$$

推得．任意给定 $\varepsilon>0$，取 δ 使得 $0<\delta<1$ 并且 $\delta(|x_0|+|y_0|+1)<\varepsilon$；则关系 $|x-x_0|<\delta$, $|y-y_0|<\delta$ 蕴含 $|xy-x_0y_0|$

$<\varepsilon$. $x\to ax$ 的一致连续性立即可得，因为 $|ax'-ax|=|a|\cdot|x'-x|$.

(4.1.3) $\boldsymbol{R}$ 到其自身中的任意连续映射 f，如果满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，则它是 $x\to cx$ 型的，其中 $c\in\boldsymbol{R}$.

事实上，对每个整数 $n>0$，关于 n 用归纳法，我们有 $f(nx)=nf(x)$；另一方面 $f(0+x)=f(0)+f(x)$，于是 $f(0)=0$，又 $f(x+(-x))=f(x)+f(-x)=f(0)=0$，因此 $f(-x)=-f(x)$. 由此推出对任意整数 $n>0$，$f(x/n)=f(x)/n$，故对任意一对整数 p,q，满足 $q>0$，都有 $f(px/q)=pf(x)/q$；换句话说，对任意有理数 r 都有 $f(rx)=rf(x)$. 但是，任意实数 t 都是某个有理数序列 r_n 的极限（据 (2.2.16) 与 (3.13.13))，于是由对 f 的假设及 (4.1.2) 得到 $f(tx)=f(\lim\limits_{n\to\infty}r_nx)=\lim\limits_{n\to\infty}f(r_nx)=\lim\limits_{n\to\infty}r_nf(x)=f(x)\cdot\lim\limits_{n\to\infty}r_n=tf(x)$. 然后令 $c=f(1)$，我们就得到对每个 $x\in\boldsymbol{R}$，$f(x)=cx$.

(4.1.4) 映射 $x\to 1/x$ 在 $\boldsymbol{R}$ 的每一点 $x_0\neq 0$ 都是连续的.

对于任意给定的 $\varepsilon>0$，取 $\delta>0$，使得 $\delta<\min(|x_0|/2,\varepsilon|x_0|^2/2)$；则关系式 $|x-x_0|<\delta$ 首先蕴含 $|x|>|x_0|-\delta>|x_0|/2$，然后有 $|1/x-1/x_0|=|x-x_0|/|xx_0|\leqslant 2|x-x_0|/|x_0|^2<\varepsilon$.

(4.1.5) 任意有理函数 $(x_1,\cdots,x_n)\to P(x_1,\cdots,x_n)/Q(x_1,\cdots,x_n)$（其中 P 与 Q 是实系数多项式）在 R^n 的每一点 $(a_1,\cdots,a_n)$ 都是连续的，只要 $Q(a_1,\cdots,a_n)\neq 0$.

R^n 中单项式的连续性可由 (4.1.2) 通过对其次数使用归纳法而证得. 其次，P 与 Q 的连续性可由 (4.1.1) 通过对其项数使用归纳法而证得，最后结果由 (4.1.4) 推得.

(4.1.6) 映射 $(x,y)\to\sup(x,y)$ 与 $(x,y)\to\inf(x,y)$ 在 $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ 中是一致连续的.

因为 $\sup(x,y)=(x+y+|x-y|)/2$ 与 $\inf(x,y)=(x+y-|x-y|)/2$，所以结果由 (4.1.1) 与 (3.20.9) 推得.

(4.1.7) $\boldsymbol{R}$ 中的所有开区间都是与 $\boldsymbol{R}$ 同胚的.

由 (4.1.1) 与 (4.1.2) 推得任意线性函数 $x \to ax + b$，其中 $a \neq 0$，都是 $\boldsymbol{R}$ 到其自身上的一个同胚，因为其逆映射 $x \to a^{-1}x - a^{-1}b$ 具有同样的形式. 任意两个有界的开区间 $]\alpha, \beta[$，$]\gamma, \delta[$ 都在某个映射 $x \to ax + b$ 之下相互为象，因而是同胚的. 现在考虑 $\boldsymbol{R}$ 到 $]-1, +1[$ 上的映射 $x \to x/(1 + |x|)$；其逆映射是 $x \to x/(1 - |x|)$，这两个映射都是连续的，因为 $x \to |x|$ 是连续的. 这就证明了 $\boldsymbol{R}$ 是同胚于任意有界开区间的；最后，在上述 $\boldsymbol{R}$ 到 $]-1, +1[$ 上的同胚下，$\boldsymbol{R}$ 的任意无界开区间 $]a, +\infty$，[或 $]-\infty, a[$ 都被映射到一个含于 $]-1, +1[$ 中的有界开区间上，于是这些区间也都同胚于 $\boldsymbol{R}$.

(4.1.8) 对于 $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$，函数 $(x, y) \to x + y$ 在 $\bar{\boldsymbol{R}} \times \bar{\boldsymbol{R}}$ 的每一点 (a, b) 都有一个极限，除在点 $(-\infty, +\infty)$ 与 $(+\infty, -\infty)$ 例外；如果坐标 a, b 中至少有一个是 $+\infty$（相应地，$-\infty$），则上述极限等于 $+\infty$（相应地，$-\infty$）.

例如，我们证明：如果 $a \neq -\infty$，则 $x + y$ 在点 $(a, +\infty)$ 有一个极限，等于 $+\infty$. 给定 $c \in \boldsymbol{R}$，关系 $x > b$，$y > c - b$ 蕴含 $x + y > c$，而当 b 取为有限数且 $< a$ 时，区间 $]b, +\infty]$ 与 $]c - b, +\infty]$ 就分别是 a 与 $+\infty$ 的邻域；于是得到我们的断言. 其他情形可同样处理.

(4.1.9) 对于 $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$，函数 $(x, y) \to xy$ 在 $\bar{\boldsymbol{R}} \times \bar{\boldsymbol{R}}$ 的每一点 (a, b) 都有一个极限，除在点 $(0, +\infty)$，$(0, -\infty)$，$(+\infty, 0)$，$(-\infty, 0)$ 例外；如果坐标 a, b 中至少有一个是无穷的，并且它们有相同的符号（相应地，相反的符号），则上述极限等于 $+\infty$（相应地，$-\infty$）.

例如，我们证明：如果 $a > 0$，则 xy 在点 $(a, +\infty)$ 有极限 $+\infty$. 给定 $c \in \boldsymbol{R}$，对于 $b > 0$，关系 $x > b$，$y > c/b$ 蕴含 $xy > c$. 而区间 $]b, +\infty]$ 与 $]c/b, +\infty]$，当 b 被取为有限数且 $< a$ 时，就是 a 与 $+\infty$ 的邻域. 结论得证. 其他情形的证明与此类似.

我们省略下列两条性质的证明：

(4.1.10) $\lim_{x\to\pm\infty} 1/x = 0$; $\lim_{x\to 0, x>0} 1/x = +\infty$, $\lim_{x\to 0, x<0} 1/x = -\infty$.

(4.1.11) 映射 $(x,y)\to\sup(x,y)$ 与 $(x,y)\to\inf(x,y)$ 在 $\bar{R}\times\bar{R}$ 中是连续的.

2. 单调函数

设 E 是广义实直线 $\bar{R}$ 的一个非空子集. 我们称 E 到 $\bar{R}$ 的映射 f 是**递增的**(**严格递增的**,**递减的**,**严格递减的**),如果关系 $x<y$ (在 E 中)蕴含 $f(x)\leqslant f(y)$($f(x)<f(y)$, $f(x)\geqslant f(y)$, $f(x)>f(y)$); 一个递增或递减(严格递增或严格递减)的函数称为**单调的**(**严格单调的**); 一个严格单调映射是单射的. 如果 f, g 是递增的,且 $f+g$ 有定义,则 $f+g$ 也是递增的; 若再加上 f 与 g 都是有限的,且其中之一是严格递增的,则 $f+g$ 是严格递增的.

(4.2.1) 设 E 是 $\bar{R}$ 的非空子集, $a=\sup E$; 对于 E 到 $\bar{R}$ 中的任一单调映射 f, $\lim_{x\to a, x\in E} f(x)$ 存在,并且当 f 递增时等于 $\sup_{x\in E} f(x)$, 当 f 递减时等于 $\inf_{x\in E} f(x)$.

例如,假设 f 是递增的, 且 $c=\sup_{x\in E} f(x)$. 若 $c=-\infty$, 则 f 在 E 中是常数(等于 $-\infty$),结果是显而易见的;若 $c>-\infty$, 则对任意 $b<c$,存在 $x\in E$ 使得 $b<f(x)\leqslant c$; 于是,根据假设,对于 $y\in E$ 与 $x\leqslant y\leqslant a$, 我们有 $b<f(x)\leqslant f(y)\leqslant c$, 因此得到我们的结论.

(4.2.2) 设 I 是 $\bar{R}$ 中的区间; I 到 $\bar{R}$ 中的任意连续单射 f 是严格单调的; I 到 $\bar{R}$ 上的任意连续严格单调映射 f 是 I 到区间 $f(I)$ 上的同胚.

a) 假设 f 是连续的与单射的; 设 a, b 是 I 的两个点使得 $a<b$, 例如再设 $f(a)<f(b)$. 那么, 对于 $a<c<b$, 必定有 $f(a)<f(c)<f(b)$; 理由是, 我们的假设蕴含 $f(c)\neq f(b)$, $f(c)\neq f(a)$. 如果有, 例如, $f(c)>f(b)$, 则根据 Bolzano 定理

(3.19.8),存在 x: $a < x < b$ 使得 $f(x) = f(b)$,这与假设矛盾.类似地,可看到 $f(c) < f(a)$ 也是不可能的. 而如果 $b < c$,必定有 $f(b) < f(c)$, 因为前述论证表明 $f(b)$ 必定在以 $f(a)$ 与 $f(c)$ 为端点的区间内. 类似地,若 $c < a$,则 $f(c) < f(a)$. 最后,如果 x, y 是 I 的任意两点且 $x < y$,那么,对 a, x, y 而不是 a, b, c,重复前面的论证,就得到 $f(x) < f(y)$.

b) 若 f 是连续的与严格单调的,则它是 I 到 $f(I)$ 上的一个双映射,而且因为 $f(I)$ 是连通的,所以它必定是一个区间((3.19.1)与(3.19.7)). 对任意 $x \in I$, I 中包含 x 的任一区间 J 在 f 下的象都是 $f(I)$ 中包含 $f(x)$ 的一个区间,并且 $f(x)$ 是 $f(J)$ 的端点,只当 x 是 J 的端点;这表明 x 在 I 中的任一邻域在 f 下的象都是 $f(x)$ 在 $f(I)$ 中的一个邻域,于是 f 是一个同胚(参见(3.11.1)).

问　　题

1) 设 f 是 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 中的一个映射,使得 $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

试证:在区间 $]a, b[$ 内,如果 f 是上有界的,则 f 在 $]a, b[$ 内也是下有界的(若 c 是区间 $]a, b[$ 内的一个固定点,考虑该区间内这样的点偶 x, y: $x<c<y$ 以及 $(y-c)/(c-x)$ 是有理数). 在这同一假设下,f 在任意紧区间内都是有界的,并且在 $\mathbf{R}$ 中连续,因而是 $f(x) = cx$ 型的(证法同上).

(用选择公理可以证明: $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 存在解,使它们在每个区间上都是无界的.)

2) 设 b 是大于 1 的整数.

a) 试证: 对于任意这样的无穷整数列 (c_n): $0 \leqslant c_n \leqslant b-1$, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n/b^n$ 都收敛于数 $x \in [0, 1]$. 反之,对任意 $x \in [0, 1]$,都存在一个序列 (c_n),使得对每个 n 都有 $0 \leqslant c_n \leqslant b-1$ 并且 $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n/b^n$; 如果 x 不是 k/b^m 型的(k 与 m 是自然数),则该序列是唯一的;否则,恰好存在两个具有所需性质的序列.(应用这一事实: 对任意整数 $m \geqslant 0$ 与任意 $x \in [0, 1]$,存在唯一的整数 k 使得 $k/b^m \leqslant x < (k+1)/b^m$).

b) 利用 a) 中 $b = 2$ 的情形以及 1.9 节问题5,证明[0,1](于是 $\mathbf{R}$ 本身,

参看(4.1.7))对等于集 $\mathfrak{P}(N)$.

c) 设K是$[0,1]$的一个子集,由所有形如 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n/3^n$ 的数组成,其中 $c_n = 0$ 或 $c_n = 2$ ("三进 Cantor 集").证明K是紧集;它在$[0,1]$中的余集是不相交开区间的可数并集(3.19.6);写出这些区间, 并证明它们长度的(无穷)和是1.

d) 对每个 $x \in K$, $x=\sum_{n=1}^{\infty} c_n/3^n$, 设$f(x)$是实数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n/2^n$, 其中 $b_n=c_n/2$ (当 x 可用两种不同的方式写成 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n/3^n$ 时, 证明相应的两个数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n/2^n$ 相等). 试证 f 是K到$\boldsymbol{R}$的区间$[0,1]$上的连续满映射,因此, K与$\boldsymbol{R}$是对等的. 更进一步,可以把 f 延拓成 $I = [0, 1]$ 到其自身的一个连续映射, 这个连续映射在 $I - K$ 的每个连通分支上都是常数.

3) a) 设E是距离空间, 满足下述条件: 对每个其项或等于0或等于1的有限序列 $s = (\varepsilon_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, 总存在一个非空子集$A_s$使得:

(i) E是两个子集 $A(0)$, $A(1)$ 的并集,且对每个含n项的有限序列s, 如果s', s''是两个这样的含 $n+1$ 项的序列,它们的前n项就是s的那些项, 则 $A_s = A_{s'} \cup A_{s''}$;

(ii) 对每个其项或等于0或等于1的无穷序列 $(\varepsilon_n)_{n \geqslant 1}$, 如果 $s_n = (\varepsilon_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, 则当$n$趋于$+\infty$时 A_{s_n} 的直径趋于0, 并且这些 A_{s_n} 的交是非空的.

在这些条件下, 试证存在三进 Cantor 集K(问题2)到E上的一个连续映射,特别地,E是紧的.

b) 反之, 设E是任意的紧距离空间. 试证存在K到E上的一个连续映射.(利用a)中的方法与准紧空间的定义(3.16);注意: 性质(i)与(ii)并不蕴含下述事实: 对于所有的序列s, 上述两个集 $A_{s'}$ 与 $A_{s''}$ 必须不同于 A_s.)

c) 如果加上E是完全不连通的,并且不含有孤立点(3.9节,问题2),则E同胚于K. (首先证明,对于每个 $\varepsilon > 0$, 存在E的一个由有限个集 A_i 组成的覆盖,这些 A_i 都既开又闭且直径 $\leqslant \varepsilon$;为此可利用3.19节问题9a). 然后应用a)中的方法.)

4) a) 设$E(F)$是偶(奇)自然数集;如果对$\boldsymbol{N}$的每个子集X, 使之对应于偶 $(x \cap E, x \cap F)$, 试证我们定义了 $\mathfrak{P}(N)$ 到 $\mathfrak{P}(E) \times \mathfrak{P}(F)$ 上的一个双射.

b) 由a)与问题2b)推证: 对于所有 $n > 1$, $\boldsymbol{R}^n$ 与 $\boldsymbol{R}$ 是对等的 (不过请

参阅5.1节问题6)。

5) 设 I 是 $\boldsymbol{R}$ 中的区间[0,1]. 试证,存在 I 到"正方形" $I\times I$ 上的一个连续映射(一条"Peano 曲线"). (首先证明: 存在 Cantor 集 K 到 $I\times I$ 上的一个连续映射(问题 3),然后把这个映射沿直线延拓到 K 在 I 中的余集的各连通分支上.)

6) 设 g 是区间]0,1]到区间[-1,1]的一个映射,并假设 $\lim\limits_{x\to 0, x>0} g(x)=0$. 试证: 存在[0, 1]到[-1, 1]的一个连续递减映射 g_1 与一个连续递增映射 g_2, 使得 $g_1(0)=g_2(0)=0$, 而且对于 $0<x\leqslant 1$ 有 $g_1(x)\leqslant g(x)\leqslant g_2(x)$. (对于每个整数 n, 考虑那些使 $g(x)\geqslant 1/n$ 的点 x 的集的下确界 x_n.)

3. 对数与指数

(4.3.1) 对于任意 $a>1$, 存在 $R_+^*=]0,+\infty[$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的唯一的递增映射 f, 使得 $f(xy)=f(x)+f(y)$ 以及 $f(a)=1$; 而且 f 是 $\boldsymbol{R}_+^*$ 到 $\boldsymbol{R}$ 上的一个同胚.

首先证明一个引理:

(4.3.1.1) 对任意 $x>0$, 总存在一整数 m(正或负)使得 $a^m\leqslant x\leqslant a^{m+1}$.

先假定 $x\geqslant 1$. 序列 (a^n) 是严格递增的. 如果对于所有整数 $n>0$, 都有 $a^n\leqslant x$, 则 $b=\lim\limits_{n\to\infty}a^n=\sup\limits_n a^n$ 应有限, >1 且 $\leqslant x$; 但是由(4.1.2)我们可以写出 $b=\lim\limits_{n\to\infty}a^{n+1}=a\cdot\lim\limits_{n\to\infty}a^n$, 因此 $b=ab$, 这与假设 $a>1$ 矛盾. 因此存在一整数 n, 使得 $x<a^n$; 把 $m+1$ 取为这些整数中最小的一个就行了. 反之, 若 $0<x<1$, 则 $x^{-1}>1$, 若 $a^m\leqslant x^{-1}\leqslant a^{m+1}$, 则有 $a^{-(m+1)}\leqslant x\leqslant a^{-(m+1)+1}$.

假设存在一函数 f 具有(4.3.1)中所列的性质;则 f 是乘法群 $\boldsymbol{R}_+^*$ 到加法群 $\boldsymbol{R}$ 的一个同态, 因此必有 $f(1)=0$ 以及对于任意 $x>0$ 与任意整数 n(正或负)有 $f(x^n)=n\cdot f(x)$. 特别地, $f(a^n)=n$. 又若 $a^m\leqslant x^n\leqslant a^{m+1}$, 则必有 $f(a^m)\leqslant f(x^n)\leqslant f(a^{m+1})$, 也就是说 $m\leqslant n\cdot f(x)\leqslant m+1$, 故得 $m/n\leqslant f(x)$ 以及 $|f(x)-m/n|\leqslant 1/n$. 这表明如果用 A_x 表示这样的有理数 m/n 的集(m

是正的或负的，$n \geqslant 1$)，满足 $a^m \leqslant x^n$（注意：$a^m \leqslant x^n$ 与$a^{mq} \leqslant x^{nq}$ 是等价关系，其中 q 是一整数>0)，那么必有 $f(x) = \sup A_x$，这证明 f 是唯一的.

要证明 f 存在，尚待证明的只是映射 f: $x \to \sup A_x$ 满足我们的全部条件. 设 x 与 y 是 $\boldsymbol{R}_+^*$ 的任意两个元素；对于任意整数 $n \geqslant 1$，设 m，m' 使得 $a^m \leqslant x^n \leqslant a^{m+1}$ 与 $a^{m'} \leqslant y^n \leqslant a^{m'+1}$ 成立；由这些关系推出 $a^{m+m'} \leqslant (xy)^n \leqslant a^{m+m'+2}$；因此我们有 $\frac{m}{n} \leqslant f(x) \leqslant \frac{m+1}{n}$，$\frac{m'}{n} \leqslant f(y) \leqslant \frac{m'+1}{n}$，$\frac{m+m'}{n} \leqslant f(xy) \leqslant \frac{m+m'+2}{n}$，同时又有 $\frac{m+m'}{n} \leqslant f(x) + f(y) \leqslant \frac{m+m'+2}{n}$. 于是得出结论：

$$|f(xy) - f(x) - f(y)| \leqslant 2/n,$$

因为 n 是任意的，所以 $f(xy) = f(x) + f(y)$.

由(4.3.1.1)推知：对任意 $z > 1$，存在一整数 $n \geqslant 1$ 使得 $a < z^n$，故 $f(z) \geqslant 1/n > 0$；由此推知 f 是严格递增的，因为如果 $x < y$，则 $y = zx$，其中 $z > 1$，又 $f(y) = f(x) + f(z) > f(x)$. 另一方面，我们有引理：

(4.3.1.2) 对于任意整数 $n \geqslant 1$，存在 $z > 1$ 使得 $z^n \leqslant a$.

注意到存在 x 使得 $1 < x < a$，因此 $a = xy$，其中 $y > 1$；如果 $z_1 = \min(x, y)$，则我们有 $z_1^2 \leqslant xy = a$ 并且 $z_1 > 1$. 用归纳法定义 $z_n > 1$ 使得 $z_n^2 \leqslant z_{n-1}$，于是 $z_n^{2^n} \leqslant a$，当然更有 $z_n^n \leqslant a$.

这个引理表明：$0 < f(z) \leqslant 1/n$. 对任意 $x \in \boldsymbol{R}_+^*$，取 δ 使得 $\frac{x+\delta}{x} < z$ 而 $\frac{x-\delta}{x} > \frac{1}{z}$；则对于 $|y-x| \leqslant \delta$ 有 $|f(y)-f(x)| < f(z) \leqslant 1/n$，这证明 f 是连续的. 因此，据(4.2.2) f 是 $\boldsymbol{R}_+^*$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的某个区间 I 上的同胚，但该区间必为 $\boldsymbol{R}$ 自身；因为 $f(a^n) = n$ 是任意整数.

(4.3.2) 对任意数 $a > 0$ 且 $\neq 1$，有且仅有 $\boldsymbol{R}_+^*$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的一连续映

射 f 使得 $f(xy)=f(x)+f(y)$ 以及 $f(a)=1$.

设 $b>1$; 由 (4.3.1) 我们得到 $\boldsymbol{R}_+^*$ 到 $\boldsymbol{R}$ 上的一个同胚 f_0, 使得 $f_0(xy)=f_0(x)+f_0(y)$ 以及 $f_0(b)=1$; 设 g_0 是这个同胚的逆，使得 $g_0(x+y)=g_0(x)\cdot g_0(y)$ 以及 $g_0(1)=b$. 如果 f 实现 (4.3.2) 的条件，则 $h=f\circ g_0$ 是 $\boldsymbol{R}$ 到自身的连续映射且使得 $h(x+y)=h(x)+h(y)$; 由 (4.1.3) 得 $h(x)=cx$, 因此 $f(x)=cf_0(x)$, 并且只存在一个 c 值使得 $f(a)=1$, 这个值就是 $c=1/f_0(a)$ (因为 $a\neq 1$, 所以我们有 $f_0(a)\neq 0=f_0(1)$).

(4.3.2) 中刻画的那个映射称为**以 a 为底的对数**, 并且把 $f(x)$ 写成 $\log_a x$. 由 (4.3.2) 的证明立即推得：如果 a, b 都 >0 且 $\neq 1$, 则 $\log_a x$ 与 $\log_b x$ 成比例, 并且由令 $x=a$ 而得到

(4.3.3) $\log_b x=\log_b a\cdot\log_a x$.

由 (4.3.1) 与 (4.2.1) 推得：若 $a>1$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\log_a x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty$; 若 $a<1$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\log_a x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=-\infty$. 对于任意 $a>0$ 且 $\neq 1$, $x\to\log_a x$ 的逆映射称为**以 a 为底的指数**并记为 $x\to a^x$ (这是一个前后一致的记法, 因为 $\log_a(a^n)=n$, 从而对 x 的整数值, 这个新记法与代数中的记法意义相同). 此外，对于所有实数 x 定义 1^x 等于 1. 于是, 对于 $a>0$ 与任意实数 x, y, 由定义我们有 $a^{x+y}=a^x a^y$, $a^{-x}=1/a^x$, $a^0=1$. 在(4.3.3) 中, 用 b^x 代换 x 得到

(4.3.4) $\log_a(b^x)=x\cdot\log_a b$ ($b>0$, x 是实数).

再在上公式中用 a^y 代换 b 就得出:

(4.3.5) $(a^x)^y=a^{xy}$ (x, y 是实数, $a>0$).

对于 $a>1$, $x\to a^x$ 是严格递增的, 并满足 $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty$; 对 $a<1$, $x\to a^x$ 是严格递减的, 并使得 $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=0$.

(4.3.6) 映射 $(x, y)\to x^y$ 在 $\boldsymbol{R}_+^*\times\boldsymbol{R}$ 中是连续的, 并且在 $\overline{\boldsymbol{R}}\times\overline{\boldsymbol{R}}$ 的每一个这样的点趋向一个极限：这种点在 $\boldsymbol{R}_+^*\times\boldsymbol{R}$ 的闭包中且

异于$(0,0)$，$(+\infty,0)$，$(1,+\infty)$，$(1,-\infty)$.

由(4.3.4)，我们有 $x^y = a^{y\cdot\log_a x}$（a 是固定的数 >1），于是结果由(4.1.2)与(4.1.9)得到.

(4.3.7) $\boldsymbol{R}_+^*$ 到其自身的任意连续映射 g，只要满足 $g(xy)=g(x)g(y)$ 就具有形式 $x\to x^a$，其中 a 是实数.

事实上，如果 $b>1$，则 $f(x)=\log_b g(b^x)$ 对于实数 x, y，满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，并且是连续的，于是根据(4.1.3)有 $f(x)=c\cdot x$，因此 $g(b^x)=b^{cx}=(b^x)^c$，这就证明了上述结果.

由于 $\log_b(x^a)=a\log_b x$，我们知道：如果 $a>0$，则 $x\to x^a$ 是严格递增的，如果 $a<0$，则它是严格递减的；而且，当 $a>0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}x^a=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}x^a=+\infty$；当 $a<0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}x^a=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}x^a=0$. 因此，据(4.2.2)，对于 $a\neq 0$，$x\to x^a$ 是 $\boldsymbol{R}_+^*$ 到自身上的一个同胚；其逆同胚是 $x\to x^{1/a}$.

问　　题

设 f 是 $\boldsymbol{R}$ 到它自身的这样的映射，满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 与 $f(xy)=f(x)f(y)$. 试证：或者对每个 $x\in\boldsymbol{R}$ 有 $f(x)=0$，或者对每个 $x\in\boldsymbol{R}$ 有 $f(x)=x$.（如果 $f(1)\neq 0$，则 $f(1)=1$；在第二种情形，证明对有理数 x 有 $f(x)=x$，并利用下述事实证明 f 是严格递增的：每个实数 $z>0$ 都是某个数的平方.）

4. 复　　数

我们用

$$((x, y), (x', y'))\to(x+x', y+y')$$
$$((x, y), (x', y'))\to(xx'-yy', xy'+yx')$$

定义集 $\boldsymbol{R}^2\times\boldsymbol{R}^2$ 到 $\boldsymbol{R}^2$ 的两个映射. 分别称它们为加法与乘法，并记作 $(z, z')\to z+z'$ 与 $(z, z')\to zz'$. 对于这两个映射，取 $0=(0, 0)$，$1=(1,0)$ 以及当 $z=(x, y)\neq 0$（据(2.2.8)与(2.2.13)这蕴含 $x^2+y^2\neq 0$）时取 $z^{-1}=\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{-y}{x^2+y^2}\right)$；则

它们满足域的公理组(2.1.(I)). 这样定义的域记为 $\boldsymbol{C}$, 并称为**复数域**,它的元素称为**复数**. $\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{C}$ 的映射 $x\to(x,0)$ 是单射,并保持加法与乘法不变,于是我们把 $\boldsymbol{R}$ 看成 $\boldsymbol{C}$ 的由元素 $(x,0)$组成的子域. 元素 $i=(0,1)$ 满足 $i^2=(-1,0)=-1$,于是对于任意 $(x,y)\in\boldsymbol{C}$, 我们可以写成 $(x,y)=x+iy$; 如果 $z=x+iy$, x, y 都是实数,则 x 记为 $\mathscr{R}z$ 并称为 z 的**实部**, y 记为 $\mathscr{J}z$, 并称为 z 的**虚部**.

(4.4.1) 任意有理函数 $(z_1,\cdots,z_n)\to P(z_1,\cdots,z_n)/Q(z_1,\cdots,z_n)$, 其中 P 与 Q 是复系数多项式,在 $\boldsymbol{C}^n$ 的每个 $Q(a_1,\cdots,a_n)\neq 0$ 的点 $(a_1,\cdots,a_n)$ 都是连续的.

证明可象(4.1.5)那样,利用与(4.1.1),(4.1.2)以及(4.1.4)相类似的定理,这些定理可立即由上面给出的关于复数的和、积与倒数的公式以及(3.20.4)与(4.1.5)推出.

对于任意复数 $z=x+iy$, 数 $\bar{z}=x-iy$ 称为 z 的**共轭**. 我们有 $\bar{\bar{z}}=z$, $\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z}'$, $\overline{zz'}=\bar{z}\cdot\bar{z}'$,也就是说, $z\to\bar{z}$ 是域 $\boldsymbol{C}$ 的一个自同构,据(3.20.4)与(4.1.2)它是双连续的; 实数由 $\bar{z}=z$ 表征,形如 ix 的数(也叫**纯虚数**,其中 x 是实数)由 $\bar{z}=-z$ 表征. 如果 $z=x+iy$,则 $z\bar{z}=x^2+y^2\geqslant 0$; 正数 $|z|=(z\bar{z})^{1/2}$ 称为 z 的**绝对值**, 这与(2.2)中 z 是实数时所定义的绝对值相一致. 关系 $|z|=0$ 等价于 $z=0$. 我们有 $|zz'|^2=zz'\overline{zz'}=z\bar{z}z'\bar{z}'=|z|^2|z'|^2$, 故 $|zz'|=|z|\cdot|z'|$, 由此推出: 若 $z\neq 0$, 则 $|1/z|=1/|z|$. 最后, 通过直接计算,可验证三角不等式:

$$|z+z'|\leqslant|z|+|z'|.$$

这表明 $|z-z'|=d(z,z')$ 是在 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ 上定义的一个距离, 它一致等价于(3.20)中所考虑的距离. 关于这个距离的球称为**圆盘**. 任意复数 $z\neq 0$ 可唯一地写成一个积 $r\zeta$, 其中 $r>0$, $|\zeta|=1$, 也就是取 $r=|z|$, $\zeta=z/|z|$.

问　　题

设 f 是 $\boldsymbol{C}$ 到它自身的连续映射,满足 $f(z+z')=f(z)+f(z')$ 与 $f(zz')$

$=f(z)f(z')$. 试证：或者对每个 $z\in \mathbf{C}$，$f(z)=0$，或者 f 是二映射 $z\to z$，$z\to \bar{z}$ 之一（利用(4.1.3)）.（利用选择公理，可以证明，存在 $\mathbf{C}$ 到自身的单射、非满射，非连续映射，使 $f(z+z')=f(z)+f(z')$ 与 $f(zz')=f(z)+f(z')$ 成立。对照 4.2 中的问题.）

5. Tietze-Urysohn 延拓定理

(4.5.1) (Tietze-Urysohn 延拓定理). 设 E 是一距离空间，A 是 E 的一闭子集，f 是 A 到 $\boldsymbol{R}$ 的一连续有界映射. 则存在 E 到 $\boldsymbol{R}$ 的这样的连续映射 g：它在 A 中与 f 重合且满足 $\sup_{x\in E} g(x)=\sup_{y\in A} f(y)$，$\inf_{x\in E} g(x)=\inf_{y\in A} f(y)$.

我们可以假设 $\inf_{y\in A} f(y)=1$，$\sup_{y\in A} f(y)=2$，用映射 $y\to\alpha f(y)+\beta$，$\alpha\neq 0$ 来代替 f 总能办到这一点(当 f 为常数的情形是显然的). 当 $x\in A$ 时定义 $g(x)$ 等于 $f(x)$，当 $x\in E-A$ 时，$g(x)$ 的定义由公式

$$g(x)=(\inf_{y\in A}(f(y)d(x,y)))/d(x,A)$$

给定. 因当 $y\in A$ 时有不等式 $1\leqslant f(y)\leqslant 2$，并由 $d(x,y)$ 的定义，推知对于 $x\in E-A$ 有 $1\leqslant g(x)\leqslant 2$. 因此只需证明 g 在每一点 $x\in E$ 连续. 如果 $x\in A$，则连续性可由对 f 的假设推得. 而在开集 $E-A$ 中，我们可写出 $g(x)=h(x)/d(x,A)$，其中 $h(x)=\inf_{y\in A}(f(y)d(x,y))$，由于(根据(3.8.9)与(3.11.8)) $d(x,A)$ 连续且 $\neq 0$，因而(由(4.1.2)与(4.1.4))必得证明 h 在每一点 $x\in E-A$ 连续. 设 $r=d(x,A)>0$；对于 $d(x,x')\leqslant\varepsilon<r$，我们有 $d(x,y)\leqslant d(x',y)+\varepsilon$，故 $h(x)\leqslant h(x')+2\varepsilon$ (因为 $f(y)\leqslant 2$)，类似地有 $h(x')\leqslant h(x)+2\varepsilon$，这就证明了 h 的连续性. 最后，假设 x 是 A 的一边缘点；给定 $\varepsilon>0$，设 $r>0$ 是这样的数：对于 $y\in A\cap B(x;r)$ 有 $|f(y)-f(x)|\leqslant\varepsilon$. 又设 $C=A\cap B(x;r)$，$D=A-C$；如果 $x'\in E-A$ 且 $d(x,x')\leqslant r/4$，则对于每

个 $y\in D$，都有 $d(x',y)\geqslant d(x,y)-d(x,x')\geqslant 3r/4$，故 $\inf_{y\in D}(f(y)d(x',y))\geqslant 3r/4$；另一方面，$f(x)d(x,x')\leqslant 2d(x',x)\leqslant r/2$，因此 $\inf_{y\in A}(f(y)d(x',y))=\inf_{y\in C}(f(y)d(x',y))$. 但因对 $y\in C$ 有 $f(x)-\varepsilon\leqslant f(y)\leqslant f(x)+\varepsilon$，以及 $\inf_{y\in C}d(x',y)=d(x',A)$，所以有

$$(f(x)-\varepsilon)d(x',A)\leqslant\inf_{y\in A}(f(y)d(x',y))\leqslant(f(x)+\varepsilon)d(x',A);$$

这证明对于 $x'\in E-A$ 且 $d(x,x')\leqslant r/4$ 有 $|g(x')-f(x)|\leqslant\varepsilon$；另一方面，如果 $x'\in A$ 且 $d(x,x')\leqslant r/4$，则 $|g(x')-f(x)|=|f(x')-f(x)|\leqslant\varepsilon$. 证完.

(4.5.2) 设 A，B 是距离空间 E 中的两个非空闭集，并且 $A\cap B=\phi$. 则存在定义于 E 中取值于 $[0,1]$ 的连续函数 f，使得在 A 中 $f(x)=1$ 而在 B 中 $f(x)=0$.

应用 (4.5.1) 于 $A\cup B$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的在 B 中等于 0 而在 A 中等于 1 的映射上，这个映射在 $A\cup B$ 中是连续的.

问　　题

1) 在距离空间 E 中，设 (F_n) 是一闭集的序列，A 是 F_n 的并集；如果 $x\notin A$，试证：存在定义于 E 上的有界连续函数 $f\geqslant 0$ 满足 $f(x)=0$，且对每个 $y\in A$ 都有 $f(y)>0$（利用(4.5.2)与(7.2.1)).

2) a) 设 E 是这样的距离空间：其中每一有界集都是相对紧的；试证 E 是局部紧的与可分的(利用(3.16.2)).

b) 反之，设 E 是局部紧但非紧的可分距离空间，d 是 E 上的距离；设 (U_n) 是由 E 的相对紧开子集组成的这样的序列：$\bar{U}_n\subset U_{n+1}$ 且 E 是序列 (U_n) 的并集(3.18.3). 试证：存在 E 上的实值连续函数 f 使得对 $x\in\bar{U}_n$ 有 $f(x)\leqslant n$，而对 $x\in E-\bar{U}_n$ 有 $f(x)\geqslant n$（利用(4.5.2)；其次，距离 $d'(x,y)=d(x,y)+|f(x)-f(y)|$ 是拓扑等价于 d 的，且对于 d 来说，任意有界集都是相对紧的.

第五章 赋范空间

第三章中描述的语言，对应于包含这种概念——因"形变"而直观上仍旧不变的那些概念——的那部分几何直观．这更加接近经典几何，因为直线、平面等等都是从拓扑观点来研究的(读者记得:这些概念的纯代数样式构成了线性代数,我们假定读者是熟悉它的,见附录).本章中给出了级数的本质的定义.我们特别强调:对于最重要的一类收敛级数(5.3),有限和的普通交换律与结合律仍然成立.由此自然得出结论：在这种情形下,项的次序是完全无关的．这就使我们,例如,能够合理地表述两个实数项级数之积的定理(见(5.5.3)),而与某些教科书中仍在讲授的所谓"Cauchy 乘积"大不相同,后者除了对单变数幂级数之外,是没有意义的.

本章的主要结果是连续性准则(5.5.1)与描述有限维空间特征的 F. Riesz 定理(5.9.4),后者是十一章中讨论的初等谱论的关键.

当然,本章仅仅是 Banach 空间与线性拓扑空间一般理论的入门，我们将在第十二章中作进一步讨论，Banach 空间与线性拓扑空间是现代泛函分析的基础.

1. 赋范空间与 Banach 空间

在本章与下一章,当我们说到向量空间时,总是指实数域或复数域上的(有限维或无穷维的)向量空间(这样的空间分别称为实的或复的向量空间)．当不指明纯量域时,就理解为定义与结果在两种情况下都成立[1]．当同一叙述中出现几个向量空间时,理解为(除非有相反的声明)它们有相同的纯量域．一个复向量空间 E 也

---

1) 纯量 λ 与向量 x 的积一般记为 $x\lambda$ 或 λx; 0 是向量空间中加群的零元.

可以看成实向量空间，只要把纯量限定在 $\mathbf{R}$ 内；当必须加以区分时，我们就说这个实向量空间 E_0 是复向量空间 E 的**基础**；如果 E 在 $\mathbf{C}$ 上具有限维数 n，则 E_0 在 $\mathbf{R}$ 上具有维数 $2n$.

向量空间 E 中的**范数**是 E 到实数集 $\mathbf{R}$ 的具有下列性质的映射(通常记为 $x \to \|x\|$，有时可能给 $\|\cdots\|$ 加一个附标)：

(I) 对每个 $x \in E$ 有 $\|x\| \geqslant 0$.

(II) 关系 $\|x\| = 0$ 等价于 $x = 0$.

(III) 对于任意 $x \in E$ 与任意纯量 λ 有 $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

(IV) 对于 E 的任意一对元素 x，y 有 $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ ("三角不等式").

(5.1.1) 如果 $x \to \|x\|$ 是向量空间 E 上的一个范数，则 $d(x, y) = \|x - y\|$ 是 E 上的一个距离，并且满足 $d(x+z, y+z) = d(x, y)$ 以及对任意纯量 λ，$d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$.

验证(3.1)中的那些公理是简单的.

赋范空间就是具有给定范数的向量空间 E. 这种空间总看作是以 $\|x - y\|$ 为距离的距离空间. **Banach 空间**就是完备的赋范空间.

如果 E 是一复赋范向量空间，则 $x \to \|x\|$ 也是基础实向量空间 E_0 上的范数，而且距离空间 E 与 E_0 是同一个，于是如果 E 是 Banach 空间，则 E_0 也是.

范数的例.

(5.1.2) 在(3.2.1)，(3.2.2)，(3.2.3) 与 (3.2.4) 中所举的例都是实向量空间，在这些例中引进的距离都是用 (5.1.1) 中的方法由范数得到的. 在例 (3.2.1) 到 (3.2.3) 中象这样定义的赋范空间，据(3.20.16)与(3.14.3)都是完备的，因而都是 Banach 空间. 例(3.2.4)将是第 VII 章中专门研究的对象，并且将看到它也是一个 Banach 空间.

(5.1.3) 在前面这些例子中以复数代替实数 (在例(3.2.2)中，以 $|x_i - y_i|^2$ 代替乘方 $(x_i - y_i)^2$) 就得到与之对应的例.

(5.1.4) 设 $I = [a, b]$ 是 $\mathbf{R}$ 中一有界闭区间，$E = \mathscr{C}_{\mathbf{R}}(I)$ 是 I

中所有实值连续函数的集；则 E 是向量空间（$f+g$ 与 λf 分别指映射 $t\to f(t)+g(t)$ 与 $t\to\lambda f(t)$）．如果我们记

$$\|f\|_1=\int_a^b|f(t)|dt,$$

则 $\|f\|_1$ 是 E 上的范数．唯一不容易验证的公理是（II），它可由中值定理推得（见第 VIII 章）．可以证明 E 不是完备的（见问题 1）．

关于范数的其它重要例子，见(5.7)与第 VI 章．

(5.1.5) 如果 E 是一实（复）赋范空间，则映射 $(x, y)\to x+y$ 在 $E\times E$ 中是一致连续的，映射 $(\lambda, x)\to\lambda x$ 在 $\boldsymbol{R}\times E$（相应地 $\boldsymbol{C}\times E$）中是连续的；映射 $x\to\lambda x$ 在 E 中是一致连续的．

证明可仿照(4.1.1)与(4.1.2)的证明同样进行；例如证明 $(\lambda, x)\to\lambda x$ 在点 (λ_0, x_0) 的连续性，我们利用公式 $\|\lambda x-\lambda_0x_0\|=\|\lambda_0(x-x_0)+(\lambda-\lambda_0)x_0+(\lambda-\lambda_0)(x-x_0)\|\leqslant|\lambda_0|\cdot\|x-x_0\|+|\lambda-\lambda_0|\cdot\|x_0\|+|\lambda-\lambda_0|\cdot\|x-x_0\|$．

作为(5.1.5)的推论，可得到：任意平移 $x\to a+x$ 与任意位似映射 $x\to\lambda x(\lambda\neq0)$ 都是 E 到自身的同胚，因为其逆映射还是平移（相应地，位似映射）．

问　　题

1) 设 $I=[0,1]$，又设 E 是(5.1.4)中定义的赋范空间．

a) 对任意 $n\geqslant3$，设 f_n 是在 I 上定义的连续函数，使对于 $0\leqslant t\leqslant1/2$，$f_n(t)=1$，对于 $1/2+1/n\leqslant t\leqslant1$，$f_n(t)=0$，而且在区间 $[1/2, 1/2+1/n]$ 内 $f_n(t)$ 有形式 $\alpha_nt+\beta_n$（其中常数 α_n 与 β_n 是待定的）．试证：在 E 中 (f_n) 是不收敛的 Cauchy 序列（如果在 E 中 (f_n) 有一极限 g，试证：我们必有 $g(t)=1$，对于 $0\leqslant t\leqslant1/2$ 与 $g(t)=0$，对于 $1/2<t\leqslant1$，这就破坏了 g 的连续性）．

b) 试证：(5.1.4) 中定义的 E 上的距离与 (3.2.4) 中定义的距离不是拓扑等价的．（举出 E 中一个序列的例，对于 $\|f-g\|_1$ 它趋于0，而对于(3.2.4)定义的距离它没有极限）．

2) 设 A，B 是赋范空间 E 的两个子集，我们用 $A+B$ 记所有和 $a+b$ 的集，此处 $a\in A$，$b\in B$，

a）试证：若集 A, B 之一是开的，则 $A+B$ 是开的.

b）试证：若 A, B 都是紧集，则 $A+B$ 也是紧集（应用（3.17.9）与（3.20.16））.

c）试证：若 A 是紧集，B 是闭集，则 $A+B$ 是闭的.

d）举出 $\boldsymbol{R}$ 的两个闭子集 A, B 的例，使得 $A+B$ 不是闭集（参见（3.4.1）前边举出的例）.

3）设 E 是一赋范空间.

a）试证：在 E 中，开球的闭包是具有同一中心与同一半径的闭球；闭球的内部是具有同一中心与同一半径的开球；开球（或闭球）的边缘是具有同一中心、同一半径的球面（参看 3.8 节问题 4）.

b）试证：开球 $B(0;r)$ 同胚于 E（考虑映射 $x \to rx/(1+\|x\|)$）.

4）在赋范空间 E 中，**线段**是指 $\boldsymbol{R}$ 的区间 $[0,1]$ 在连续映射 $t \to ta+(1-t)b$ 下的象，其中 $a\in E$, $b\in E$；a 与 b 称为线段的端点. 线段是紧的与连通的. E 中一折线是指 E 的这样的子集 L：存在 E 中点的有限序列 $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$，具有如下性质：若对于 $0\leqslant i\leqslant n-1$，$S_i$ 是以 x_i 与 x_{i+1} 为端点的线段，则 L 是这些 S_i 的并集. 我们说序列 (x_i) 定义了**折线** L（一般地，一给定折线可以用无穷多个有限序列来定义）。设 A 是 E 的子集，a, b 是 A 的两点，我们说 a 与 b 被 A 中的折线连接，如果存在序列 $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ 使得 $a=x_0$, $b=x_n$，而且由这个序列定义的折线 L 含于 A 中.

如果 A 中任意两点能用 A 中的折线连接，则 A 是连通的. 反之，如 $A\subset E$ 是连通开集，试证 A 中任意两点能用 A 中的折线连接（证明：满足下述条件的点 $y\in A$ 的集在 A 中是既开又闭的：y 能用 A 中的折线与给定点 $a\in A$ 连接）.

5）在实向量空间 E 中，**线性簇** V 是形如 $a+M$ 的集，其中 M 是 E 的线性子空间；按定义 V 的维数（余维数）是 M 的维数（余维数）. 如果 $b\notin V$ 且 V 具有有限维数 p（有限余维数 q），则包含 b 与 V 的最小线性簇 W 具有有限维数 $p+1$（有限余维数 $q-1$）.

设 A 是实赋范空间 E 的开连通子集，又设 (V_n) 是 E 中线性簇的可数序列，其中每个的余维数 $\geqslant 2$；试证：若 B 是这些 V_n 的并集，则 $A\cap(E-B)$ 是连通的.（提示：利用问题 4；设 L 是 A 中连接 $A\cap(E-B)$ 中两点 a, b 的折线，试证：存在另一条折线 L' "靠近" L，并含于 $A\cap(E-B)$ 中. 要做到这一点，注意：若 $x\in E-B$，则满足下面条件的点 $y\in E$ 的集在 E 中稠密：以 x, y 为端点的线段不与任何 V_n 相交，利用（2.2.17）.）

特别，如果 E 的维数 $\geqslant 2$，D 是 E 的可数子集，则 $A\cap(E-D)$ 是连通的.

6）设 E 是维数 $\geqslant 2$ 的实赋范空间，试证 E 的非空开子集不能同胚于 $\boldsymbol{R}$ 的任意子集(利用问题 5).

7）a）试证在赋范空间 E 中，球不能包含维数 >0 的线性簇(问题 5).

b）设 (E_n) 是维数 >0 的赋范空间的无穷序列；试证：在距离空间 $E=\prod_{n=0}^{\infty} E_n$ 中，不存在这样的范数，使得距离 $\|x-y\|$ 拓扑等价于 3.20 节问题 7 中定义的距离(这里 d_n 取为 E_n 上这样的有界距离，它等价于 E_n 上由其范数定义的距离)(利用 a).

8）设 x, y 是赋范空间 E 中的两个非零向量；试证

$$\|x-y\|\geqslant\frac{1}{2}\sup(\|x\|,\|y\|)\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\|$$

与

$$\|x-y\|\geqslant\frac{1}{4}(\|x\|+\|y\|)\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\|.$$

(回忆 $\|x\|=1$，$\|y\|\leqslant 1$ 的情形. 令 $z=\frac{y}{\|y\|}$，证明 $1+\|x-z\|\leqslant\|y\|+\|z-y\|+2\|x-y\|$). 常数 1 / 2 和 1 / 4 不能换成更大的数.

2. 赋范空间中的级数

设 E 是赋范空间. 一对序列 $(x_n)_{n\geqslant 0}$，$(s_n)_{n\geqslant 0}$ 称为**级数**，如果对任意 n，元素 x_n 与 s_n 满足关系 $s_n=x_0+x_1+\cdots+x_n$，或者，等价地，满足 $x_0=s_0$，以及对 $n\geqslant 1$，满足 $x_n=s_n-s_{n-1}$. x_n 称为级数的**第 n 项**，s_n 称为级数的**第 n 部分和**. 这个级数常称为一般项为 x_n 的级数，或者简称为级数 (x_n) $\left(\text{由于用词含糊，有时甚至称为级数} \sum_{n=0}^{\infty} x_n\right)$. 我们说级数收敛到 s，如果 $\lim_{n\to\infty} s_n=s$；这时 s 称为**级数的和**，并记为 $s=x_0+\cdots+x_n+\cdots$ 或者 $s=\sum_{n=0}^{\infty} x_n$；

$r_n = s - s_n$ 称为级数的**第 n 余项**；它是以 x_{n+k} 为第 k 项的级数的和；由定义，$\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$。

(5.2.1) (Cauchy 准则)。如果一般项为 x_n 的级数收敛，则对于任意 $\varepsilon > 0$，存在整数 n_0，使得当 $n \geqslant n_0$ 与 $p \geqslant 0$ 时有 $\|s_{n+p} - s_n\| = \|x_{n+1} + \cdots + x_{n+p}\| \leqslant \varepsilon$。反之，若满足上述条件并且空间 E 是完备的，则一般项为 x_n 的级数收敛。

这不过是 Cauchy 准则对序列 (s_n) 的一个应用(见3.14)。

作为(5.2.1)的明显推论我们有：若级数 (x_n) 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = 0$；但是这个必要条件决不是充分的。

(5.2.2) 如果级数 (x_n) 与 (x'_n) 收敛并有和 s，s'，则级数 $(x_n + x'_n)$ 收敛于和 $s + s'$，并且对任意纯量 λ，级数 (λx_n) 收敛于和 λs。

这立即可由定义与(5.1.5)推出。

(5.2.3) 如果 (x_n) 与 (x'_n) 是这样两个级数：除有限个附标以外，都有 $x_n = x'_n$，则他们或者都收敛或者都不收敛。

因为级数 $(x'_n - x_n)$ 的所有项——除有限个附标以外——都是 0，所以它收敛。

(5.2.4) 设 (k_n) 是严格递增的非负整数序列，并且 $k_0 = 0$；如果级数 (x_n) 收敛于 s，且 $y_n = \sum\limits_{p=k_n}^{k_{n+1}-1} x_p$，则级数 (y_n) 也收敛于 s。

这立即可由关系 $\sum\limits_{i=0}^{n} y_i = \sum\limits_{j=0}^{k_{n+1}-1} x_j$ 与(3.13.10)推出。

问　　题

1) 设 (a_n) 是赋范空间 E 中的任意序列；试证存在 E 中满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ 的序列 (x_n) 以及严格递增的整数序列 (k_n)，使得对每一个 n 都有 $a_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_{k_n}$。

2) 设 σ 是 N 到自身的双映射，对每个 n，设 $\varphi(n)$ 是 N 中这样区间 $[a, b]$ 的最小个数：这些区间的并集是 $\sigma([0, n])$。

a) 假设φ在N中有界．设(x_n)是赋范空间E中的收敛级数．试证级数$(x_{\sigma(n)})$在E中收敛，而且$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}$。

b) 假设φ在N中无界．定义一个收敛的实数项级数(x_n)，使得级数$(x_{\sigma(n)})$在$\boldsymbol{R}$中不收敛.（对k用归纳法定义一个严格递增的整数序列(m_k)，使具有下列性质：1°若n_k是$\sigma([0, m_k])$中的最大元素，则$[0, n_k]$含于$\sigma([0, m_{k+1}])$中；2°$\varphi(m_k) \geqslant k+1$．然后对于$n_k < n \leqslant n_{k+1}$这样定义$x_n$：除$n$的$2k$个适当的选定值外，$x_n = 0$，而在这些选定值的每一个上，$x_n$交替等于$1/k$与$-1/k$.）

3) 设(x_n)是赋范空间E中的收敛级数，σ是N到自身的双映射，并设

$$r(n) = |\sigma(n) - n| \cdot \sup_{m \geqslant n} \|x_m\|, \quad r'(n) = |\sigma^{-1}(n) - n| \cdot \sup_{m \geqslant n} \|x_m\|.$$

试证：如果$\lim_{n\to\infty} r(n) = 0$且$\lim_{n\to\infty} r'(n) = 0$，则级数$(x_{\sigma(n)})$在$E$中收敛，而且$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}$。$\left(\text{对充分大的}n\text{估计差}\sum_{k=0}^{n} x_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^{n} x_k.\right)$

4) 设(x_{mn}) $(m \geqslant 0, n \geqslant 0)$是赋范空间$E$中点的双重序列．假设：1°对每个$m \geqslant 0$，级数$x_{m0} + x_{m1} + \cdots + x_{mn} + \cdots$在$E$中收敛；且$y_m$是其和；2°对每个$n \geqslant 0$级数$r_{0n} + r_{1n} + \cdots + r_{mn} + \cdots$在$E$中收敛，且$t_n$是其和。

a) 试证：对每个$n \geqslant 0$，级数$x_{0n} + x_{1n} + \cdots + x_{mn} + \cdots$收敛；设$z_n$是其和。

b) 为要$\sum_{m=0}^{\infty} y_m = \sum_{n=0}^{\infty} z_n$，必须且只须$\lim_{n\to\infty} t_n = 0$。

5) a) 试证级数$\sum_{n \geqslant 1, n \neq m} \frac{1}{m^2 - n^2}$收敛且其和等于$-3/4m^2$（分解有理分式$1/(m^2 - n^2)$）。

b) 当$m \neq n$时设$u_{mn} = \frac{1}{m^2 - n^2}$，且设$u_{nn} = 0$；试证：

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{mn}\right) = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty} u_{mn}\right) \neq 0.$$

6) 如果f是在$\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$中定义并在距离空间中取值的函数，我们把$f$在$\bar{\boldsymbol{R}} \times \bar{\boldsymbol{R}}$的点$(+\infty, +\infty)$关于子空间$\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$的极限（当其存在时）记为$\lim_{m\to\infty, n\to\infty} f(m, n)$ (3.13)。设(x_{mn})是一实数的双重序列，并设

$$s_{mn}=\sum_{n\leqslant m,k\leqslant n} x_{nk}.$$

a）如果 $\lim\limits_{m\to\infty,n\to\infty} s_{mn}$ 存在，则 $\lim\limits_{m\to\infty,n\to\infty} x_{mn}=0$。举出一个例子，满足 $x_{nm}=x_{mn}$，对于 $m\geqslant 2n+1$ 有 $x_{m,2n}=-x_{m,2n+1}=x_{m+1,2n}$，又 $x_{2n,2n}=0$，并使得 $\lim\limits_{m\to\infty,n\to\infty} s_{mn}=0$，而这些级数 $x_{m0}+x_{m1}+\cdots+x_{mn}+\cdots$，$x_{0n}+x_{1n}+\cdots+x_{mn}+\cdots$中没有一个是收敛的。

b）举出一个例子，其中 $x_{mn}=0$ 除了在 $m=n+1$，$m=n$ 或 $n=m+1$ 时例外(于是所有的级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x_{mn}$，$\sum\limits_{m=0}^{\infty}x_{mn}$ 都是收敛的)，并且对所有的附标 m，n 都有 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x_{mn}=\sum\limits_{m=0}^{\infty}x_{mn}=0$，但是 $\lim\limits_{m\to\infty,n\to\infty} s_{mn}$ 不存在.

3. 绝对收敛级数

(5.3.1) 正项级数 (x_n) 收敛的充要条件是对于严格递增的非负整数序列 (k_n)，部分和序列 (s_{k_n})有上界，此时和 $s=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x_n$ 等于 $\sup s_{k_n}$.

$x_n\geqslant 0$ 的假设等价于 $s_{n-1}\leqslant s_n$，于是结果立即可由(4.2.1)推出.

在 Banach 空间 E 中，**绝对收敛级数** (x_n) 是这样的级数：它使一般项为 $\|x_n\|$ 的级数收敛.

(5.3.2) 在 Banach 空间 E 中，绝对收敛级数是收敛的，并且 $\left\|\sum\limits_{n=0}^{\infty}x_n\right\|\leqslant\sum\limits_{n=0}^{\infty}\|x_n\|$.

据假设，对于任意 $\varepsilon>0$，存在整数 n_0 使得对 $n\geqslant n_0$ 与任意 $p\geqslant 0$，有 $\|x_{n+1}\|+\cdots+\|x_{n+p}\|\leqslant\varepsilon$；于是有 $\|x_{n+1}+\cdots+x_{n+p}\|\leqslant\varepsilon$，据(5.2.1)这就证明了 (x_n) 收敛. 其次，对于任意 n，$\|x_0+\cdots+x_n\|\leqslant\|x_0\|+\cdots+\|x_n\|$；故不等式 $\left\|\sum\limits_{n=0}^{\infty}x_n\right\|\leqslant\sum\limits_{n=0}^{\infty}$

$\|x_n\|$可由不等延拓原理(3.15.4)和范数的连续性(3.11.8)推出.

(5.3.3) 若(x_n)是绝对收敛级数，σ是$\boldsymbol{N}$到自身的双映射，则级数(y_n)，其中$y_n = x_{\sigma(n)}$，是绝对收敛级数，并且$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} y_n$（绝对收敛级数的"可交换性"）.

设$s_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$，$s'_n = \sum_{k=0}^{n} y_k$：对每个$n$，设$m$是集$\sigma([0,n])$中最大的整数；因而由定义$\sum_{k=0}^{n}\|y_k\| \leqslant \sum_{i=0}^{m}\|x_i\|$，故(5.3.1)表明$(y_n)$绝对收敛. 其次，对任意$\varepsilon > 0$，设$n_0$是这样的整数，对于$n \geqslant n_0$与$p \geqslant 0$，有$\|x_{n+1}\| + \cdots + \|x_{n+p}\| \leqslant \varepsilon$；如果$m_0$是$\sigma^{-1}([0, n_0])$中最大的整数，则对$n \geqslant m_0$与$p \geqslant 0$有$\|y_{n+1}\| + \cdots + \|y_{n+p}\| \leqslant \varepsilon$；而且差$s'_{m_0} - s_{n_0}$是那些$j > n_0$的项$x_j$的和，因此$\|s'_{m_0} - s_{n_0}\| \leqslant \varepsilon$；于是，对$n \geqslant n_0$与$n \geqslant m_0$，有$\|s'_n - s_n\| \leqslant 3\varepsilon$，这证明$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} y_n$.

设A是任意可数集. 我们称 Banach 空间E中元素的族$(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ **是绝对可和的**，如果对于$\boldsymbol{N}$到A上的双映射φ，级数$(x_{\varphi(n)})$是绝对收敛的；由(5.3.3)推知，这一性质与双射φ无关，从而我们可以把$\sum_{n=0}^{\infty} x_{\varphi(n)}$定义为族$(x_\alpha)_{\alpha\in A}$的和，并记为$\sum_{\alpha\in A} x_\alpha$. 由于任意可数集$S \subset E$可以看成一个族(其中$S$当作附标集)，故也可以说$E$的绝对可和(可数)子集及其和.

(5.3.4) Banach 空间E中元素的可数族$(x_\alpha)_{\alpha\in A}$为绝对可和的，其充要条件是有限和$\sum_{\alpha\in J}\|x_\alpha\|$ ($J \subset A$ 且有限)有界. 这时，对于任意$\varepsilon > 0$，存在A的有限子集H，使得：对于A的满足$H \cap K = \phi$的任意有限子集K，有$\sum_{\alpha\in K}\|x_\alpha\| \leqslant \varepsilon$，而对于$A$的任意

有限子集 $L\supset H$，有 $\left\|\sum_{\alpha\in A}x_\alpha-\sum_{\alpha\in L}x_\alpha\right\|\leqslant 2\varepsilon$.

前两个断言可立即由定义与(5.3.1)推得. 其次，对任意有限子集 $L\supset H$，我们可以写成 $L=H\cup K$，其中 $H\cap K=\phi$，故 $\left\|\sum_{\alpha\in L}x_\alpha-\sum_{\alpha\in H}x_\alpha\right\|\leqslant\varepsilon$；由和 $\sum_{\alpha\in A}x_\alpha$ 的定义（把 A 按 $\boldsymbol{N}$ 到 A 上的任一双射排列后）推得 $\left\|\sum_{\alpha\in A}x_\alpha-\sum_{\alpha\in H}x_\alpha\right\|\leqslant\varepsilon$，于是 $\left\|\sum_{\alpha\in A}x_\alpha-\sum_{\alpha\in L}x_\alpha\right\|\leqslant 2\varepsilon$.

(5.3.5) 设 $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ 是 Banach 空间 E 中元素的绝对可和族. 则对于 A 的每一子集 B，族 $(x_\alpha)_{\alpha\in B}$ 是绝对可和的，而且 $\sum_{\alpha\in B}\|x_\alpha\|\leqslant\sum_{\alpha\in A}\|x_\alpha\|$.

如果 B 是有限的，则结果直接由定义推出. 如果 B 是无穷的，则对于 B 的每一有限子集 J，有 $\sum_{\alpha\in J}\|x_\alpha\|\leqslant\sum_{\alpha\in A}\|x_\alpha\|$，于是结果由(5.3.4)推出.

(5.3.6) 设 $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ 是 Banach 空间 E 中元素的绝对可和族. 又设 (B_n) 是 A 的非空子集的无穷序列，满足 $A=\bigcup_n B_n$，并且对 $p\neq q$ 有 $B_p\cap B_q=\phi$；那么，如果 $z_n=\sum_{\alpha\in B_n}x_\alpha$，则级数 (z_n) 是绝对收敛的，并且 $\sum_{n=0}^{\infty}z_n=\sum_{\alpha\in A}x_\alpha$（绝对收敛级数的“可结合性”）.

给定任意 $\varepsilon>0$ 与任意整数 n，据(5.3.2)，对于每个 $k\leqslant n$，存在 B_k 的有限子集 J_k，使得 $\|z_k\|\leqslant\sum_{\alpha\in J_k}\|x_\alpha\|+\varepsilon/(n+1)$；因

此，如果 $J=\bigcup_{k=0}^{n} J_k$，则有 $\sum_{k=0}^{n}\|z_k\|\leqslant\sum_{\alpha\in J}\|x_\alpha\|+\varepsilon\leqslant\sum_{\alpha\in A}\|x_\alpha\|+\varepsilon$；于是由(5.3.1)，级数 (z_n) 是绝对收敛的．其次，设 H 是 A 的这样的有限子集，使得：对于 A 的满足 $H\cap K=\phi$ 的任意有限子集 K 有 $\sum_{\alpha\in K}\|x_\alpha\|\leqslant\varepsilon$，同时，对于 A 的任意包含 H 的有限子集 L，有 $\left\|\sum_{\alpha\in A}x_\alpha-\sum_{\alpha\in L}x_\alpha\right\|\leqslant 2\varepsilon$（参见(5.3.4)）．设 n_0 是使得 $H\cap B_{n_0}\neq\phi$ 的最大整数，再设 n 是任意 $\geqslant n_0$ 的整数．对于每个 $k\leqslant n$，设 J_k 是 B_k 的包含 $H\cap B_k$ 的有限子集，并且满足对于 B_k 的任意包含 J_k 的有限子集 L_k，有 $\left\|z_k-\sum_{\alpha\in L_k}x_\alpha\right\|\leqslant\varepsilon/(n+1)$（参见(5.3.4)）．那么，如果 $L=\bigcup_{k=0}^{n}L_k$，则我们有 $\left\|\sum_{k=0}^{n}z_k-\sum_{\alpha\in L}x_\alpha\right\|\leqslant\varepsilon$，又因为 $L\supset H$，于是由 H 的定义推得 $\left\|\sum_{k=0}^{n}z_n-\sum_{\alpha\in A}x_\alpha\right\|\leqslant 3\varepsilon$，这就完成了证明．

当 A 被分解为有限个子集 $B_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 时，有一个类似的（且更易得到的）结果；而且，在这种情形下，(5.3.6)的逆也成立，即如果每个族 $(x_\alpha)_{\alpha\in B_k}$ 都是绝对可和的，则 $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ 也是绝对可和的；证明可由准则(5.3.4)对 n 使用归纳法而得到．

问　　题

1）设 (d_n) 是实数 $d_n\geqslant 0$ 的序列，它使级数 (d_n) 不收敛（即 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}d_k=+\infty$）．对于下列级数的收敛性我们可以作何判断：

$$\frac{d_n}{1+d_n};\quad\frac{d_n}{1+nd_n};\quad\frac{d_n}{1+n^2d_n};\quad\frac{d_n}{1+d_n^2}$$

2）设 (u_n) 是一收敛的实数项级数，但不是绝对收敛的，又设 $s=\sum_{n=0}^{\infty}u_n$．

对每个数 $s'\geqslant s$，证明：存在 N 到自身的双射 σ，使得对所有满足 $u_n\geqslant 0$ 的 n，有 $\sigma(n)=n$，而且 $\sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)}=s'$.（用归纳法证明：对每个 n，存在 N 到自身的双射 σ_n，使对所有满足 $u_k\geqslant 0$ 的 k，有 $\sigma_n(k)=k$，而且存在附标 p_n 具有下述性质：如果 $u_k^{(n)}=u_{\sigma_n(k)}$，则对 $k\geqslant p_n$ 有

$$\left|s'-\sum_{i=0}^{k} u_i^{(n)}\right|\leqslant 1/n;$$

进而这样选取 σ_{n+1}：对所有满足 $\sigma_n(k)<p_n$ 的 k 与所有满足 $u_k\leqslant -1/n$ 的 k，有 $\sigma_{n+1}(k)=\sigma_n(k)$.）

3）试证：对于积空间 R^n 中（其中的范数 $\|x\|=\sup|\xi_k|$，当 $x=(\xi_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ 时）点的每个有限族 $(x_i)_{i\in I}$，有 $\sum_{i\in I}\|x_i\|\leqslant 2n\cdot\sup_{J\subset I}\left\|\sum_{i\in J}x_i\right\|$（首先考虑 $n=1$ 的情形）。

4）在赋范空间 E 中，级数 (x_n) 称为**可换收敛的**，如果对于 N 到自身的每个双射 σ，级数 $(x_{\sigma(n)})$ 都收敛。

a）收敛级数 (x_n) 是可换收敛的充要条件为：对每个 $\varepsilon>0$，存在 N 的有限子集 J，使得对于 N 的任意满足 $J\cap H=\phi$ 的子集 H，都有 $\left\|\sum_{n\in H}x_n\right\|\leqslant\varepsilon$. 这个条件满足时，和 $\sum_{n=0}^{\infty}x_{\sigma(n)}$ 与 σ 无关.（要证明最后的断言与条件的充分性，可仿照(5.3.3)中那样进行. 要证明条件是必要的，可使用反证法：若存在 $\alpha>0$ 与无穷多个 N 的有限子集 $H_k(k=1,2,\cdots\cdots)$，而 H_k 中的任意两个都没有公共点，并且使得对每个 k 都有 $\left\|\sum_{n\in H_k}x_n\right\|\geqslant\alpha$；则从这些子集的存在性入手，定义 σ 使得级数 $(x_{\sigma(n)})$ 是不收敛的.）

b）假设级数 (x_n) 是这样的：对任一严格递增的整数序列 (n_k)，级数 (x_{n_k}) 都收敛. 试证级数 (x_n) 是可换收敛的(利用 a）中那种论证法). 当 E 是完备空间时，证明其逆命题(利用在 a）中已证明的准则).

c）若 $E=R^n$，试证 E 中任一可换收敛级数是绝对收敛的(利用问题 3 与 a)中的准则).

d)把(5.3.6)中的可结合性推广到可换收敛级数上.

5）设 E 是一实向量空间，它由所有满足 $\lim_{n\to\infty}\xi_n=0$ 的实数无穷序列

$x=(\xi_n)_{n\geq 0}$ 组成，对于任意 $x\in E$，设$\|x\|=\sup\limits_n|\xi_n|$。

a) 试证 $\|x\|$ 是 E 上的范数，而且具有这个范数的 E，是一 Banach 空间（即 Banach 的"空间(c_0)"）。

b) 设 e_m 是序列 $(\delta_{mn})_{n\geq 0}$，当 $m\neq n$ 时 $\delta_{mn}=0$，而 $\delta_{mm}=1$。试证对于每一点 $x=(\xi_n)\in E$，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\xi_n e_n$ 在 E 中是可换收敛的，而且其和是 x；举出这种级数非绝对收敛的一些例子。

6) a) 设 (s_n) 是趋于∞递增的正数列，试证一般项为 $(s_n-s_{n-1})/s_n$ 的级数具有有限和。对每个数 $\rho>0$，试证一般项为 $(s_n-s_{n-1})/s_n s_{n-1}^{\rho}$ 的级数是收敛的（与一般项 $1/s_{n-1}^{\rho}-1/s_n^{\rho}$ 相比较）。

b) 设 $(u_n)_{n\geq 0}$ 是满足 $u_0>0$ 的非负数列，并设对每个 n，$s_n=\sum\limits_{k=0}^{n}u_k$。试证，一般项为 u_n 的级数收敛的充要条件是：一般项为 u_n/s_n 的级数是收敛的（利用 a)）。

7) 设 (u_n) 是非负项的收敛级数。试证，存在正项递增序列 c_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，并且级数 $(c_n u_n)$ 是收敛的。

8) 设 (u_n) 是非负项的收敛级数。试证，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_1+2u_2+\cdots+nu_n}{n}=0$$

与

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_1+2u_2+\cdots+nu_n}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}u_n.$$

（写出 $1/n(n+1)=1/n-1/(n+1)$.）

4. 赋范空间的子空间与有限积

设 E 是赋范空间，F 是 E 的向量子空间（即这样的子集：对任意一对纯量 α,β，由 $x\in F$ 与 $y\in F$ 可推出 $\alpha x+\beta y\in F$）；E 上的范数在 F 上的限制显然是 F 上的范数，它在 F 上定义的距离与拓扑，就是由 E 上的距离与拓扑导出的。当我们说 E 的"子空间"时，一般是指具有导出范数的向量子空间。如果 E 是 Banach 空

间，则由(3.14.5)，E的任意闭子空间F也是 Banach 空间；反之，如果赋范空间E的子空间F是 Banach 空间，则据(3.14.4)，F在E中是闭的．

(5.4.1) 如果F是赋范空间E的向量子空间，则它在E中的闭包$\bar{F}$也是一个向量子空间．

据假设，$E \times E$到E的映射$(x, y) \to x + y$把$F \times F$映射到F中，于是据(3.11.4)，它把$\bar{F} \times \bar{F}$映射到$\bar{F}$中．因为由(3.20.3) $\overline{F \times F} = \bar{F} \times \bar{F}$，故$x \in \bar{F}$与$y \in \bar{F}$蕴含$x + y \in \bar{F}$．利用映射$(\lambda, x) \to \lambda x$的连续性，可类似地证明：对于任意纯量$\lambda$，$x \in \bar{F}$蕴含$\lambda x \in \bar{F}$．

我们称赋范空间E的子集A是**全的**，如果A中向量的(有限)线性组合构成E的稠子空间；我们称族(x_α)是**全的**，如果它的元素的组合是全的．

设E_1, E_2是两个赋范空间，考虑积向量空间$E = E_1 \times E_2$(其中$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$，$\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$)．立即可以验证，映射$(x_1, x_2) \to \sup(\|x_1\|, \|x_2\|)$是$E$上的一个范数，而且这个范数在$E$上定义了与$E_1$，$E_2$上的距离相对应的距离，因而积$E_1 \times E_2$的拓扑就是在(3.20)中定义的拓扑．"自然"单射$x_1 \to (x_1, 0)$，$x_2 \to (0, x_2)$是E_1，E_2分别到E的闭子空间$E_1' = E_1 \times \{0\}$，$E_2' = \{0\} \times E_2$上的线性等距(3.20.11)，而E是它的子空间E_1'，E_2'的直和，E_1'，E_2'往往分别看成与E_1，E_2恒同．

反之，假设赋范空间E是两个向量子空间F_1，F_2的直和，每个$x \in E$可唯一地写成$x = p_1(x) + p_2(x)$，其中$p_1(x) \in F_1$，$p_2(x) \in F_2$，而且p_1，p_2分别是E到F_1，F_2的线性映射(E到F_1，F_2上的"射影")．"自然"映射$(y_1, y_2) \to y_1 + y_2$是积空间$F_1 \times F_2$到E上的线性双射，它是连续的(据(5.1.5))，但不一定是双连续的(参看 6.5 节问题 2)．

(5.4.2) 映射$(y_1, y_2) \to y_1 + y_2$为$F_1 \times F_2$到E上的同胚的充要条件是线性映射p_1，p_2之一为连续的．

注意：因为 $x = p_1(x) + p_2(x)$，故若映射 p_1, p_2 中的一个连续，则另一个也连续．因为E到 $F_1 \times F_2$ 上的映射 $x \to (p_1(x), p_2(x))$ 是 $(y_1, y_2) \to y_1 + y_2$ 的逆映射，所以结论由(3.20.4)推得．

当(5.4.2)中的条件满足时，E 称为 F_1, F_2 的**拓扑直和**；满足下列条件的E的子空间F称为E的**拓扑直接被加项**：存在另一个子空间G，使得E是F与G的拓扑直和；具有上述性质的任意子空间G，称为F的**拓扑余**．任意拓扑直接被加项必定是闭的(据(3.20.11))，但是存在不是拓扑直接被加项的闭子空间(尽管任意子空间在E中总有一个代数余)；这种空间的例，可参看 Bourbaki[6]，第IV章，119页，习题5c)与122页，习题17b)．

有关两个赋范空间积的那些定义与结果可直接推广到n(有限数)个赋范空间的积(对n使用归纳法)．

5. 多重线性映射连续的条件

(5.5.1) 设 $E_1, \cdots, E_n$ 是 n 个赋范空间，F是一赋范空间，u 是 $E_1 \times \cdots \times E_n$ 到F的多重线性映射． u 为连续的充要条件是：存在数 $a > 0$，使得对于任意 $(x_1, \cdots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$，都有：

$$\|u(x_1, x_2, \cdots, x_n)\| \leqslant a \cdot \|x_1\| \cdot \|x_2\| \cdots \|x_n\|.$$

我们写出 $n = 2$ 的证明．

1) 充分性．为证明u在任意点 (c_1, c_2) 是连续的，我们写出 $u(x_1, x_2) - u(c_1, c_2) = u(x_1 - c_1, x_2) + u(c_1, x_2 - c_2)$，因而 $\|u(x_1, x_2) - u(c_1, c_2)\| \leqslant a(\|x_1 - c_1\| \cdot \|x_2\| + \|c_1\| \cdot \|x_2 - c_2\|)$. 对于任意满足 $0 < \delta < 1$ 的 δ，假设 $\|x_1 - c_1\| \leqslant \delta$, $\|x_2 - c_2\| \leqslant \delta$，则 $\|x_2\| \leqslant \|c_2\| + 1$．因此我们有

$$\|u(x_1, x_2) - u(c_1, c_2)\| \leqslant a(\|c_1\| + \|c_2\| + 1)\delta,$$

它是随δ而任意小的．

2) 必要性．若u在点(0,0)连续，则在 $E_1 \times E_2$ 中存在球 $B: \sup(\|x_1\|, \|x_2\|) \leqslant r$ 使得 $(x_1, x_2) \in B$ 蕴含 $\|u(x_1, x_2)\| \leqslant 1$.

现在设 (x_1, x_2) 是任意的，先假定 $x_1 \neq 0$，$x_2 \neq 0$；那么，若 $z_1 = rx_1/\|x_1\|$，$z_2 = rx_2/\|x_2\|$，则有 $\|z_1\| = \|z_2\| = r$，因而 $\|u(z_1, z_2)\| \leqslant 1$. 但是 $u(z_1, z_2) = r^2 u(x_1, x_2)/\|x_1\| \cdot \|x_2\|$，故 $\|u(x_1, x_2)\| \leqslant a \cdot \|x_1\| \cdot \|x_2\|$，其中 $a = 1/r^2$. 若 $x_1 = 0$ 或者 $x_2 = 0$，则 $u(x_1, x_2) = 0$，于是上述不等式成立.

(5.5.2) 设 u 是 Banach 空间 E 到 Banach 空间 F 的连续线性映射. 如果 (x_n) 是 E 中的收敛(相应地,绝对收敛)级数,则 $(u(x_n))$ 是 F 中的收敛（相应地，绝对收敛）级数，并且 $\sum\limits_n u(x_n) = u\left(\sum\limits_n x_n\right)$.

级数 $(u(x_n))$ 的收敛性与关系 $\sum\limits_n u(x_n) = u\left(\sum\limits_n x_n\right)$ 可立即由连续线性映射的定义推出(参看(3.13.14)). 由(5.5.1)得知：存在常数 $a > 0$ 使得 $\|u(x_n)\| \leqslant a \cdot \|x_n\|$，于是，由 (5.3.1)当级数 (x_n) 绝对收敛时，级数 $(u(x_n))$ 也绝对收敛.

(5.5.3) 设 E，F，G 是三个 Banach 空间，u 是 $E \times F$ 到 G 的连续双线性映射. 如果 (x_n) 是 E 中的绝对收敛级数，(y_n) 是 F 中的绝对收敛级数，则族 $(u(x_m, y_n))$ 是绝对可和的，并且

$$\sum_{m, n} u(x_m, y_n) = u\left(\sum_n x_n, \ \sum_n y_n\right).$$

为使用准则(5.3.4)，必须证明对任意 p，和 $\sum\limits_{m<p\ n<p} \|u(x_m, y_n)\|$ 有界. 但是由 (5.5.1)，存在 $a > 0$ 使得 $\|u(x_m, y_x)\| \leqslant a\|x_m\| \cdot \|y_n\|$，于是

$$\sum_{m<p, n<p} u\|(x_m, y_n) \leqslant a \cdot \sum_{m<p, n<p}^{\infty} \|x_m\| \cdot \|y_x\|$$

$$= a\left(\sum_{n=0}^{p} \|x_n\|\right)\left(\sum_{n=0}^{p} \|y_n\|\right),$$

此式据对 (x_n) 与 (y_n) 的假设，是有界的. 此外，由 (5.3.6) 与

(5.5.2)推得：若 $s = \sum_n x_n$, $s' = \sum_n y_n$，则

$$\sum_{m,n} u(x_m, y_n) = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} u(x_m, y_n)\right) = \sum_{m=0}^{\infty} u(x_m, s')$$
$$= u(s, s').$$

(5.5.4) 设 E 是赋范空间，F 是 Banach 空间，G 是 E 的稠密子空间，f 是 G 到 F 的连续线性映射. 那么，存在 E 到 F 的唯一的连续线性映射 $\bar{f}$，且是 f 的延拓.

由(5.5.1)推得，f 在 G 中是一致连续的，因为 $\|f(x) - f(y)\| = \|f(x-y)\| \leqslant a\|x-y\|$；于是由(3.15.6)，存在 f 到 E 上的唯一的连续延拓 $\bar{f}$. $\bar{f}$ 是线性的这一事实可由(5.1.5)与恒等延拓原理(3.15.2)推出.

问　　题

1) 设 u 是赋范空间 E 到赋范空间 F 的这样的映射：对 E 的任意一对点 x, y，有 $u(x+y) = u(x) + u(y)$，而且 u 在 E 中的球 $B(0;1)$ 内有界. 试证 u 是线性的与连续的. (注意：$u(rx) = ru(x)$，r 为任意有理数，且对 $y \in B(0;1)$ 有 $\left\|u\left(x + \frac{1}{n}y\right) - u(x)\right\| \leqslant \frac{1}{n}\|u(y)\|$，$n \geqslant 1$；推导出 $u(\lambda x) = \lambda u(x)$，$\lambda$ 为任意实数，取 $\frac{1}{n}y = (r-\lambda)x$，其中 r 是有理数.)

2) 设 E, F 是两个赋范空间，u 是 E 到 F 的线性映射. 试证：如果对 E 中每个满足 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ 的序列 (x_n)，序列 $(u(x_n))$ 在 F 中都有界，则 u 是连续的. (用反证法.)

3) a) 设 a, b 是赋范空间 E 中的两点. 设 B_1 是所有满足 $\|x-a\| = \|x-b\| = \|a-b\|/2$ 的 $x \in E$ 的集；对于 $n>1$，设 B_n 是这样的 $x \in B_{n-1}$ 的集：对所有 $y \in B_{n-1}$ 都有 $\|x-y\| \leqslant \delta(B_{n-1})/2$ ($\delta(A)$ 是集合 A 的直径). 试证 $\delta(B_n) \leqslant \delta(B_{n-1})/2$，并且所有 B_n 的交化为 $(a+b)/2$.

b) 由 a) 推证：如果 f 是实赋范空间 F 的等距，则 $f(x) = u(x) + c$，其中 u 是一线性等距，$c \in F$.

4) 我们称 $\boldsymbol{N}$ 的两区间之积为 $\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$ 中的矩形. 对于 $\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$ 的任意有

限子集 H，设 $\psi(H)$ 是并集为 H 的最少矩形数．设 (H_n) 是 $\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$ 的有限子集的递增序列，其并集为 $\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$ 而且序列 $(\psi(H_n))$ 有界．设 E，F，G 是三个赋范空间，(x_n)（相应地，(y_n)）是 E（相应地，F）中的收敛级数，f 是 $E\times F$ 到 G 的连续双线性映射．试证：

$$(*)\qquad \lim_{n\to\infty}\sum_{(h,k)\in H_n} f(x_h, y_k) = f\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n, \sum_{n=0}^{\infty} y_n\right).$$

5）设 (H_n) 是 $\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$ 的有限子集的递增序列，其并集为 $\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$．对每个 $j\in\boldsymbol{N}$ 与每个 $n\in\boldsymbol{N}$，设 $\varphi(j, n)$ 是并集为 $H_n^{-1}(j)$ 的 $\boldsymbol{N}$ 的最少区间数，其中 $H_n^{-1}(j)$ 是使得 $(i, j)\in H_n$ 的所有整数 i 的集．假设 $\varphi(j, n)$ 在 $\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$ 中有界．又设 (x_n) 是赋范空间 E 中的收敛级数，(y_n) 是赋范空间 F 中的绝对收敛级数，f 是 $E\times F$ 到赋范空间 G 中的连续双线性映射．试证问题 4 中的公式（$*$）仍然成立（利用（5.5.1），并注意对于所有的 j，n，和 $\sum_{(i,j)\in H_n} x_i$ 在 E 中有界）．（参看 12.16 问题 12）．）

6）设 E，F 是两个实赋范空间．E 到 F 的映射 f 称为在 0 的一邻域中是 f 线性的，如果存在这样的 δ：

（1）在 E 中关系式 $\|x\|\leqslant\delta$，$\|x'\|\leqslant\delta$，$\|x+x'\|\leqslant\delta$ 蕴含 $f(x+x')=f(x)+f(x')$，（2）在 E 中关系式 $\|x\|\leqslant\delta$，$\|\lambda x\|\leqslant\delta(\lambda\in\boldsymbol{R})$ 蕴含 $f(\lambda x)=\lambda f(x)$．

a）试证，若 f 满足条件（1）并且在 0 连续，则它在 0 的某个邻域中连续，并且在 0 的某个邻域中是线性的．（参看问题 1）．）

b）设 g 是 E 到 F 的映射，为使 g 在 0 连续并且在 0 的某一邻域中为线性的，充要条件是对 E 中任意的收敛级数 (x_n)，级数 $(g(x_n))$ 的部分和在 F 中有界．（为证充分性，首先注意到，必定有 $g(0)=0$；如果对每个 n 存在 E 的三个元素 u_n，v_n，w_n，使得 $\|u_n\|\leqslant 2^{-n}$，$\|v_n\|\leqslant 2^{-n}$，$\|w_n\|\leqslant 2^{-n}$，$u_n+v_n+w_n=0$ 且 $g(u_n)+g(v_n)+g(w_n)\neq 0$，作一个级数 (x_n)，使与假设矛盾．如果不存在序列 u_n，v_n w_n，则 g 满足条件（1）；试证它必定在 0 连续．）

6. 等 价 范 数

设 E 是一向量空间（在实数或复数域上），$\|x\|_1$ 与 $\|x\|_2$ 是 E 上的两个范数．我们说 $\|x\|_1$ **比** $\|x\|_2$ **更精**，如果由 $\|x\|_1$ 定义的拓扑比由 $\|x\|_2$ 定义的拓扑更精（参见（3.12））；如果我们用 E_1（相应地，

E_2）记由$\|x\|_1$（相应地，$\|x\|_2$）确定的赋范空间，也就是说 E_1 到 E_2 的恒等映射 $x\to x$ 是连续的，则由(5.5.1)，这条件等价于：存在数 $a>0$ 使得 $\|x\|_2\leqslant a\cdot\|x\|_1$. 我们称两个范数 $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ **是等价的**，如果它们在 E 上定义同一个拓扑. 由上述附注立即得到：

(5.6.1) 向量空间 E 上的两个范数 $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ 为等价的充要条件是：存在两个常数 $a>0$, $b>0$, 使得对于任意 $x\in E$ 都有

$$a\|x\|_1\leqslant\|x\|_2\leqslant b\|x\|_1.$$

这时对应的两个距离是一致等价的(3.14).

例如，在两个赋范空间的积 $E_1\times E_2$ 上，三个范数 $\sup(\|x_1\|, \|x_2\|)$, $\|x_1\|+\|x_2\|$, $\sqrt{\|x_1\|^2+\|x_2\|^2}$ 是等价的. 在空间$E=\mathscr{C}_R(I)$上，(5.1.4)中定义的范数 $\|f\|_1$ 不等价于范数 $\|f\|_\infty=\sup\limits_{t\in I}|f(t)|$（见5.1 节问题 1).

7. 连续多重线性映射空间

设 E, F 是两个赋范空间. E 到 F 的所有连续线性映射的集 $\mathscr{L}(E;F)$ 是一向量空间，这由 (5.1.5) (3.20.4) 与(3.11.5)推知.

对每个 $u\in\mathscr{L}(E;F)$，设 $\|u\|$ 是满足下面关系的所有常数 $a>0$ 的下确界：对所有 x，$\|u(x)\|\leqslant a\cdot\|x\|$（参看(5.5.1)). 我们也可以写成

(5.7.1) $\|u\|=\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}\|u(x)\|$.

据定义，对每个 $a>\|u\|$ 与每个 $\|x\|\leqslant 1$，有 $\|u(x)\|\leqslant a$，故 $\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}\|u(x)\|\leqslant\|u\|$. 因而对 $\|u\|=0$ 证明了(5.7.1). 如果 $\|u\|>0$，则对任意满足 $0<b<\|u\|$ 的 b，存在 $x\in E$，使得 $\|u(x)\|>b\|x\|$. 这蕴含 $x\neq 0$，因此如果 $z=x/\|x\|$，则仍有 $\|u(z)\|>b\|z\|=b$，由于 $\|z\|=1$，这就证明了 $b\leqslant\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}\|u(x)\|$，于是 $\|u\|\leqslant\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}\|u(x)\|$，因而(5.7.1)得证. 利用相同的论证可

得:

(5.7.2) 如果 $E \neq \{0\}$, 则 $\|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$.

现在我们证明 $\|u\|$ 是向量空间 $\mathscr{L}(E; F)$ 上的范数. 如果 $u = 0$, 则由(5.7.1) $\|u\| = 0$, 反之, 如果 $\|u\| = 0$, 则对 $\|x\| \leqslant 1$ 有 $u(x) = 0$, 因此对 E 中的任意 $x \neq 0$, 有 $u(x) = \|x\| u(x/\|x\|) = 0$. 同样可由(5.7.1)推得 $\|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$. 最后,如果 $w = u + v$, 则有 $\|w(x)\| \leqslant \|u(x)\| + \|v(x)\|$,于是由(5.7.1), $\|w\| \leqslant \|u\| + \|v\|$.

(5.7.3) 如果 F 是完备的,则赋范空间 $\mathscr{L}(E; F)$ 也是完备的.

设 (u_n) 是 $\mathscr{L}$ $(E; F)$ 中的 Cauchy 序列; 因而对任意 $\varepsilon > 0$, 都存在 n_0 使得对于 $m \geqslant n_0$, $n \geqslant n_0$ 有 $\|u_m - u_n\| \leqslant \varepsilon$. 故由(5.7.1),对任意满足 $\|x\| \leqslant 1$ 的 x, 有 $\|u_m(x) - u_n(x)\| \leqslant \varepsilon$, 其中 $m \geqslant n_0$, $n \geqslant n_0$, 这表明序列 $(u_n(x))$ 是 F 中的 Cauchy 序列, 因而收敛到一元素 $v(x) \in F$. 这对任意 $x \in E$ 也成立, 因为我们可以记 $x = \lambda z$, 其中 $\|z\| \leqslant 1$, 故 $u_n(x) = \lambda u_n(z)$ 趋于一极限 $v(x) = \lambda v(z)$. 由关系 $u_n(x + y) = u_n(x) + u_n(y)$ 与(5.1.5)推得 $v(x + y) = v(x) + v(y)$, 还可类似地证明 $v(\lambda x) = \lambda v(x)$, 换句话说 v 是线性的. 最后, 由 $\|u_m(x) - u_n(x)\| \leqslant \varepsilon$, 其中 $m \geqslant n_0$, 推得: 对 $\|x\| \leqslant 1$ 有 $\|v(x) - u_n(x)\| \leqslant \varepsilon$, 故 $\|v(x)\| \leqslant \|u_n\| + \varepsilon$, 从而证明 v 是连续的, 据(5.5.1),便知它在 $\mathscr{L}(E; F)$ 中. 此外,对于 $n \geqslant 0$, $\|v - u_n\| \leqslant \varepsilon$ (据(5.7.1)), 这就证明了序列 (u_n) 收敛于 v.

由定义推得,对于每个 $x \in E$ 与每个 $u \in \mathscr{L}(E; F)$,都有

(5.7.4) $$\|u(x)\| \leqslant \|u\| \cdot \|x\|.$$

从而证明 $E \times \mathscr{L}(E; F)$ 到 F 的双线性映射 $(x, u) \to u(x)$ 是连续的(据(5.5.1)).

$\mathscr{L}(E; F)$ 中范数的定义取决于 E 与 F 中的范数; 但容易看出,当 E 与 F 中的范数被等价范数取代时,在 $\mathscr{L}(E; F)$ 中得到的新范数与原范数等价.

(5.7.5) 设 u 是赋范空间 E 到赋范空间 F 的连续性映射，v 是 F 到赋范空间 G 的连续线性映射. 则 $\|u\circ v\|\leqslant\|u\|\cdot\|v\|$.

因为若 $\|x\|\leqslant 1$，则据(5.7.4)有 $\|v(u(x))\|\leqslant\|v\|\cdot\|u(x)\|\leqslant\|v\|\cdot\|u\|$，于是结果由(5.7.1)得到.

(5.7.6) 如果 F 是实(复)赋范空间,那么把每个 $a\in F$ 与 $\mathscr{L}(\boldsymbol{R};F)$(相应地，$\mathscr{L}(\boldsymbol{C};F)$)中的元素 θ_a: $\xi\to\xi a$ 对应的映射是 F 到 $\mathscr{L}(\boldsymbol{R};F)$(相应地，$\mathscr{L}(\boldsymbol{C};F)$)上的线性等距.

显然映射 $a\to\theta_a$ 是线性的. 它是满射的，因为每个 $\boldsymbol{R}$(相应地,$\boldsymbol{C}$)到 F 的线性映射 f 都使得 $f(\xi)=f(\xi\cdot 1)=\xi f(1)=\xi a$，其中 $a=f(1)$. 最后据(5.1)的公理(III),$\|\theta_a\|=\sup\limits_{|\xi|\leqslant 1}\|\xi_a\|=\|a\|$.

现在设 $E_1,\cdots,E_n,F$ 是 $n+1$ 个赋范空间,并把 $\mathscr{L}(E_1,\cdots,E_n;F)$ 定义为由 $E_1\times\cdots\times E_n$ 到 F 的所有连续性映射组成的向量空间. 那么对于 $u\in\mathscr{L}(E_1,\cdots,E_n;F)$，用上面相同的论证可证明,所有使

$$\|u(x_1,\cdots,x_n)\|\leqslant a\|x_1\|\cdots\|x_n\|$$

的常数 $a>0$ 的下确界 $\|u\|$ 同样由

(5.7.7) $$\|u\|=\sup_{\|x_1\|\leqslant 1,\cdots,\|x_n\|\leqslant 1}\|u(x_1,\cdots,x_n)\|$$

给出. 我们也看到 $\|u\|$ 是 $\mathscr{L}(E_1,\cdots,E_n;F)$ 上的范数. 但是实际上这些向量空间可以化成空间 $\mathscr{L}(X;Y)$:

(5.7.8) 对每个 $u\in\mathscr{L}(E,F;G)$ 与每个 $x\in E$，设 u_x 是线性映射 $y\to u(x,y)$. 那么 $\tilde{u}$: $x\to u_x$ 是 E 到 $\mathscr{L}(F;G)$ 的连续线性映射,并且映射 $u\to\tilde{u}$ 是 $\mathscr{L}(E,F;G)$ 到 $\mathscr{L}(E;\mathscr{L}(F;G))$ 上的线性等距.

我们有 $\|u_x(y)\|=\|u(x,y)\|\leqslant\|u\|\cdot\|x\|\cdot\|y\|$，故根据(5.5.1) u_x 是连续的. 又 $\|u_x\|=\sup\limits_{\|y\|\leqslant 1}\|u(x,y)\|$, 于是由(2.3.7)有

$$\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|u_x\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1,\|y\|\leqslant 1}\|u(x,y)\|=\|u\|,$$

这证明 $x\to u_x$(它显然是线性的)是连续映射,并且 $u\to\tilde{u}$ 是 $\mathscr{L}(E,F;G)$ 到 $\mathscr{L}(E;\mathscr{L}(F;G))$ 中的等距. 最后 $u\to\tilde{u}$ 是满射的,因为如果 $v\in\mathscr{L}(E;\mathscr{L}(F;G))$，则 u: $(x,y)\to(v(x))(y)$ 显然

是双线性的，又因根据(5.7.4) $\|(v(x))(y)\| \leqslant \|v(x)\| \cdot \|y\| \leqslant \|v\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|$，所以 u 是连续的，且 $v(x) = u_x$，证完.

由对 n 使用归纳法推得：$\mathscr{L}(E_1, \cdots, E_n; F)$ 自然可以看成（范数保持不变）

$$\mathscr{L}(E_1; \mathscr{L}(E_2; \cdots, \mathscr{L}(E_n; F))\cdots).$$

问　　题

1) a) 设 E 是 5.3 节问题 5 中定义的 Banach 的空间 (c_0)，我们保持那个问题中的记号. 设 u 是 E 到 $\boldsymbol{R}$ 的连续线性映射. 如果 $u(e_n) = \eta_n$，试证级数 $\Sigma\eta_n$ 是绝对收敛的，并且在 Banach 空间 $E' = \mathscr{L}(E; \boldsymbol{R})$ 中，$\|u\| = \sum_{n=0}^{\infty} |\eta_n|$（对 $x \in E$ 的适当值应用(5.5.1)）. 反之，对任意绝对收敛的实数级数 (η_n)，有且仅有 E 到 $\boldsymbol{R}$ 的一个连续线性映射 u 使得对每个 n，都有 $u(e_n) = \eta_n$. 且如果 $x = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n e_n \in E$，则 $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n \xi_n$（具有上面定义的范数的空间 E'，就是 Banach 的"空间 l^1"）.

b) E' 作为一个向量空间(不具有范数)可以看作 E 的一个子空间. 试证 E' 的上述范数比 E 的范数在 E' 上的限制是严格更精的(5.6).

c) 试证：E' 到 $\boldsymbol{R}$ 的连续线性映射空间 $E'' = \mathscr{L}(E'; \boldsymbol{R})$ 可以视为所有有界实数序列 $x = (\zeta_n)$ 的空间，其中范数 $\|x\| = \sup_n |\zeta_n|$（即 Banach 的"空间 l^∞". 使用与 a) 中同样的方法）. E 可以看作 E'' 的一个闭子空间.

d) 在空间 E' 中，设 P 是所有满足 $\eta_n \geqslant 0$ 的绝对收敛级数 $u = (\eta_n)$ 的子集；那么 E' 的任意元素都可以写成 $u - v$ 的形式，其中 u 与 v 都在 P 中；并证明集 P 的内部是空的.

2) a) 设 E 是 Banach 的空间 (c_0)，U 是 E 到自身的连续线性映射. 利用问题 1 中的记号，设 $U(e_n) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{mn} e_m$；试证：1° $\lim_{m\to\infty} \alpha_{mn} = 0$；2° 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{mn}|$ 对每个 m 都是收敛的；3° $\sup_m \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{mn}|$ 是有限的.（与问题 1a) 中所用方法相同）并证明其逆，然后证明 Banach 空间 $\mathscr{L}(E; E)$ 可视为满足

上述条件的双重序列 $U=(\alpha_{mn})$ 的空间，具有范数 $\|U\|=\sup_m \sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_{mn}|$.

b) 设 E' 是 Banach 空间 l^1（问题 1）. 类似地证明 Banach 空间 $\mathscr{L}(E';E')$ 可视为满足下述条件的双重序列 $\dot{U}=(\alpha_{mn})$ 的空间：1° 级数 $\sum_{m=0}^{\infty}|\alpha_{mn}|$ 对每个 n 都收敛；2° $\sup_n \sum_{m=0}^{\infty}|\alpha_{mn}|$ 是有限的；而且其范数等于 $\|U\|=\sup_n \sum_{m=0}^{\infty}|\alpha_{mn}|$.

3) 设 E 是赋范空间；试证：不可能存在 E 到自身的两个连续线性映射 u, v 使得 $u\circ v-v\circ u=1$（恒等映射）.（证明这蕴含 $u\circ v^{n+1}-v^{n+1}\circ u=(n+1)v^n$，因此有不等式 $(n+1)\|v^n\|\leqslant 2\|u\|\cdot\|v\|\cdot\|v^n\|$，$n$ 充分大，且从此式可导出 $v^n=0$，于是 $v=0$，这是一个矛盾.）

8. 闭超平面与连续线性型

读者记得，实（相应地，复）向量空间 E 上的一个**线性型**就是 E 到 $\boldsymbol{R}$（相应地，$\boldsymbol{C}$）的一个线性映射 f；它的**核** $H=f^{-1}(0)$ 是这样一个向量子空间：对任意 $a\notin H$，E 是 H 与 $\boldsymbol{R}a$（相应地，$\boldsymbol{C}a$）的代数直和. 一个子空间，具有上述性质，就称为**超平面**；如果 H 是一超平面，$a\notin H$，又如果对任意 $x\in E$，我们写成 $x=f(x)a+y$，其中 $f(x)$ 是一纯量，而 $y\in H$，那么，f 是一线性型而且 $H=f^{-1}(0)$. 关系 $f(x)=0$ 称为 H 的**方程**；如果 f_1 是另一个线性型，且使得 $H=f_1^{-1}(0)$，则 $f_1=\alpha f$（α 是纯量）. 我们还记得，超平面是最大的：即 E 中包含超平面 H 的任一向量子空间或者是 H 或者是 E 本身.

(5.8.1) 在实（相应地，复）赋范空间 E 中，设 H 是方程 $f(x)=0$ 的超平面. H 在 E 中是闭的，其充要条件是：f 为连续的. 这时，对任意 $b\notin H$，E 是 H 与一维子空间 $D=\boldsymbol{R}b$（$D=\boldsymbol{C}b$）的拓扑直和（参见(5.4)）.

显然，如果 f 是连续的，则 $H=f^{-1}(0)$ 是闭的（见(3.15.1)）. 为证明其逆，设 $a\notin H$ 使 $f(a)=1$. 因 H 是闭的，故 $a+H$ 也是闭的（据(5.1.5)），又因 $0\notin a+H$，故存在球 V：$\|x\|\leqslant r$ 不与 $a+H$

相交. 因此 $x\in V$ 蕴含 $f(x)\neq 1$. 我们证明 $x\in V$ 蕴含 $|f(x)|\leqslant 1$. 假设正相反,并设 $\alpha=f(x)$, 其中 $|\alpha|>1$; 则 $\|x/\alpha\|=(1/|\alpha|)\|x\|<r$, 而 $f(x/\alpha)=1$, 这与 V 的定义矛盾. 由齐性与(5.5.1)推得 f 是连续的. 如果 $b\notin H$, 对每个 $x\in E$ 我们有 $x=g(x)b+y$, 其中 $y\in H$, $g(x)=0$ 是 H 的另一个方程. 则 g 是连续的, 从而 E 到 $D=\boldsymbol{R}b$ (相应地, $\boldsymbol{C}b$) 的映射 $x\to g(x)b$ 也是连续的. 据(5.4.2)这就证明了(5.8.1)的最后部分.

(5.8.2) 在赋范空间 E 中, 一超平面 H 或者是闭的或者是稠的. 因为 $\overline{H}$ 是一向量子空间(据(5.4.1)),它只能是 E 或者 H.

问　　题

1) 设 E 是 Banach 空间 (c_0) 的(不完备)子空间,它是由只具有有限项异于零的实数序列 $x=(\xi_n)$ 组成的. 对任意实数序列 (α_n), 映射 $x\to u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\xi_n$ 都是 E 上的线性型,并且 E 上的所有线性型都可以用那种方法获得. 其中有哪些是连续的? (参见(5.5.4)与 5.7 节问题 1).

2) a) 在实赋范空间 E 中,设 H 是方程为 $u(x)=0$ 的闭超平面, 其中 u 是连续的线性型. 试证对任意 $a\in E$, 距离 $d(a,H)=|u(a)|/\|u\|$.

b) 在 Banach 空间 (c_0) 中, 设 H 是方程为 $u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}\xi_n=0$ 的闭超平面;如果 $a\notin H$, 试证不存在点 $b\in H$ 使得 $d(a,H)=d(a,b)$.

3) 在实向量空间 E 中,余维数为 1 的线性簇(5.1 节问题 5)也称为**超平面**. 它们是由形如 $u(x)=\alpha$ 的方程定义的集,其中 u 是线性型, α 是任意实数. 文中考虑的超平面是包含原点 0 的那些,也称为**齐次超平面**. 我们称由方程 $u(x)=\alpha$ 定义的任意超平面是平行于齐次超平面 $u(x)=0$, 如果 A 是 E 的非空子集. A 的**支撑超平面**是指由方程 $u(x)=\alpha$ 定义的这样的超平面 H: 它对所有 $x\in A$ 有 $u(x)-\alpha\geqslant 0$ 或者对所有 $x\in A$ 有 $u(x)-\alpha\leqslant 0$, 并且至少对于一点 $x_0\in A$ 有 $u(x_0)=\alpha$.

a) 在实赋范空间 E 中,含有内点的集的支撑超平面是闭的(参见(5.8.2)).

b) 设 A 是实赋范空间 E 中的紧子集;试证: 对于由方程 $u(x)=0$ 定义的任意齐次闭超平面 H_0, 总存在 A 的两个支撑超平面, 由形如 $u(x)=\alpha$ 的

方程定义，它们最终也许重合为一，而它们的距离至多等于 A 的直径.

c) 在 Banach 空间 (c_0) 中，考虑连续线性型 $x \to u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\xi_n$；试证：闭球 $B'(0;1)$ 的任何支撑超平面都不具有形如 $u(x) = \alpha$ 的方程(参看问题 2b)).

9. 有限维赋范空间

(5.9.1) 设 E 是 n 维实(相应地，复)赋范向量空间. 如果 $(a_1, \cdots, a_n)$ 是 E 的一个基，则 $\boldsymbol{R}^n$(相应地；$\boldsymbol{C}^n$) 到 E 上的映射

$$(\xi_1, \cdots, \xi_n) \to \xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n$$

是双连续的.

我们对 n 用归纳法，首先证明 $n = 1$ 的结果. 由(5.1.5)知道 $\xi \to \xi a_1$ 是连续的. 因为 $a_1 \neq 0$ 与 $\|\xi a_1\| = \|a_1\| \cdot |\xi|$，故有 $|\xi| \leqslant (1/\|a_1\|) \cdot \|\xi a_1\|$，据(5.5.1)，这就证明了 $\xi a_1 \to \xi$ 的连续性.

假设对于 $n-1$ 定理已经证明. 设 H 是 E 中由 $a_1, \cdots, a_{n-1}$ 生成的超平面. 归纳假设蕴含 H 上的范数(由 E 上的范数导出的)等价于范数 $\sup_{1 \leqslant i \leqslant n-1} |\xi_i|$. 于是 H 是完备的(对于两个范数)，因此在 E 中是闭的(据(3.14.4)). 由(5.8.1)可推知映射 $(\xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n) \to \xi_n$ 是连续的. 这与归纳假设一起就完成了证明(据(3.20.4)与(5.4.2)).

(5.9.2) 在赋范空间 E 中，设 V 是闭子空间，W 是一有限维子空间；那么 $V + W$ 在 E 中是闭的. 特别地，任意有限维子空间在 E 中是闭的.

我们可对 W 的维数 n 用归纳法，从而把证明化为 $n = 1$ 的情形. 设 $W = \boldsymbol{R}a$(相应地，$W = \boldsymbol{C}a$)；如果 $a \in V$，则 $V + W = V$，没有什么要证明的了. 如若不然，可以把任意 $x \in V + W$ 写成 $x = f(x)a + y$，其中 $y \in V$. 因为 V 是 $V + W$ 中的闭超平面，故由(5.8.1)，f 在 $V + W$ 中是连续的. 设 (x_n) 是 $V + W$ 中的序列，它趋于 $V + W$ 中的一个触点 b (见(3.13.13)). 记 $x_n = f(x_n)a + y_n$. 据

(5.5.1)，序列 $(f(x_n))$ 是 $\boldsymbol{R}$(相应地，$\boldsymbol{C}$) 中的 Cauchy 序列，于是趋于一极限 λ. 因此 $y_n = x_n - f(x_n)a$ 趋于 $b - \lambda a$. 又因为 V 是闭的，所以 (y_n) 的极限在 V 中，于是 $b \in V + W$，这就是要证明的(参见 6.5节问题 2).

(5.9.3) 在赋范空间 E 中，设 V 是有限余维闭子空间(即有一个有限维代数余). 则 V 的任意代数余也是一拓扑余.

设 W 是 V 在 E 中的一代数余. 我们对 W 的维数 n 用归纳法. 对于 $n = 1$，结果已在(5.8.1)中证明. 我们可以记 $W = D + U$，其中 D 是一维的，而 U 是 $n - 1$ 维的(直和). 据 (5.9.2)，$V + D$ 在 E 中是闭的，于是据归纳假设 U 是 $V + D$ 的拓扑余. 换句话说，E 自然同胚于 $(V + D) \times U$；据(5.8.1)，$V + D$ 自然同胚于 $V \times D$，于是 E 自然同胚于 $V \times D \times U$. 最后，因 $D \times U$ 自然同胚于 W，所以 E 自然同胚于 $V \times W$，这就是要证明的.

(5.9.4) (F. Riesz 定理). 局部紧赋范空间 E 是有限维的.

由于范数可以用等价范数代替，我们可以假设球 B：$\|x\| \leqslant 1$ 是紧的. 因此由 (3.16.1)，存在有限点列 $a_i (1 \leqslant i \leqslant n)$，使得 B 含于以 a_i 为中心，$1/2$ 为半径的诸球的并集中. 设 V 是由那些 a_i 生成的有限维子空间. 我们用反证法证明 $V = E$. 事实上，假设存在 $x \in E$，而它不在 V 中. 因为 V 是闭的(据(5.9.2))，故 $d(x, v) = \alpha > 0$. 由 $d(x, v)$ 的定义，在 V 中存在一点 y 使得 $\alpha \leqslant \|x - y\| \leqslant \frac{3}{2}\alpha$. 设 $z = (x - y)/\|x - y\|$. 我们有 $\|z\| = 1$，于是存在附标 i 使得 $\|z - a_i\| \leqslant 1/2$. 可以写成

$$x = y + \|x - y\|z = y + \|x - y\|a_i + \|x - y\|(z - a_i),$$

并注意 $y + \|x - y\|a_i \in V$，因而由 $d(x, v)$ 的定义，有 $\|x - y\| \cdot \|z - a_i\| \geqslant \alpha$，于是 $\|x - y\| \geqslant 2\alpha$，但这与 y 的选择矛盾，因为 $\alpha \neq 0$.

问　　题

1) 试证：如果 E 是有限维赋范空间，则 E 到赋范空间 F 的每一线性映

射都是连续的(利用(5.9.1)与(5.1.5)).

2) 我们回顾: 向量空间E的**一向量基**是这样一个族 $(a_\iota)_{\iota\in I}$, 使得E的任意元素都能唯一地表示成有限个a_ι的线性组合. 特别地, 这蕴含a_ι是线性无关的.

a) 设(a_n)是Banach空间E中线性无关元素的序列. 用下面的方法归纳地定义$\mu_n>0$的实数序列(μ_n): 如果d_n是点$\mu_n a_n$到子空间V_{n-1}的距离, V_{n-1}是由$a_1,\cdots,a_{n-1}$生成的(注意据(5.9.2) $d_n>0$), 那么取μ_{n+1}使得$|\mu_{n+1}|\cdot\|a_{n+1}\|\leqslant d_n/3$. 试证级数$\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n a_n$是绝对收敛的, 而且它的和$x$不属于任何一个$V_n$.

b) 由a)推证: 无穷维Banach空间不可能有可数的向量基.

3) 试证: 含有紧球面的赋范空间是有限维的. (注意赋范空间E中满足$a\leqslant\|x\|\leqslant b(a>0)$的点$x$的集是同胚于区间$[a,b]$与球面$S:\|x\|=1$的乘积空间的. 然后使用Riesz定理(5.9.4)).

4) 设E是n维实赋范空间, A是E中一紧集. 用3.16节问题4的记号,证明: 存在一个常数$a>0$, 使得$N_\varepsilon(A)\leqslant a\cdot(1/\varepsilon)^n$; 此外, 如果$A$有内点,试证: 存在一常数$b>0$使得$M_{2\varepsilon}(A)\geqslant b\cdot(1/\varepsilon)^n$, 因而我们有

$$H_\varepsilon(A)\sim c_\varepsilon(A)\sim n\log 1/\varepsilon.$$

5) 设E是无穷维实赋范空间, (E_n)是有限维向量子空间中严格递增序列. 试证: 存在E中点的序列使得$x_n\in E_n$, $\|x\|=1$且$d(x_n,E_{n-1})=1$. 另一方面,设φ是对于$t\geqslant1$定义的函数,严格递增且>0, 并满足$\lim_{t\to+\infty}\varphi(t)=0$. 我们置$z_n=2\varphi(n)x_n$; 如果$K$是由0与$z_n$构成的紧集,试证: 我们有$M_\varepsilon(K)\geqslant\psi(\varepsilon)$,其中$\psi$是$\varphi$的反函数(在0的邻域中定义的);而当$\frac{1}{\varepsilon}\to+\infty$时$M_\varepsilon(K)$则以任意快的速度增加.

10. 可分赋范空间

(5.10.1) 如果在赋范空间E中存在一个全序列(5.4), 则E是可分的. 反之,在可分赋范空间E中,存在由线性无关向量组成的全序列.

假设(a_n)是一个全序列,并设D是所有(有限)有理系数的线性组合$r_1a_1+\cdots+r_na_n$的集(当E是复向量空间时,"有理"纯

量指的是复数 $\alpha+i\beta$，其中 α 与 β 都是有理数）. 据(1.9.3)与(1.9.4)，D 是可数集，因为，由定义，a_n 的所有线性组合的集 L 在 E 中是稠密的，所以我们只须证明 D 在 L 中是稠密的，又因为

$$\|(\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_n a_n)-(r_1 a_1+\cdots+r_n a_n)\| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j - r_j| \cdot \|a_j\|$$

于是稠密性可由(2.2.16)推得.

反之，假设 E 是可分的；当然，我们可以设 E 是无穷维的(否则，E 的任意基已是一有限全子集)．设 (a_n) 是 E 中向量的无穷稠密序列．用归纳法定义一个子序列 (a_{k_n}) 具有下述性质：它由线性无关向量组成，并且对于任意 $m\leqslant k_n$，a_m 是 $a_{k_1}, \cdots, a_{k_n}$ 的线性组合．要做到这一点，只要取第一个使 $a_n\neq 0$ 的附标作为 k_1，取满足下述条件的最小附标 $m>k_n$ 作为 k_{n+1}：a_m 不在由 $a_{k_1}, \cdots, a_{k_n}$ 生成的子空间 V_n 中．这样的附标是存在的．如若不然，据(5.9.2)，V_n 是闭的，故 V_n 就将包含所有 a_n 的集的闭包 E，这与假设矛盾．于是很清楚，(a_{k_n}) 具有所要求的性质，而据构造法，它显然是一个全序列.

问　　题

证明：Banach 空间 (c_0) 与 l^1 (5.3节问题 5 与 5.7 节问题 1) 是可分的，而空间 l^∞ (5.7节问题 1)是不可分的．(利用 4.2 节问题 2b)与(2.2.17)证明在 l^∞ 中存在这样一个不可数点族 (x_λ)：对 $\lambda\neq\mu$，$\|x_\lambda - x_\mu\|=1$.)

第六章　Hilbert 空间

Hilbert 空间目前构成 Banach 空间的最重要的例子，这不仅是因为它们是古典欧氏几何在“无穷维”领域中的最自然与最直接的推广，而且更主要是因为在泛函分析的应用中，直到今天，它们一直是最有用的空间. 除(6.3.1)以外，所有的结果都容易由定义与基本的 Cauchy-Schwarz 不等式(6.2.4)推出.

1. Hermite 型

对任意实数或复数 λ，把它的复共轭写作 $\bar{\lambda}$（若 λ 是实数，则 $\bar{\lambda}=\lambda$）. 实(相应地，复)向量空间 E 上的 Hermite 型是 $E\times E$ 到 $\boldsymbol{R}$(相应地，$\boldsymbol{C}$)的一映射 f，具有下列性质：

(I) $f(x+x',y)=f(x,y)+f(x',y)$,

(II) $f(x,y+y')=f(x,y)+f(x,y')$,

(III) $f(\lambda x,y)=\lambda f(x,y)$,

(IV) $f(x,\lambda y)=\bar{\lambda}f(x,y)$,

(V) $f(y,x)=\overline{f(x,y)}$.

（注意 (II) 与 (IV) 可由其余的恒等式推出，(V) 蕴含 $f(x,x)$ 是实数.）当 E 是实向量空间时，条件 (I) 到 (IV) 表示 f 是双线性的，且 (V) 简化为 $f(y,x)=f(x,y)$，它表示 f 是对称的. 对任意有限向量组 (x_i)，(y_j) 与纯量组 (α_i)，(β_j)，由对它们的个数应用归纳法，可得：

(6.1.1) $$f\left(\sum_i \alpha_i x_i,\ \sum_j \beta_j y_j\right)=\sum_{ij}\alpha_i\bar{\beta}_j f(x_i,y_j).$$

由(6.1.1)推得：如果 E 是有限维的，并且 (a_i) 是 E 的基，则 f 完全由它的值 $\alpha_{ij}=f(a_i,a_j)$ 决定，后者(据 (V)) 满足：

(6.1.2) $\alpha_{ji} = \bar{\alpha}_{ij}$.

事实上，对于 $x = \sum_i \xi_i a_i$, $y = \sum_i \eta_i a_i$, 我们有

(6.1.3) $f(x, y) = \sum_{ij} \alpha_{ij}\xi_i\bar{\eta}_j$.

反之，对满足(6.1.2)的任意实数(复数)组 (α_{ij}), (6.1.3)的右边都在实(相应地,复)有限维向量空间E上定义一个 Hermite 型.

(6.1.4) 例. 设D是$\boldsymbol{R}^2$中一相对紧开集,又设E是所有在D中有界连续的实值(相应地，复值)函数组成的实(相应地，复)向量空间,这些函数都具有在D中有界连续的一阶导数. 那么映射:

$$(f,g) \to \varphi(f,g) = \iint_D \Big(a(x, y)f(x, y)\overline{g(x,y)} + b(x, y)\frac{\partial f}{\partial x}\overline{\frac{\partial g}{\partial x}} + c(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}\overline{\frac{\partial g}{\partial y}}\Big)dxdy.$$

(其中 a, b, c 是在 D 中连续、有界与实值的)是E上的 Hermite 型.

向量空间E的一对向量x, y对于E上的 Hermite 型f是**直交的**，如果 $f(x, y) = 0$ (由 (V) 推出这个关系,对于x, y是对称的). 一个向量x与它自己直交(即 $f(x, x) = 0$), 就说它对于f是**迷向的**. 对于E的任意子集M, 与所有向量 $x \in M$ 都直交的向量y的集是E的一向量子空间,我们说它是**与M直交的**(对于f). 也可能有一个向量 $a \neq 0$ 存在,它与整个空间E直交,在这种情形下，我们说那个 Hermite 型f是**退化的**. 在有限维空间E上，由(6.1.3)定义的非退化 Hermite 型f是这样的：与它对应的那个矩阵(α_{ij})是可逆的.

问　　题

1) a) 设f是向量空间E上的 Hermite 型. 试证：如果E是实向量空间,则

$$4f(x, y) = f(x + y, x + y) - f(x - y, x - y),$$

而如果 E 是复向量空间，则

$$4f(x, y) = f(x+y, x+y) - f(x-y, x-y) + if(x+iy, x+iy) - if(x-iy, x-iy).$$

b) 由 a) 推证：如果对于 E 的子空间 M 中每一向量 x 都有 $f(x,x)=0$，则对于 M 的任一对向量 x, y 都有 $f(x, y)=0$.

c) 不用 a) 中证明的恒等式证明 b).（注意：对任意 λ，$f(x+\lambda y, x+\lambda y)=0$.）

2) 设 E 是复向量空间．试证：如果 f 是 $E\times E$ 到 C 满足条件 I, II, III, IV 的映射，并且使到对每个 $x\in E$ 有 $f(x, x)\in \boldsymbol{R}$，则 f 是 E 上的 Hermite 型。

2. 正 Hermite 型

我们说向量空间 E 上的 Hermite 型 f 是正的，如果对任意 $x\in E$，$f(x, x)\geqslant 0$. 例如，在例(6.1.4)中定义的型 φ，当 a, b, c 在 D 中 $\geqslant 0$ 时，是正的.

(6.2.1) (Cauchy-Schwarz 不等式). 如果 f 是一正 Hermite 型，则对 E 中任意一对向量 x, y 都有

$$|f(x, y)|^2\leqslant f(x, x)f(y, y).$$

记 $a=f(x, x)$，$b=f(x, y)$，$c=f(y, y)$ 并记住 a 与 c 是实数且 $\geqslant 0$. 首先假设 $c\neq 0$ 并留意对任意纯量 λ，$f(x+\lambda y, x+\lambda y)\geqslant 0$，此式给出 $a+b\bar{\lambda}+\bar{b}\lambda+c\lambda\bar{\lambda}\geqslant 0$. 取 $\lambda=-b/c$ 就得到要证的不等式. 当 $c=0$，$a\neq 0$ 时，可类似地证明. 最后，如果 $a=c=0$，那么，取 $\lambda=-b$，就得到 $-2b\bar{b}\geqslant 0$，也就是 $b=0$.

(6.2.2) 为使 E 上的正 Hermite 型 f 为非退化的，充要条件是除 0 以外不存在对于 f 的迷向向量，亦即对于 E 中任意 $x\neq 0$，$f(x, x)>0$.

事实上，据 Cauchy-Schwarz 不等式，$f(x, x)=0$ 蕴含对所有 $y\in E$，$f(x, y)=0$.

(6.2.3) (Minkowski 不等式). 如果 f 是正 Hermite 型，则对 E 中

任意一对向量 x, y, 都有

$$\sqrt{f(x+y, x+y)} \leqslant \sqrt{f(x, x)} + \sqrt{f(y, y)}.$$

因为 $f(x+y, x+y) = f(x,x) + f(x,y) + \overline{f(x,y)} + f(y,y)$,所以要证的不等式等价于

$$2\mathscr{R}f(x, y) = f(x, y) + \overline{f(x, y)} \leqslant 2\sqrt{f(x, x)f(y, y)}.$$

后者可由 Cauchy-Schwarz 不等式推出.

于是,函数 $x \to \sqrt{f(x, x)}$ 满足 (5.1) 中的条件 (I), (III) 与 (IV). 据(6.2.2),(5.1)中的条件 (II) 等价于型 f 是非退化的. 因此,当 f 是非退化的正 Hermite 型(也称为正定型)时,$\sqrt{f(x, x)}$是 E 上的范数. 一向量空间 E 连同 E 上一给定的非退化正 Hermite 型一起被称为一准 Hilbert 空间. 当不会引起混淆时,该型写为 $(x|y)$,并且它的值称为 x 与 y 的**纯量积**.我们总是把准 Hilbert 空间 E 看作一赋范空间,其范数 $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$. 当然这一空间也总被看作一距离空间,对应的距离为 $\|x - y\|$. 使用这些记号, Cauchy-Schwarz 不等式可写成

(6.2.4) $|(x|y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|.$

据(5.5.1),上式表明: 对于实准 Hilbert 空间 E, $(x, y) \to (x|y)$ 是 $E \times E$ 上的连续双线性型(当 E 是复准 Hilbert 空间时,我们仍能应用(5.5.1)的论证来证明$(x,y) \to (x|y)$的连续性,尽管它已不是双线性型). 作为(6.1.1)的特殊情况,还有

(6.2.5) (Pythagoras 定理.)在准 Hilbert 空间 E 中,如果 x, y 是直交的向量,则

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

准 Hilbert 空间 E 到准 Hilbert 空间 E' 上的同构是指 E 到 E' 上这样的双线性映射: 对于 E 的任意一对向量 x, y, $(f(x)|f(y)) = (x|y)$. 很清楚,同构是 E 到 E' 上的**线性等距**.

设 E 是一准 Hilbert 空间. 那么它的纯量积在 E 的任意向量子空间 F 上的限制是一个非退化的正 Hermite 型. 除非作相反的声明,我们总是指的把 F 看作准 Hilbert 空间的这一限制.

Hilbert 空间就是完备的准 Hilbert 空间. 据(5.9.1), 任意有

限维准 Hilbert 空间是 Hilbert 空间. Hilbert 空间的别的例将在(6.4)中给出.

如果在例(6.1.4)中取 $a>0$, $b\geqslant 0$, $c\geqslant 0$, 那么可以看到这样定义的准 Hilbert 空间是不完备的.

问　　题

1) 试证: 在 $a=1$, $b=c=0$ 的情况下,最后那段论述为真(参见 5.1 节问题 1).

2) a) 设 E 是这样的实赋范空间: 对 E 的任意两点 x, y, 有 $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$. 试证: $f(x,y)=\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2$ 是 E 上的非退化正 Hermite 型. (为了证明 $f(\lambda x,y)=\lambda f(x,y)$, 利用 5.5 问题 1).)

b) 设 E 是复赋范空间, E_0 是实基础向量空间, 假定存在 E_0 上的对称双线性型,使对每个 $x\in E_0$ 有 $f(x,x)=\|x\|^2$. 试证, 存在 E 上的 Hermite 型 $g(x,y)$ 使 $f(x,y)=\mathscr{R}(g(x,y))$, 因而对每个 $x\in E$, 有 $g(x,x)=\|x\|^2$. (利用 6.1 问题 1) 中的第一公式,证明 $f(ix,y)=-f(x,iy)$.)

c) 设 E 是这样的复赋范空间,对 E 中任意点对 x, y, 满足

$$\|x-y\|^2+\|x+y\|^2\leqslant 2(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

试证,存在 E 上的非退化的正 Hermite 型 $f(x,y)$ 使 $f(x,x)=\|x\|^2$. (利用 a) 与 b).)

3) 设 f 是非退化正 Hermite 型. 为使(6.2.1)的两边相等, 必须且只须 x, y 线性相关. 为使(6.2.3)的两边相等, 必须且只须 x, y 线性相关; 而且,当两者都$\neq 0$ 时, $y=\lambda x$, 其中 λ 是实数且 $\geqslant 0$.

4) 设 a, b, c, d 是准 Hilbert 空间 E 中的四个点. 试证 $\|a-c\|\cdot\|b-d\|\leqslant\|a-b\|\cdot\|c-d\|+\|b-c\|\cdot\|a-d\|$. (把这个问题化为 $a=0$ 的情形, 然后在 E 中考虑变换 $x\to x/\|x\|^2$, 它是对 $x\neq 0$ 定义的.)不等式的两边什么时候相等?

5) 设 $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ 是准 Hilbert 空间中的有限点列. 试证

$$\sum_{i<j}\|x_i-x_j\|^2=n\sum_{i\leqslant n}\|x_i\|^2-\left\|\sum_{i=1}^{n}x_i\right\|^2.$$

如果对 $i\neq j$ 有 $\|x_i-x_j\|\geqslant 2$, 试证,包含所有 x_i 的球具有$\geqslant\left(\frac{2(n-1)}{n}\right)^{1/2}$ 的半径.

3. 完备子空间上的直交射影

(6.3.1) 设E是一准 Hilbert 空间，F是E的完备向量子空间(即Hilbert 空间). 对任意$x\in E$，有且仅有一点$y=P_F(x)\in F$使得$\|x-y\|=d(x,F)$. 这个点$y=P_F(x)$也是满足下述条件的唯一的点$z\in F$：使$x-z$与F直交. E到F上的映射$x\to P_F(x)$是线性的、连续的，并且当$F\neq\{0\}$时它的范数为1，它的核$F'=P_F^{-1}(0)$是与F直交的子空间，而且E是F与F'的拓扑直和(参见(5.4)). 最后，F是与F'直交的子空间.

设$\alpha=d(x,F)$；由定义，存在空间F中点的序列(y_n)使得$\lim_{n\to\infty}\|x-y_n\|=\alpha$. 我们证明$(y_n)$是Cauchy 序列. 事实上，对于$E$的任意两点$u,v$，由(6.1.1)可推得

(6.3.1.1) $\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=2(\|u\|^2+\|v\|^2)$.

于是$\|y_m-y_n\|^2=2(\|x-y_m\|^2+\|x-y_n\|^2)-4\|x-\frac{1}{2}(y_m+y_n)\|^2$. 但$\frac{1}{2}(y_m+y_n)\in F$，于是$\left\|x-\frac{1}{2}(y_m+y_n)\right\|^2\geqslant\alpha^2$. 因此，如果$n_0$使对$n\geqslant n_0$有$\|x-y_n\|^2\leqslant\alpha^2+\varepsilon$，则对于$m\geqslant n_0$与$n\geqslant n_0$有$\|y_m-y_n\|^2\leqslant4\varepsilon$，这就证明了我们的论断. 因为$F$是完备的，所以序列$(y_m)$趋于一极限$y\in F$，而$y$满足$\|x-y\|=d(x,F)$. 假设$y'\in F$也满足$\|x-y'\|=d(x,F)$. 再应用(6.3.1.1)便得到$\|y-y'\|^2=4\alpha^2-4\|x-\frac{1}{2}(y+y')\|^2$，又因$\frac{1}{2}(y+y')\in F$，这蕴含$\|y-y'\|^2\leqslant0$，亦即$y'=y$. 现在设$z\neq0$是$F$中任一点，并对任意纯量$\lambda\neq0$写出$\|x-(y+\lambda z)\|^2>\alpha^2$；由(6.1.1)，这给出

$$2\lambda\mathscr{R}(x-y\,|\,z)+\lambda^2\|z\|^2>0,$$

如果$\mathscr{R}(x-y\,|\,z)\neq0$，只要适当选取$\lambda$，就会从上式中得出矛

盾. 因此 $\mathscr{R}(x-y|z)=0$. 如果用 iz 代替 z(当 E 是复的准 Hilbert 空间时)可以证明 $\mathscr{I}(x-y|z)=0$, 因而在每种情况下都有 $(x-y|z)=0$. 换句话说, $x-y$ 与 F 直交. 设 $y'\in F$ 使得 $x-y'$ 与 F 直交. 那么,对于 F 中任意 $z\neq 0$, 据 Pythagoras 定理有 $\|x-(y'+z)\|^2=\|x-y'\|^2+\|z\|^2$, 据 y 的上述特征, 这证明 $y'=y$.

由上述 $y=P_F(x)$ 的最后特性能证明 P_F 是线性的. 因为,如果 $x-y$ 与 $x'-y'$ 与 F 直交, 则 $\lambda x-\lambda y$ 与 F 直交, $(x+x')-(y+y')=(x-y)+(x'-y')$ 也与 F 直交. 因为 $y+y'\in F$ 与 $\lambda y\in F$, 这就证明了 $y+y'=P_F(x+x')$ 以及 $\lambda y=P_F(\lambda x)$. 由 Pythagoras 定理我们有

(6.3.1.2) $\|x\|^2=\|P_F(x)\|^2+\|x-P_F(x)\|^2$.

这表明 $\|P_F(x)\|\leqslant\|x\|$, 于是由(5.5.1) P_F 是连续的, 并且具有范数 $\leqslant 1$. 又因对 $x\in F$ 有 $P_F(x)=x$, 所以当 F 不为 0 时,我们有 $\|P_F\|=1$. P_F 的定义蕴含 $F'=P_F^{-1}(0)$ 是由与 F 直交的那些向量 x 组成. 因对任意 $x\in E$, 有 $x=P_F(x)+[x-P_F(x)]$ 与 $x-P_F(x)\in F'$, 所以有 $E=F+F'$. 此外,如果 $x\in F\cap F'$, 则 x 是迷向的,从而 $x=0$. 这证明和 $F+F'$ 是直接的. 又因映射 $x\to P_F(x)$ 是连续的,故 E 是 F 与 F' 的拓扑直和(5.4.2). 最后, 如果 $x\in E$ 与 F' 直交,则特别地,我们有 $(x|x-P_F(x))=0$. $(P_F(x)|x-P_F(x))=0$, 于是 $\|x-P_F(x)\|^2=0$, 亦即 $x=P_F(x)\in F$, 证完.

线性映射 P_F 称为 E 到 F 上的**直交射影**, 它的核 F' 称为 F 在 E 中的**直交余**. 定理(6.3.1)可以应用到 Hilbert 空间 E 的任意闭子空间 F 上(据(3.14.5)), 或者应用到准 Hilbert 空间的任意有限维子空间 F 上(据(5.9.1)).

(6.3.2) 设 E 是准 Hilbert 空间. 那么对于任意 $a\in F$, $x\to(x|a)$ 是一个范数为 $\|a\|$ 的连续线性型. 反之如果 E 是 Hilbert 空间,则对 E 上的任意连续线性型 u, 总存在唯一的向量 $a\in E$ 使对任意 $x\in E$ 都有 $u(x)=(x|a)$.

由于 Cauchy-Schwarz 不等式，$|(x|a)| \leqslant \|a\| \cdot \|x\|$，这表明(据(5.5.1)) $x \to (x|a)$ 是连续的并具有范数 $\leqslant \|a\|$. 另一方面，如果 $a \neq 0$，则对 $x_0 = a/\|a\|$，有 $(x_0|a) = \|a\|$. 因 $\|x_0\| = 1$，所以 $x \to (x|a)$ 的范数至少是 $\|a\|$. 现在假设 E 是 Hilbert 空间. 如果 $u = 0$，则向量 $a(=0)$ 的存在是显然的，因此可以假设 $u \neq 0$. 故 $H = u^{-1}(0)$ 是 E 中的闭超平面. H 的直交余 H' 是一个一维的子空间. 设 $b \neq 0$ 是 H' 中的点. 那么据(6.3.1)，H 与 b 直交，换句话说对于任意 $x \in H$，有 $(x|b) = 0$. 但是一超平面的任意两个方程是成比例的，从而存在纯量 λ 使得对所有 $x \in E$，$u(x) = \lambda(x|b) = (x|a)$，其中 $a = \bar{\lambda} b$. a 的唯一性可由型 $(x|y)$ 为非退化的这一事实推出.

问　　题

1) 设 B 是准 Hilbert 空间 E 中以 0 为中心 1 为半径的闭球. 试证：对于以 0 为中心 1 为半径的球上的每一点 x，存在 B 的唯一包含 x 的支撑超平面(5.8 节，问题 3).

2) 设 E 是一准 Hilbert 空间，A 是 E 的紧子集，δ 是它的直径. 试证：存在 A 的两点 a，b 使 $\|a-b\| = \delta$，又存在 A 的两个平行的支撑超平面(5.8 节，问题 3)，它们分别包含 a 与 b 并且其距离等于 δ.（考虑中心为 a，半径为 δ 的球并利用问题 1 的结果.）

3) 设 E 是 Hilbert 空间，F 是 E 的稠密线性子空间且不同于 E (5.9 节，问题 2). 试证：在准 Hilbert 空间 F 中存在一闭超平面 H 使得 F 中没有非零向量与 H 正交.

4) 设 X 是一个集，E 是 $\mathbf{C}^X$ 的向量子空间，在其上给出一复 Hilbert 空间结构. $X \times X$ 到 $\mathbf{C}$ 的映射 $(x, y) \to K(x, y)$ 称为关于 E 的**再生核**，若它满足下列条件：(1)对每个 $y \in X$，函数 $K(\cdot, y)$: $x \to K(x, y)$ 属于 E；(2)对任意函数 $f \in E$ 与 $y \in X$，有 $f(y) = (f|K(\cdot, y))$.

a) 试证 K 是 $X \times X$ 到 $\mathbf{C}$ 的**正型映射**，也就是对任意整数 $n \geqslant 1$ 与 X 的任意有限点列 (x_i)，$1 \leqslant i \leqslant n$，$\mathbf{C}^{2n}$ 到 $\mathbf{C}$ 的映射

$$((\lambda_i), (\mu_i)) \to \sum_{i,j} K(x_i, x_j) \lambda_i \bar{\mu}_j$$

是正 Hermite 型. 这特别蕴含对每个 $x \in X$ 有 $K(x, x) \geqslant 0$，且对 X 中的 x，

y，有 $K(y, x)=\overline{K(x, y)}$ 与 $|K(x, y)|^2 \leqslant K(x, x)K(y, y)$。 试证对每个 $f \in E$，不等式 $|f(y)| \leqslant \|f\| \cdot (K(y, y))^{1/2}$ 对每个 $y \in X$ 成立。

b) 试证若 (f_n) 是 E 中的函数序列 (f_n)，它收敛(依 Hilbert 空间结构)于 $f \in E$，则对每个 $x \in X$，序列 $(f_n(x))$ 在 $\mathbf{C}$ 中收敛于 f；在 X 的使函数 $x \rightarrow K(x, x)$ 有界的任意子集中，上述收敛是一致的。

c) 设 $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ 是 X 中的有限点列，(a_i)，$1 \leqslant i \leqslant n$，是 n 个复数的序列。若 $\det(K(x_i, x_j)) \neq 0$，则线性方程组 $\sum_{j=1}^{n} c_j K(x_i, x_j)=a_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 有唯一解(c_j).试证，在使 $f(x_i)=a_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$的所有函数 $f \in E$ 中，函数 $f_0=\sum_{j=1}^{n} c_j K(\cdot, x_j)$ 具有最小范数。特别，在所有使 $f(x)=1$（这里 $x \in X$，且 $K(x, x) \neq 0$）的函数 $f \in E$ 中，函数 $K(\cdot, x)/K(x, x)$ 具有最小范数。

d) 若 X 是拓扑空间，而所有函数 $f \in E$ 在 X 中是连续的，则函数 $K(\cdot, x)$（这里 x 取 X 中所有值，或取 X 的稠密子集中的所有值)构成 E 的全子集(证明不存在 E 中元素 $h \neq 0$，它与所有元素 $K(\cdot, x)$ 直交)。特别，若 X 是可分距离空间，则 E 是可分 Hilbert 空间。

5) a) 用问题 4) 的记号，为使存在 E 的再生核，充要条件是，对每个 $x \in X$ 线性型 $f \rightarrow f(x)$ 在 E 中是连续的。并且再生核是唯一的。

b) 由 a) 推证若存在关于 E 的再生核，则也存在关于 E 的每一闭向量子空间 E_1 的再生核。若 K_1 是关于 E_1 的再生核，试证对每个函数 $f \in E$，函数 $y \rightarrow (f | K_1(\cdot, y))$ 是 f 在 E_1 中的直交射影。若 E_2 是 E_1 的直交余，K_2 是关于 E_2 的再生核，则 K_1+K_2 是关于 E 的再生核。

6) 设 X 是一个集，E 是 $\mathbf{C}^X$ 的向量子空间，在其上给出一复准 Hilbert 空间结构。 为了使存在包含 E 的 Hilbert 空间 $\hat{E} \subset \mathbf{C}^X$，使 E 上的纯量积为在 $\hat{E}$ 上的纯量积的限制，并且存在关于 $\hat{E}$ 的再生核，其充要条件是 E 满足下列条件：(1) 对每个 $x \in X$，线性型 $f \rightarrow f(x)$ 在 E 中连续；(2) 对 E 中满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)=0$（对每个 $x \in X$)的 Cauchy 序列 (f_n)，有 $\lim_{n \rightarrow \infty}\|f_n\|=0$。(为证条件的充分性，考虑 $\mathbf{C}^X$ 的下述子空间 $\hat{E}$：其中元素是这样的函数，对它而言存在 E 中的 Cauchy 序列 (f_n)，使对每个 $x \in X$ 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)=f(x)$。试证对所有具有上述性质的 Cauchy 序列，数 $\lim_{n \rightarrow \infty}\|f_n\|$ 是相同的，并且若 $\|f\|$ 就是这个数，则它定义了 $\hat{E}$ 上一个赋范空间结构，是从 E 上给定的准 Hilbert 结构诱导的准 Hilbert 结构导出的；最后证明，E 在 $\hat{E}$ 中稠密，且 $\hat{E}$ 是完备的，

因而是 Hilbert 空间，再应用问题 5) a) 于 $\hat{E}$.)

7) 设 X 是一个集，f 是 X 到准 Hilbert 空间 H 的映射；试证 $X\times X$ 到 $\boldsymbol{C}$ 的映射 $(x, y)\to(f(x)|f(y))$ 是正型的(问题 4) a))。

8) 设 X 是一个集，K 是 $X\times X$ 到 $\boldsymbol{C}$ 的正型映射(问题 4)a)).

a) 设 E 是映射 $u: X\to \boldsymbol{C}$ 的这样的集合：存在实数 $\alpha\geqslant 0$，使映射

$$(x,y)\to\alpha K(x,y)\to u(x)\overline{u(y)}$$

是正型的；设 $m(u)$ 是具有上述性质的实数 $\alpha\geqslant 0$ 中的最小者. 试证 $m(u)$ 也是这样的数 c 的最小者：对 X 中元素的有限序列 (x_i)，不等式

$$\sum_{i,j} K(x_i, x_j)\lambda_i\bar{\lambda}_j + c\mu\bar{\mu} + \sum_i (u(x_i)\lambda_i\bar{\mu} + \overline{u(x_i)\lambda_i}\mu)\geqslant 0$$

对所有复数 λ_i, μ 成立(利用 Cauchy-Schwarz 不等式). 对每个 $x\in X$，试证 $|u(x)|^2\leqslant K(x,x)m(u)$.

b) 试证 E 是向量空间，$(m(u))^{1/2}$ 是 E 上的范数，且 $m(u+v)+m(u-v)\geqslant 2(m(u)+m(v))$，并推证存在 $E\times E$ 上的非退化的正 Hermite 型 $g(u, v)$，使 $g(u, u)=m(u)$，并且关于这个 g，E 是 Hilbert 空间；记 $g(u,v)=(u|v)$. (利用 6.2 问题 2) c) 证明 g 的存在性；为证 E 是完备的，利用 a) 中所证的最后的不等式).

c) 对每个 $x\in X$，试证函数 $K(\cdot, x)$ 属于 E，并且对所有 $(x, y)\in X\times X$，有 $(K(\cdot, x)|K(\cdot, y))=K(x, y)$. (利用 Cauchy-Schwarz 不等式). 再证若 X 是拓扑空间，而 K 在 $X\times X$ 中连续，则 X 到 E 的映射 $x\to K(\cdot,x)$ 是连续的.

d) 由 a) 推证，b) 中定义的 Hilbert 空间 E 具有再生核，并且若 F 是由函数 $K(\cdot, x)$ 生成的 E 的闭向量子空间，则关于 F 的再生核(问题 5) b))等于 K.

9) 设 E 是准 Hilbert 空间，N 是 E 的有限维向量子空间，M 是 E 的无限维或维数 $>\dim(N)$ 的有限维向量子空间. 试证在 M 中存在一点 $x\neq 0$，使 $\|x\|=d(x, N)$. (考虑 M 与 N 的直交余的交.)

4. Hilbert 空间的 Hilbert 和

设 (E_n) 是 Hilbert 空间的序列. 在每个 E_n 上，我们将纯量积记为 $(x_n|y_n)$. 设 E 是所有这样的序列 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$

的集：对每个 n，$x_n \in E_n$，并且级数 $(\|x_n\|^2)$ 收敛．首先在 E 上定义一个向量空间结构：显然，如果 $x = (x_n) \in E$，则序列 $(\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n, \cdots)$ 也属于 E．另一方面，如果 $y = (y_n)$ 是属于 E 的另一个序列，我们注意，由(6.3.1.1)，$\|x_n + y_n\|^2 \leqslant 2(\|x_n\|^2 + \|y_n\|^2)$，从而由(5.3.1)，级数 $(\|x_n + y_n\|^2)$ 收敛，故序列 $(x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n, \cdots)$ 属于 E． 定义 $x + y = (x_n + y_n)$，$\lambda x = (\lambda x_n)$，验证向量空间的那些公理是极其容易的．另一方面，由 Cauchy-Schwarz 不等式，有

$$|(x_n|y_n)| \leqslant \|x_n\| \cdot \|y_n\| \leqslant \frac{1}{2}(\|x_n\|^2 + \|y_n\|^2).$$

因此，如果 $x = (x_n)$ 与 $y = (y_n)$ 在 E 中，则(实数或复数的)级数 $(x_n|y_n)$ 绝对收敛．对于 E 中的 $x = (x_n)$ 与 $y = (y_n)$，定义数 $(x|y) = \sum_{n=1}^{\infty}(x_n|y_n)$．立即可验明映射 $(x, y) \to (x|y)$ 是 E 上的一 Hermite 型．又我们有 $(x|x) = \sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2$，故 $(x|y)$ 是一非退化的正 Hermite 型，并在 E 上定义一个准 Hilbert 空间结构．最后证明 E 事实上是一个 Hilbert 空间，换句话说，它是完备的．其实，设 $(x^{(m)}) = (x_n^{(m)})$ 是 E 中的一 Cauchy 序列；就是说对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 m_0 使得当 $p \geqslant m_0$ 与 $q \geqslant m_0$ 时我们有

$$(6.4.1) \quad \sum_{n=1}^{\infty}\|x_n^{(p)} - x_n^{(q)}\|^2 \leqslant \varepsilon.$$

对于每个固定的 n，这首先蕴含 $\|x_n^{(p)} - x_n^{(q)}\| \leqslant \varepsilon$，因而序列 $(x_n^{(m)})$，$m = 1, 2, \cdots$，是 E_n 中的 Cauchy 序列，故收敛于一极限 y_n．由(6.4.1)推出：对任意给定的 N，只要 p 与 $q \geqslant m$，就有

$$\sum_{n=1}^{N}\|x_n^{(p)} - x_n^{(q)}\|^2 \leqslant \varepsilon.$$

于是由范数的连续性推得对 $p \geqslant m_0$ 有 $\sum_{n=1}^{N}\|x_n^{(p)} - y_n\|^2 \leqslant \varepsilon$，因为

这对所有整数 N 都成立，所以我们有 $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n^{(p)}-y_n\|^2\leqslant\varepsilon$. 这表明序列 $(x_n^{(p)}-y_n)$ 属于 E，于是 $y=(y_n)$ 也属于 E，而对于 $p\geqslant m_0$ 我们有 $\|x^{(p)}-y\|^2\leqslant\varepsilon$，故序列 $(x^{(m)})$ 收敛于 E 中的 y. 证完.

我们称这样定义的 Hilbert 空间 E 是 Hilbert 空间序列 (E_n) 的 **Hilbert 和**. 注意，我们能用下面的方法把每个 E_n 映射到 E 中：使每个 $x_n\in E_n$ 对应于序列 $j_n(x_n)\in E$ 等于 $(0,\cdots,0,x_n,0,\cdots)$（除第 n 项等于 x_n 外，所有的项都为 0）. 容易验证：j_n 是 E_n 到 E 的子空间 E'_n（必然是闭的）上的同构. j_n 称为 E_n 到 E 的**自然单映射**. 由 E 中纯量积的定义可推得：对于 $m\neq n$，E'_m 中的任意向量是与 E'_n 中的任意向量直交的；而且，由 E 中范数的定义推得：对任意 $x=(x_n)\in E$，级数 $(j_n(x_n))$ 在 E 中是收敛的，并且 $x=\sum_{n=1}^{\infty}j_n(x_n)$（注意：级数 $(j_n(x_n))$ 一般并不绝对收敛）. 这表明 E 的子空间 E'_n 的（代数）和（它显然是直和）是在 E 中稠密的，换句话说，包含所有 E'_n 的最小闭向量子空间是 E 自身. 反之有

(6.4.2) 设 F 是一 Hilbert 空间，(F_n) 是这样的闭子空间序列：1° 对于 $m\neq n$，F_m 的任意向量与 F_n 的任意向量直交；2° 这些子空间 F_n 的代数和 H 是在 F 中稠密的. 那么，如果 E 是这些 F_n 的 Hilbert 和，则存在唯一的 F 到 E 上的同构，它在每个 F_n 上都与 F_n 到 E 中的自然单映射 j_n 重合.

设 $F'_n=j_n(F_n)$，又设 h_n 是 F'_n 到 F_n 上的与 j_n 互逆的映射. 设 G 是 E 中那些 F'_n 的代数和. 由于这和是直交的，我们可以用下面条件定义 G 到 F 的线性映射 h，它在每个 F'_n 上都与 h_n 重合. 我们断定 h 是 G 到准 Hilbert 空间 H 上的一个同构（也就附带地证明了 F 中 F_n 的（代数）和是直接的）；据 E 中纯量积的定义，我们必须验证：对于 $x_k\in F_k$，$y_k\in F_k$ 有

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \middle| \sum_{k=1}^{n} y_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (j_k(x_k) | j_k(y_k));$$

但是据假设，当 $h \neq k$ 时，$(x_h | y_k) = 0$，于是结果由每个 j_k 都是一个同构这一事实推出. 又据 (5.5.4)，存在 h 的唯一连续延拓 $\bar{h}$ 是$\bar{G} = E$ 到 $\bar{H} = F$ 的线性映射. 恒等延拓原理(3.15.2)与纯量积的连续性指明 $\bar{h}$ 是 E 到F的子空间上的同构，但它在F中是完备与稠密的，所以它必是 F 自身. $\bar{h}$ 的逆满足 (6.4.2) 的条件. $\bar{h}$ 的唯一性由下述事实推出：它在G中是完全确定的而在 E 中是连续的(3.15.2). 在(6.4.2)的条件下，Hilbert 空间 F 常被看成它的子空间 F_n 的 Hilbert 和.

(6.4.3) 附注. 我们也能用先证明诸 F_n 的和是直接和来证明(6.4.2)；事实上，如果 $\sum_{i=0}^{n} x_i = 0$，其中 $x_i \in F_i (1 \leqslant i \leqslant n)$，则对任意 $j \leqslant n$，也有 $\left(x_j \middle| \sum_{i=1}^{n} x_i\right) = 0$，又因对于 $i \neq j$ 有 $(x_j | x_i) = 0$，这简化为 $\|x_j\|^2 = 0$，于是对 $1 \leqslant j \leqslant n$ 有 $x_j = 0$. 然后用下述条件定义 h 的逆映射 g：它在每个 F_n 上都与 j_n 重合. 象上面一样，我们可立即验证 g 是H到G上的同构，然后可同样地应用(5.5.4). 注意，当 F 是准 Hilbert 空间而 F_n 是 F 的完备子空间时，这个论证仍旧适用；这表明：存在 F 到 F_n 的 Hilbert 和E的一个稠密子空间上的同构，它在每个 F_n 上都与 j_n 重合.

问　　题

设X是一个集，E_1, E_2 是 $\mathbf{C}^X$ 的二个向量子空间，具有再生核 K_1, K_2 (6.3 问题 4))，设 $E = E_1 + E_2 \subset \mathbf{C}^X$，$F$ 是 Hilbert 空间 E_1，E_2 的 Hilbert 和；F到E的满射 $u: (f_1, f_2) \to f_1 + f_2$ 的核是由对 $(f, -f)$ 组成的 F 的子空间 N，这里 $f \in E_1 \cap E_2$. 试证，N在 F 中是闭的；如果H是N在 F 中的直交余，则 u 在H上的限制 v 是H到E上的双射；用 v 转换E的 Hilbert 结构时，E被定义为 Hilbert 空间. 试证，对这个 Hilbert 空间结构，E具有等于 $K_1 + K_2$ 的再生核；当 (f_1, f_2) 在 F 中取使 $f = f_1 + f_2$ 的所有值时，E 中范数 $\|f\|$ 等于 $\inf(\|f_1\|_1^2 + \|f_2\|_2^2)^{1/2}$.（$\|f_1\|_1$，$\|f_2\|_2$ 分别是 E_1 与 E_2 中的范数.）

5. 标准直交系

如果(仍用(6.4)的表示法)把每个 E_n 取为一维空间(看作数域,其中纯量积 $(\xi|\eta)=\xi\bar{\eta}$),则它的 Hilbert 和给出无穷维 Hilbert 空间 E 的例子,通常记为 l^2(必要时用附标 $\boldsymbol{R}$ 或 $\boldsymbol{C}$ 以指明纯量是什么). 因此,空间 $l^2_{\boldsymbol{R}}$(相应地,$l^2_{\boldsymbol{C}}$)就是所有使 $\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^2$ 收敛的实(相应地,复)数序列 $x=(\xi_n)$ 的空间,其中纯量积 $(x|y)=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\bar{\eta}_n$.

在 l^2 中,设 e_n 是这样一个序列,它除第 n 项等于 1 以外,其它各项都等于 0. 则对于 $m\neq n$ 有 $(e_m|e_n)=0$,且对每个 n 有 $\|e_n\|=1$,在(6.4)中我们知道:对于 l^2 中的每个 $x=(\xi_n)$,都可以写成 $x=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n e_n$,因为这级数在 l^2 中是收敛的. 注意到,这表明序列 (e_n) 在 l^2 中是全的,于是据(5.10.1),l^2 是可分的.

现在考虑任意一个准 Hilbert 空间 F. 我们称 F 中的(有限或无穷)序列 (a_n) 是一**直交系**,如果对 $m\neq n$ 有 $(a_m|a_n)=0$ 且对每个 n 有 $a_n\neq 0$. 又称 (a_n) 是一个**标准直交系**,如果再加上对每个 n 有 $\|a_n\|=1$. 用"标准化"(a_n) 的方法,也就是考虑 $b_n=a_n/\|a_n\|$ 的序列,由任一直交系 (a_n) 立即可得出一个标准直交系. 我们刚才看到了 l^2 中一个标准直交系的例;另一个重要例子如下:

(6.5.1) 设 I 是 $\boldsymbol{R}$ 的区间 $[-1,1]$,又设 $F=\mathscr{C}_{\boldsymbol{C}}(I)$ 是由在 I 上定义的连续复值函数的全体组成的向量空间,我们用

$$(f|g)=\int_{-1}^{1}f(t)\overline{g(t)}\,dt$$

在 F 上定义一纯量积(它是一非退化正 Hilbert 型这一点是容易验证的). 对每个正或负整数 n,设

$$\varphi_n(t)=e^{\pi n i t}$$

容易验证:$(\varphi_n/\sqrt{2})$ 是 F 中一标准直交系,称为**三角系**.

现在设 (a_n) 是 Hilbert 空间 F 中的任意一个标准直交系. 对每个 $x \in F$,我们称数 $c_n(x) = (x|a_n)$ 是 x 关于系 (a_n) 的**第 n 系数(或第 n 坐标)**(x 对于系(6.5.1)的**第 n Fourier 系数**).

(6.5.2) 在 Hilbert 空间 F 中,设 (a_n) 是一个标准直交系,V 是由 a_n 生成的 F 的闭子空间. 那么对任意 $x \in F$:

1° 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |(x|a_n)|^2$ 是收敛的,并且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x|a_n)|^2 = \|P_V(x)\|^2 \leqslant \|x\|^2, \text{(Bessel 不等式)}$$

以及

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x|a_n)\overline{(y|a_n)} = (P_V(x)|P_V(y));$$

2° 一般项为 $(x|a_n)a_n$ 的级数是在 F 中收敛的,并且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x|a_n)a_n = P_V(x).$$

反之,设 (λ_n) 是这样的纯量序列,使 $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2$ 收敛. 那么,存在唯一的向量 $y \in V$,使对每个 n 都有 $(y|a_n) = \lambda_n$. 另一个任意向量 $x \in F$ 只要使对每个 n 有 $(x|a_n) = \lambda_n$,就满足 $x = y + z$,其中 z 与 V 直交,并且反之亦然.

对任意 $x \in F$,可以记 $x = P_V(x) + z$,其中 z 与 V 直交(6.3.1),于是有 $(x|a_n) = (P_V(x)|a_n)$. 为证明这个定理,可以假设 $V = F$. 但另一方面,由 a_n 生成的一维子空间 F_n 满足(6.4.2)的假设,于是上述结果仅仅是(6.4.2)对那一特殊情形的改述(要考虑 Hilbert 和的定义).

最有意义的情形是 $V = F$,也就是直交系 (a_n)是全的. 这时它称为 F 的**标准直交基**. (e_n) 就是 l^2 的一个这样的基. 在(7.4.3)中将证明三角系(6.5.1)是全的. 对于 Hilbert 空间 F 与一全的标准直交系 (a_n),可以把(6.5.2)中 P_V 处处换成恒等算子;这时关系式:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(x|a_n)|^2 = \|x\|^2,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x|a_n)\overline{(y|a_n)} = (x|y)$$

称为 **Parseval 恒等式**. 由(6.5.2)立即推知: 为使系 (a_n) 是 Hilbert 空间中的全系，这些恒等式不仅是必要的而且是充分的条件.

(6.5.3) 在 Hilbert 空间 F 中，为使一直交系 (a_n) 是全的，充要条件是对每个 n，关系 $(x|a_n)=0$ 蕴含 $x=0$.

事实上，我们能假定 (a_n) 是直交的;由(6.5.2)，这表明关系 $P_V(x)=0$ 蕴含 $x=0$，而这等价于关系 $V=F$，因为

$$P_V(x-P_V(x))=0.$$

(6.5.4) 附注. 假设 E 是准 Hilbert 空间，并且 E 中的标准直交系 (a_n)是全的. 则(6.5.2)中的结果 1° 与 2° 当用 x 代替 $P_V(x)$时仍然成立. 这可应用附注(6.4.3)，由(6.5.2)中同样的论证而推得.

问　　题

1) 设 E 是一 Hilbert 空间，具有标准直交基 $(e_n)_{n\geq 1}$. 设 A 是 E 的子集，它由下述线性组合组成: $x=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\left(1-\frac{1}{K}\right)e_k$，其中 $\lambda_k\geq 0$ 并且 $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k=1$ (n 是任意的).

a) 试证: 闭包 $\bar{A}$ 是所有下述级数和的集: $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\left(1-\frac{1}{n}\right)e_n$，其中 $\lambda_n\geq 0$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n$ 收敛且其和等于 1.

b) 试证: $\bar{A}$ 的直径等于 $\sqrt{2}$，但是不存在 $\bar{A}$ 的一对点 a, b 使得 $\|a-b\|=\sqrt{2}$ (参看6.3节问题2).

2) 设 E 是 Hilbert 空间，具有标准直交基 $(e_n)_{n\geq 0}$. 设对每个 $n\geq 0$,

$a_n = e_{2n}$ 与 $b_n = e_{2n} + \frac{1}{n+1} e_{2n+1}$；设 A(相应地，B) 是由 a_n(相应地，b_n) 生成的 E 的闭向量子空间. 试证：

a) $A \cap B = \{0\}$，从而和 $A + B$ 是(代数)直接和.

b) 直接和 $A + B$ 不是拓扑直接和(在那个子空间中考虑点 $b_n - a_n$ 的序列并利用(5.4.2)).

c) E 的子空间 $A + B$ 是稠密的，但在 E 中是不闭的(证明点 $\sum_{n=0}^{\infty} (b_n - a_n)$ 不属于 $A + B$).

3) 试证：Banach 空间 $\mathscr{L}(l^1; l^2)$ 可以看成这样的双重序列 $U = (\alpha_{mn})$ 的空间，1° 级数 $\sum_{m=0}^{\infty} |\alpha_{mn}|^2$ 对每个 n 都是收敛的；2° $\operatorname{Sup}_n \sum_{m=0}^{\infty} |\alpha_{mn}|^2$ 是有限的，这时其范数 $\|U\| = \operatorname{Sup}_n \left(\sum_{m=0}^{\infty} |\alpha_{mn}|^2 \right)^{1/2}$ (证法与 5.7 节问题 2b) 的相同).

4) a) 设 u 是 l^2 到自身的连续线性映射，且 $u(e_n) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{mn} e_m$. 试证：级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{mn}|^2$ 与 $\sum_{m=0}^{\infty} |\alpha_{mn}|^2$ 对 m 与 n 的所有值都是收敛的，而且它们的和 $\leqslant \|u\|^2$.(注意：$x \to (u(x) | e_m)$ 是 l^2 上的一连续线性型并利用(6.3.2).)

b) 举出一个这样的双重序列 (α_{mn}) 的例子，使对 m，n 的所有值都有 $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{mn}|^2 \leqslant 1$ 且 $\sum_{m=0}^{\infty} |\alpha_{mn}|^2 \leqslant 1$，但是没有一个 l^2 到自身的连续线性映射 u 对所有偶对 (m,n) 满足关系 $(u(e_n) | e_m) = \alpha_{mn}$.(设 V 是 l^2 的子空间，它由 $n \in H$ 的向量 e_n 生成，这里 H 是 p 个整数的集. 试证存在这样一个 V 到自身的线性映射 u_p：它使 $(u_p(e_n) | e_m) = 1/\sqrt{p}$ 对集 H 中的所有附标 m，n 成立，但是 $\|u_p\| \geqslant \sqrt{p}$.)

6. 标准直交化方法

(6.6.1) 设 E 是一可分准 Hilbert 空间，(b_n) 是 E 中线性无关向

量的全序列(见(5.10.1))，又设 V_n 是由 $b_1,\cdots,b_n$ 生成的 E 的 n 维子空间．那么，如果定义 $c_n=b_n-P_{V_{n-1}}(b_n)$，则 (c_n) 是一全直交系，而且对每个 n，$c_1,\cdots,c_n$ 生成 V_n.

我们对 n 用归纳法，假设 $c_1,\cdots,c_{n-1}$ 是一直交系并且生成 V_{n-1}．那么，由 $P_{V_{n-1}}$ 的定义(6.3.1)，c_n 与 V_{n-1} 直交，这表明对于 $1\leqslant i<j\leqslant n$ 有 $(c_i|c_j)=0$．又因为由假设 $b_n\notin V_{n-1}$，所以 $c_n\neq 0$．故 $c_1,\cdots,c_{n-1},c_n$ 是一直交系；此外，$b_n-c_n\in V_{n-1}$，于是 $c_1,\cdots,c_n$ 生成的子空间就是 V_{n-1} 与 $\{b_n\}$ 的并集所生成的那个子空间，即 V_n 证完.

如果通过使 $a_n=c_n/\|c_n\|$ 来把系 (c_n) 标准化，那么，我们说系 (a_n) 是用标准直交化方法由 (b_n) 得出的．例如，在(6.5.1)考虑的空间 $F=\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(I)$ 中，序列 (t^n) 是完整的(这将在(7.4.1)中证明)，并且显然是由线性无关向量组成的．如果用 (Q_n) 表示由 (t^n) 用标准直交化法得出的那个标准直交系，则显然 $Q_n(t)=a_nt^n+\cdots$，是一个实系数的 n 次多项式 $(a_n\neq 0)$．这些 Q_n (直到常数因子)都是 Legendre 多项式(见 8.14 节，问题 1).

(6.6.2) 任意可分准 Hilbert 空间 (相应地，Hilbert 空间)同构于 l^2 的一个稠密子空间 (相应地，l^2).

因为据(6.6.1)在可分准 Hilbert 空间中存在一个全标准直交系，所以结果立即由(6.5.2)推得.

问　　题

1) 设 E 是一个可分的不完备准 Hilbert 空间．试证在 E 中存在这样的标准直交系：它是不全的，但它并不真正含于任何一个标准直交系中(记住 E 是 Hilbert 空间中的一个稠密子空间，并应用 6.3 节问题 3).

2) 设 E 是无穷维可分 Hilbert 空间，V 是 E 的闭向量子空间．试证：如果 V 是无穷维的，则存在 E 到 V 上的一个等距(把 E 写成 V 与它的直交余 V' 的直接和，并在 V 与 V' 中选取标准直交基).

3) 设 $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ 是准 Hilbert 空间 E 中点的有限序列．该序列的 Gram 行列式就是行列式

$$G(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\det((x_i|x_j)).$$

a) 试证：$G(x_1, \cdots, x_n)\geqslant 0$，并且仅当那些 x_i 线性相关时，$G(x_1\cdots, x_n)=0$。(考虑由那些 x_i 生成的子空间的标准直交基，并把 x_i 表示成该基的线性组合)。

b) 假设那些 x_i 是线性无关的，并设 V 是由它们生成的 n 维子空间. 试证：一点 x 到 V 的距离等于 $\sqrt{G(x,x_1,\cdots,x_n)/G(x_1,\cdots,x_n)}$ (找出 x 在 V 上的射影，并把它写成 x_i 的线性组合).

4) 设 M 是 Hilbert 空间 E 的紧子集；若 E_1 是 E 中包含 M 的最小闭向量子空间，试证 E_1 是可分的.

5) 设 $E\subset \mathbf{C}^X$ 是具有再生核(6.3 问题 4))的可分 Hilbert 空间.

a) (f_n) 是 E 的 Hilbert 基. 试证对每个 $(x, y)\in X\times X$ 有 $K(x,y)=\sum\limits_n f_n(x)\overline{f_n(y)}$，这里级数在 $\mathbf{C}$ 中收敛. 对任何函数 $g\in E$，若令 $c_n=(g|f_n)$，则对每个 $x\in X$，有 $g(x)=\sum\limits_n c_nf_n(x)$，这里级数在 $\mathbf{C}$ 中收敛；此外，该级数在 X 的使 $K(x, x)$ 有界的每一子集中一致收敛.

b) 反之，设 (f_n) 是集 X 上定义的复函数序列，使对任意 $x\in X$ 有 $\sum\limits_n |f_n(x)|^2<+\infty$. 对每个序列 $(c_n)\in l^2_{\mathbf{C}}$，与每个 $x\in X$，级数 $\sum\limits_n c_nf_n(x)$ 在 $\mathbf{C}$ 中收敛. 作为这样级数的和函数，构成一个向量子空间 $E\subset\mathbf{C}^X$，在其上，我们定义一个可分 Hilbert 空间结构，它的内积取为 $(u|v)=\sum\limits_n c_n\bar{d}_n$，这里 $u=\sum\limits_n c_nf_n$，$v=\sum\limits_n d_nf_n$. 这个空间有一个再生核

$$K(x, y)=\sum_n f_n(x)\overline{f_n(y)}.$$

第七章　连续函数空间

连续函数空间就其在泛函分析中的重要性而论，是仅次于 Hilbert 空间的. 它们的定义使我们有可能对古典一致收敛概念给以更加直观的意义. 本章最重要的结果是：1° Stone-Weierstrass 逼近定理(7.3.1)，它对连续函数一般结果的证明是一个强有力的工具，所用的方法在于首先对特殊形式的函数证明这些结果，然后通过稠密性的论证，把这些结果推广到所有连续函数. 2° Ascoli 定理(7.5.7)，它是大多数函数空间紧性证明的依据，并且与(7.5.6)一起给出了引进等度连续概念的启示.

1. 有界函数空间

设 A 是任意一个集，F 是一实(相应地，复)赋范空间. A 到 F 的映射 f 是**有界的**，如果 $f(A)$ 在 F 中是有界的，或等价地，若 $\sup_{t \in A}\|f(t)\|$ 是有限的. A 到 F 的所有有界映射的集 $\mathscr{B}_F(A)$ 是一实（相应地，复）向量空间，因为 $\|f(t)+g(t)\| \leqslant \|f(t)\|+\|g(t)\|$. 此外，在这个空间上

(7.1.1)
$$\|f\| = \sup_{t \in A}\|f(t)\|$$

是一范数，这是容易验证的. 如果 F 具有有限维，以及 $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ 是 F 的基，满足 $\|a_i\|=1$，则 A 到 F 的任意映射都可以唯一地写成

(7.1.1.1)
$$t \to f(t) = f_1(t)a_1 + \cdots + f_n(t)a_n$$

并且当且仅当纯量映射 $f_i\ (1 \leqslant i \leqslant n)$ 都有界时，f 才有界. 此外，映射 $t \to f_i(t)a_i$ 的范数是 $\|f_i\| \cdot \|a_i\| = \|f_i\|$ (f_i 的范数是在 $\mathscr{B}_R(A)$ ($\mathscr{B}_C(A)$) 中取的). 由(5.9.1)，(5.4.2)与(5.5.1)推出，存在常数 c 使对每个 $t \in A$，都有 $|f_i(t)| \leqslant c \cdot \|f(t)\|$，于是 $\|f_i\| \leqslant$

$c\cdot\|f\|$. 设 L_i 是 $\mathscr{B}_F(A)$ 的子空间，它是由所有形如 $t\to f(t)a_i$ (f 是纯量映射) 的有界映射组成的. 那么，再一次利用(5.4.2)与(5.5.1)，上述附注就证明了

(7.1.2) 如果 F 是有限维的，则 $\mathscr{B}_F(A)$ 是那些 L_i 的拓扑直和，而且其中的每个都与 $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}(A)$ (相应地，$\mathscr{B}_{\mathbf{C}}(A)$) 等距.

特别地，如果我们考虑 $\mathscr{B}_{\mathbf{C}}(A)$ 的基础实赋范向量空间，那么我们看到 $\mathscr{B}_{\mathbf{C}}(A)$ 是拓扑直和 $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}(A)+i\mathscr{B}_{\mathbf{R}}(A)$.

(7.1.3) 如果 F 是 Banach 空间，则 $\mathscr{B}_F(A)$ 也是 Banach 空间.

设 (f_n) 是 $\mathscr{B}_F(A)$ 中的 Cauchy 序列. 这表示，对任意 $\varepsilon>0$，存在 n_0 使对于 $m\geqslant n_0$，$n\geqslant n_0$ 有 $\|f_m-f_n\|\leqslant\varepsilon$. 由 (7.1.1) 推出：对任意 $t\in A$ 我们有 $\|f_m(t)-f_n(t)\|\leqslant\varepsilon$，这里 $m\geqslant n_0$，$n\geqslant n_0$. 由于 F 是完备的，于是序列 $(f_n(t))$ 收敛于一元素 $g(t)\in F$. 进而，根据不等延拓原理，我们有 $\|f_m(t)-g(t)\|\leqslant\varepsilon$ 对于任意 $t\in A$ 与所有 $m\geqslant n_0$ 成立. 由此我们首先推得对所有 $t\in A$，$\|g(t)\|\leqslant\|f_m\|+\varepsilon$. 于是 g 是有界的. 此外，对所有 $m\geqslant n_0$ 有 $\|f_m-g\|\leqslant\varepsilon$，这就是说在空间 $\mathscr{B}_F(A)$ 中序列 (f_n) 收敛于 g.

一般地，设 (f_n) 是 A 到距离空间 F 的映射序列. 我们说序列 (f_n) 在 A 中**简单收敛于** A 到 F 的映射 g，如果对每个 $t\in A$，序列 $(f_n(t))$ 在 F 中都收敛于 $g(t)$. 我们说 (f_n) 在 A 中**一致收敛于** g，如果数列$(\sup\limits_{t\in A}d(f_n(t),g(t)))$ 趋于 0. 显然，一致收敛蕴含简单收敛. 而其逆不真. 如果 F 是一赋范空间，则 $\mathscr{B}_F(A)$ 中元素序列的收敛，据定义，即为该序列在 A 中的一致收敛. 类似地，我们说一个在 $\mathscr{B}_F(A)$ 中收敛于和 S 的级数 (u_n) 是在 A 中一致收敛于和 S 的. 如果 F 是 Banach 空间，由(7.1.3)推知：为使 $\mathscr{B}_F(A)$ 中一级数 (u_n) 为一致收敛的，充要条件是：对任意 $\varepsilon>0$，存在整数 n_0 使得对于任意 $n\geqslant n_0$，$p\geqslant 0$ 与任意 $t\in A$，有

$$\|u_n(t)+u_{n+1}(t)+\cdots+u_{n+p}(t)\|\leqslant\varepsilon.$$

由(7.1.3)与(5.3.2)推知：如果 F 是 Banach 空间，并且若有界函数

级数 (u_n) 使得级数 $(\|u_n\|)$ 在 $\mathbf{R}$ 中收敛，则级数 (u_n) 是一致收敛的；此外，对每个 $t\in A$，由于 $\|u_n(t)\|\leqslant\|u_n\|$，级数 $(u_n(t))$ 在 F 中是绝对收敛的．然而，这两个性质并不蕴含级数 $(\|u_n\|)$ 收敛．因此，为避免误解，当级数 $(\|u_n\|)$ 收敛时，我们就说级数 (u_n) 是在 $\mathscr{B}_F(A)$ 中依范数收敛的．类似地可定义 $\mathscr{B}_F(A)$ 中依范数可求和的族 $(u_\lambda)_{\lambda\in L}$（$L$ 是可数的，参看(5.3)）．

问　题

1）在空间 $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R})$ 中，设 u_n 是这样的函数，对于 $n\leqslant t<n+1$，它等于 $1/n$，对于 t 的其他值它等于 0．证明级数 (u_n) 是一致收敛与可换收敛的（5.3节，问题4），而且对每个 $t\in\mathbf{R}$，级数 $(u_n(t))$ 是绝对收敛的，但 (u_n) 并不是依范数收敛的．

2）设 A 是任意集．证明：$\mathscr{B}_{\mathbf{R}}(A)$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射 $u\to\sup_{t\in A}u(t)$ 是连续的．

3）设 E 是距离空间，F 是赋范空间．证明，所有满足下述条件的映射 $f\in\mathscr{B}_F(E)$ 的集合在空间 $\mathscr{B}_F(E)$ 中是闭的：它在 E 中每一点的振幅(3.14)均不超过给定值 $\alpha>0$．

2. 有界连续函数空间

现在设 E 是一距离空间．我们用 $\mathscr{C}_F(E)$ 表示 E 到赋范空间 F 的所有连续映射的向量空间，用 $\mathscr{C}_F^\infty(E)$ 表示 E 到 F 的所有有界连续映射的集．注意，如果 E 是紧的，则由(3.17.10)知 $\mathscr{C}_F^\infty(E)=\mathscr{C}_F(E)$．一般地，有 $\mathscr{C}_F^\infty(E)=\mathscr{C}_F(E)\cap\mathscr{B}_F(E)$．我们将把 $\mathscr{C}_F^\infty(E)$ 看成 $\mathscr{B}_F(E)$ 的一个赋范子空间，除非有相反的声明．如果 F 是有限维的，则在分解式(7.1.2.1)中，为使 f 是连续的，必须且只须每个 f_i 是连续的（参见(3.20.4)与(5.4.2)）．于是(7.1.2)之前的注记表明，在这样的情况下，$\mathscr{C}_F^\infty(E)$ 是有限个子空间的拓扑直和，且其中每一个都等距于 $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}^\infty(E)$（相应地，$\mathscr{C}_{\mathbf{C}}^\infty(E)$）．特别，考虑 $\mathscr{C}_{\mathbf{C}}^\infty(E)$ 的基础实向量子空间时，$\mathscr{C}_{\mathbf{C}}^\infty(E)$ 是拓扑直和 $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}^\infty(E)+i\mathscr{C}_{\mathbf{R}}^\infty(E)$．

(7.2.1) 子空间 $\mathscr{C}_F^\infty(E)$ 是在 $\mathscr{B}_F(E)$ 中闭的. 换句话说，有界连续函数一致的极限是连续的.

事实上，设 (f_n) 是 E 到 F 的有界连续映射序列，并且它在 $\mathscr{B}_F(E)$ 中收敛于 g. 于是对任意 $\varepsilon>0$，存在整数 n_0 使对 $n\geqslant n_0$ 有 $\|f_n-g\|\leqslant\varepsilon/3$. 对于任意 $t_0\in E$，设 V 是 t_0 这样的邻域：使对于任意 $t\in V$ 有 $\|f_{n_0}(t)-f_{n_0}(t_0)\|\leqslant\varepsilon/3$. 于是因为对任意 $t\in E$ 有 $\|f_{n_0}(t)-g(t)\|\leqslant\varepsilon/3$，所以对任意 $t\in V$ 我们有 $\|g(t)-g(t_0)\|\leqslant\varepsilon$，这就证明了 g 的连续性.

众所周知的那些例子(例如在[0,1]上的那些函数 $x\to x^n$) 表明：简单收敛的连续函数序列的极限不一定是连续的. 另一方面，也容易举出这样的连续函数序列的例子：它非一致地收敛于一个连续函数(见问题 2). 然而(也见 (7.5.6))：

(7.2.2) (Dini 定理) 设 E 是紧距离空间. 如果实值连续函数的递增(相应地，递减)序列 (f_n) 简单收敛于一连续函数 g，则它必一致收敛于 g.

假设序列是递增的. 对每个 $\varepsilon>0$ 与每个 $t\in E$，存在附标 $n(t)$ 使得当 $m\geqslant n(t)$ 时，$g(t)-f_m(t)\leqslant\varepsilon/3$. 因为 g 与 $f_{n(t)}$ 都是连续的，所以存在 t 的邻域 $V(t)$ 使得关系 $t'\in V(t)$ 蕴含 $|g(t)-g(t')|\leqslant\varepsilon/3$ 与 $|f_{n(t)}(t)-f_{n(t)}(t')|\leqslant\varepsilon/3$. 于是，对任意 $t'\in V(t)$，我们有 $g(t')-f_{n(t)}(t')\leqslant\varepsilon$. 现在在 E 中取有限个点 t_i 使得 $V(t_i)$ 覆盖 E，并设 n_0 是整数 $n(t_i)$ 中最大的. 那么，对任意 $t\in E$，t 必属于 $V(t_i)$ 中之一，于是，对于 $n\geqslant n_0$，有 $g(t)-f_n(t)\leqslant g(t)-f_{n_0}(t)\leqslant g(t)-f_{n(t_i)}(t)\leqslant\varepsilon$，这就是所要证明的.

问　　题

1) 设 E 是距离空间，F 是赋范空间，(u_n) 是 E 到 F 的有界连续映射序列，并且它在 E 中简单收敛于一有界函数 v.

a) 为使 v 在点 $x_0\in E$ 连续，充分且必要条件是：对任意 $\varepsilon>0$ 与任意整数 m，存在 x_0 的一个邻域 V 与一个附标 $n>m$ 使得对每个 $x\in V$ 都有 $\|v(x)$

$-u_n(x)\| \leqslant \varepsilon$.

b）再假设 E 是紧的. 那么，为使 v 在 E 中连续，充分且必要条件是：对任意 $\varepsilon>0$ 与任意整数 m，存在有限个附标 $n_i>m$ 使对每个 $x \in E$，至少存在一个附标 i，对于它有 $\|v(x)-u_{n_i}(x)\| \leqslant \varepsilon$（利用 a）与 Borel-Lebesgue 公理）.

2）对任意整数 $n>0$，设 g_n 是用下述条件在 $\boldsymbol{R}$ 上定义的连续函数：对于 $t \leqslant 0$ 与 $t \geqslant 2/n$，$g_n(t)=0$；$g_n(1/n)=1$；而在每一个区间 $[0, 1/n]$ 与 $[1/n, 2/n]$ 上，$g_n(t)$ 具有形式 $\alpha t+\beta$（其中 α, β 是适当的常数）. 那么，序列 (g_n) 在 $\boldsymbol{R}$ 中简单收敛于 0，但在任意一个包含 $t=0$ 的区间中，这个收敛都不是一致的.

设 $m \rightarrow r_m$ 是 $\boldsymbol{N}$ 到有理数集 $\boldsymbol{Q}$ 上的双映射，并假设 $f_n(t)=\sum\limits_{m=0}^{\infty} 2^{-m}$ $g_n(t-r_m)$. 函数 f_n 是连续的(7.2.1)，并且序列 (f_n) 在 $\boldsymbol{R}$ 中简单收敛于 0，但这个收敛在 $\boldsymbol{R}$ 的任意区间中均不是一致的.

3）设 I 是 $\boldsymbol{R}$ 的紧区间，(f_n) 是在 I 中定义的单调实函数序列，并且它在 I 中简单收敛于一连续函数 f. 证明：f 是单调的，而且序列 (f_n) 在 I 中一致收敛于 f.

4）设 E 是距离空间，F 是 Banach 空间，A 是 E 的稠密子集. 设 (f_n) 是 E 到 F 的这样的有界连续映射序列：这些 f_n 到 A 上的限制构成一个一致收敛序列. 证明 (f_n) 在 E 中是一致收敛的.

5）设 E 是距离空间，F 是赋范空间. 证明：$E \times \mathscr{C}_F^{\infty}(E)$ 到 F 的映射 $(x, u) \rightarrow u(x)$ 是连续的.

6）设 E, E' 是两个距离空间，F 是一赋范空间. 对 $E \times E'$ 到 F 的每一个映射 f 与每个 $y \in E'$，设 f_y 是 E 到 F 的映射 $x \rightarrow f(x, y)$.

a）证明：如果 f 有界，每个 f_y 在 E 中连续，并且 E' 到 $\mathscr{C}_F^{\infty}(E)$ 的映射 $y \rightarrow f_y$ 也连续，则 f 是连续的. 如果再加上 E 是紧的，证明其逆(利用 3.20 节问题 3a)).

b）取 $E=E'=F=\boldsymbol{R}$，并设 $f(x, y)=\sin xy$，它在 $E \times E'$ 中连续并有界. 证明：E' 到 $\mathscr{C}_F^{\infty}(E)$ 的映射 $y \rightarrow f_y$ 在 E' 的任意一点都是不连续的.

c）假设 E 与 E' 二者都是紧的，又对于任意 $f \in \mathscr{C}_F(E \times E')$，设 $\tilde{f}$ 是 E' 到 $\mathscr{C}_F(E)$ 的映射 $y \rightarrow f_y$；证明：映射 $f \rightarrow \tilde{f}$ 是 $\mathscr{C}_F(E \times E')$ 到 $\mathscr{C}_{F(E)}(E')$ 上的一个线性等距.

7）设 E 是距离空间，F 是赋范空间. 对 E 到 F 的每个有界连续映射 f，

设 $G(f)$ 是 f 在空间 $E\times F$ 的图象.

a) 证明: $f\to G(f)$ 是一个一致连续的单射映射,它是由赋范空间 $\mathscr{C}_F(E)$ 到 $E\times F$ 中闭集的空间 $\mathscr{F}(E\times F)$ 中的映射，后者是用 Hausdorff 距离(见 3.16 节问题 3)作成的距离空间. 设 Γ 是 $\mathscr{C}_F^\infty(E)$ 在映射 $f\to G(f)$ 下的象.

b) 证明: 如果 E 是紧的, 则 Γ 到 $\mathscr{C}_F(E)$ 上的逆映射 G^{-1} 是连续的(用反证法证明).

c) 证明: 如果 $E=[0,1]$ 与 $F=\boldsymbol{R}$, 则 G^{-1} 是非一致连续的.

8) 设 E 是一距离空间, 具有有界距离 d. 对每个 $x\in E$, 设 d_x 是 E 到 $\boldsymbol{R}$ 的有界连续映射 $y\to d(x,y)$. 证明: $x\to d_x$ 是 E 到 Banach 空间 $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}^\infty(E)$ 的子空间上的一个等距.

3. Stone-Weierstrass 逼近定理

对任意距离空间 E, 向量空间 $\mathscr{C}_{\boldsymbol{R}}^\infty(E)$ (相应地, $\mathscr{C}_{\boldsymbol{C}}^\infty(E)$)是实数(相应地, 复数)域上的一个代数. 由(7.1.1)推知: 在此代数中,我们有 $\|fg\|\leqslant\|f\|\cdot\|g\|$. 于是由(5.5.1)知, 双线性映射 $(f,g)\to fg$ 是连续的. 由此注记容易推出: 对于 $\mathscr{C}_{\boldsymbol{R}}^\infty(E)$ (相应地, $\mathscr{C}_{\boldsymbol{C}}^\infty(E)$) 的任意子代数 A, A 在 $\mathscr{C}_{\boldsymbol{R}}^\infty(E)$ (相应地, $\mathscr{C}_{\boldsymbol{C}}^\infty(E)$) 中的闭包 $\bar{A}$ 也是一子代数 (见(5.4.1) 的证明).

我们说 $\mathscr{B}_{\boldsymbol{R}}(E)$ (相应地, $\mathscr{B}_{\boldsymbol{C}}(E)$) 的子集 A **区分** E 的点,如果对 E 中任意一对不同的点 x,y,都存在函数 $f\in A$ 使 $f(x)\neq f(y)$.

(7.3.1) (Stone-Weierstrass 定理). 设 E 是紧距离空间. 如果 $\mathscr{C}_{\boldsymbol{R}}(E)$ 的子代数 A 包含常数函数并区分 E 的点, 则 A 在 Banach 空间 $\mathscr{C}_{\boldsymbol{R}}(E)$ 中是稠密的.

换句话说,如果 S 是 $\mathscr{C}_{\boldsymbol{R}}(E)$ 的子集且区分 E 的点,则对于 E 中任意连续实值函数 f, 总存在函数序列 (g_n) 一致收敛于 f, 并且每个 g_n 都可以表示成 S 中函数的实系数多项式.

把证明分成几步.

(7.3.1.1) 存在实多项式序列 (u_n), 它在区间$[0,1]$中是递增的, 并且一致收敛于$\sqrt{t}$.

用归纳法定义 u_n, 取 $u_1=0$, 并取

(7.3.1.2) $u_{n+1}(t) = u_n(t) + \frac{1}{2}(t - u_n^2(t)),\ n \geqslant 1.$

我们用归纳法证明：在$[0, 1]$中，$u_{n+1} \geqslant u_n$ 且 $u_n(t) \leqslant \sqrt{t}$。由(7.3.1.2)看到第一结果由第二个推得．另一方面

$$\sqrt{t} - u_{n+1}(t) = \sqrt{t} - u_n(t) - \frac{1}{2}(t - u_n^2(t))$$

$$= (\sqrt{t} - u_n(t))\left(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{t} + u_n(t))\right).$$

又由 $u_n(t) \leqslant \sqrt{t}$ 我们推得 $\frac{1}{2}(\sqrt{t} + u_n(t)) \leqslant \sqrt{t} \leqslant 1$．因此，对每个 $t \in [0, 1]$，序列 $(u_n(t))$ 是递增且有界的，于是收敛于一极限 $v(t)$ (4.2.1)；但是(7.3.1.2)给出 $t - v^2(t) = 0$，又因 $v(t) \geqslant 0$，所以 $v(t) = \sqrt{t}$．因为 v 是连续的且序列 (u_n) 是递增的，所以据 Dini 定理(7.2.2)知(u_n)一致收敛于 v.

(7.3.1.3) 对于任意函数 $f \in A$，$|f|$ 属于 A 在 $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(E)$ 中的闭包 $\bar{A}$.

设 $a = \|f\|$．据(7.3.1.1)，函数序列 $u_n(f^2/a^2)$，(由代数的定义知它属于 A)，在 E 中一致收敛于$\sqrt{f^2/a^2} = |f|/a$.

(7.3.1.4) 对于 $\bar{A}$ 中任意一对函数 f, g, $\inf(f, g)$ 与 $\sup(f, g)$ 属于 $\bar{A}$.

因为我们可以写 $\sup(f,g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$与 $\inf(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$，所以结果由(7.3.1.3)应用于代数 $\bar{A}$ 而得出.

(7.3.1.5) 对 E 中任意一对实数 α, β，存在函数 $f \in \bar{A}$ 使 $f(x) = \alpha$，$f(y) = \beta$.

据假设，存在函数 $g \in A$ 使 $g(x) \neq g(y)$．因为 A 包含常数函数，故取 $f = \alpha + (\beta - \alpha)(g - \gamma)/(\delta - \gamma)$ 即得，其中 $\gamma = g(x)$，$\delta = g(y)$.

(7.3.1.6) 对于任意 $f\in\mathscr{C}_{\boldsymbol{R}}(E)$，任意 $x\in E$ 与任意 $\varepsilon>0$，存在函数 $g\in\bar{A}$ 使 $g(x)=f(x)$ 并且对任意 $y\in E$，有 $g(y)\leqslant f(y)+\varepsilon$.

对于任意 $z\in E$，设 h_z 是 $\bar{A}$ 中的一函数使 $h_z(x)=f(x)$ 与 $h_z(z)\leqslant f(z)+\varepsilon/2$；这一函数的存在性，对于 $z=x$ 是显然的，对于 $z\neq x$ 可由(7.3.1.5)推出．由于 f 与 h_z 连续，故存在 z 的邻域 $V(z)$ 使对于 $y\in V(z)$，有 $h_z(y)\leqslant f(y)+\varepsilon$．用有限个邻域 $V(z_i)$ 覆盖 E．然后，据(7.3.1.4)，函数 $g=\inf(h_{z_i})$ 属于 $\bar{A}$，并且满足所要求的条件，因为每个 $y\in E$ 必属于某个 $V(z_i)$.

(7.3.1.7) $\bar{A}=\mathscr{C}_{\boldsymbol{R}}(E)$.

设 f 是 $\mathscr{C}_{\boldsymbol{R}}(E)$ 中任意函数．对任意 $\varepsilon>0$ 与每个 $x\in E$，设 $g_x\in\bar{A}$ 是这样的，使 $g_x(x)=f(x)$ 以及对所有 $y\in E$ 有 $g_x(y)\leqslant f(y)+\varepsilon$ (7.3.1.6)．那么由 f 与 g_x 的连续性，存在 x 的邻域 $U(x)$ 使得对于 $y\in U(x)$，有 $g_x(y)\geqslant f(y)-\varepsilon$．用有限个邻域 $U(x_i)$ 覆盖 E．那么，根据(7.3.1.4)，函数 $\varphi=\sup(g_{x_i})$ 属于 $\bar{A}$，并且对任意 $y\in E$ 有 $f(y)-\varepsilon\leqslant\varphi(y)\leqslant f(y)+\varepsilon$（因为每个 $y\in E$ 必属于某一 $U(x_i)$)．换句话说，$\|f-\varphi\|\leqslant\varepsilon$，这证明：$f$ 属于 $\bar{A}$ 的闭包，亦即属于 $\bar{A}$ 本身.

对于 $\mathscr{C}_C(E)$，相应的定理不成立（见第 IX 章(9.12.1)）．仅有一个较弱的结果：

(7.3.2) 设 E 是紧距离空间．如果 $\mathscr{C}_{\boldsymbol{C}}(E)$ 的子代数 A 包含常数函数且区分 E 的点，而对每个 $f\in A$，它的共轭函数 $\bar{f}$ 也属于 A，则 A 在 $\mathscr{C}_{\boldsymbol{C}}(E)$ 是稠密的.

我们注意到对于任意 $f\in A$，$\mathscr{R}f=\dfrac{1}{2}(f+\bar{f})$ 与 $\mathscr{I}f=(f-\bar{f})/2i$ 也属于 A．于是，如果 A_0 是由实值函数组成的 A 的(实)子代数，那么由定义立即推出：A_0 区分 E 的点并包含(实)常数函数．因此 A_0 在 $\mathscr{C}_{\boldsymbol{R}}(E)$ 中是稠密的．而 A 在 $\mathscr{C}_{\boldsymbol{C}}(E)=\mathscr{C}_{\boldsymbol{R}}(E)+i\mathscr{C}_{\boldsymbol{R}}(E)$ 中的稠密性可立即推得，因为 $A=A_0+iA_0$.

4. 应　用

在 Stone-Weierstrass 定理中，把 E 取为 $\boldsymbol{R}^n$ 的任意紧子集，把 A 取为由具有 n 个坐标的多项式在 E 上的限制所组成的代数. 区分性条件是满足的，因为对于 E 的两个不同的点，至少有一个坐标具有不同的值. 于是我们得出原始的 Weierstrass 逼近定理：

(7.4.1) $\boldsymbol{R}^n$ 的紧子集 E 上的任意实值连续函数都是在 E 中一致收敛的多项式序列的极限.

现在把 E 取为 $\boldsymbol{R}^2$ 中的单位圆 $x^2+y^2=1$，用角 πt 将它参数化，使 E 上的连续函数可以视为 $\boldsymbol{R}$ 上具有周期 2 的连续函数(见第 IX 章. 把 A 取为由常数与函数 $e^{\pi it}$ 及 $e^{-\pi it}$ 生成的（复）代数. 立即可知 A 的元素都是三角多项式 $\sum\limits_{n=-N}^{N} c_n e^{\pi nit}$. 因为函数 $e^{\pi it}$ 区分 E 的点，所以(7.3.2)的所有条件都已满足，于是有

(7.4.2) $\boldsymbol{R}$ 上的任意连续复值函数，如果是以 2 为周期的周期函数，则它是在 $\boldsymbol{R}$ 中一致收敛的三角多项式序列的极限.

上面结果使我们能对下述事实给出一个证明，这在(6.5)中已提到过：

(7.4.3) 三角系在准 Hilbert 空间 $F=\mathscr{C}_C(I)$ 中是全的.（该系是在（6.5.1）中定义的；注意，这里对空间 $\mathscr{C}_C(I)$ 毋需用范数(7.1.1)).

事实上，对任意函数 $f\in\mathscr{C}_C(I)$ 与任意整数 $n>0$，设 g 是这样一个函数：对于 $-1+1/n\leqslant t\leqslant 1$ 它等于 f，对于 $t=-1$ 它等于 $f(1)$，而在 -1 与 $-1+1/n$ 之间它是线性的. 于是，当 $t\geqslant -1+1/n$ 时，$f(t)-g(t)=0$，而对于 t 的其余值，$|f(t)-g(t)|\leqslant 4\|f\|_\infty$（我们用 $\|\cdot\cdot\|_\infty$ 表示由(7.1.1)定义的范数，用 $\|\cdot\cdot\|_2$ 表示准 Hilbert 范数). 因此我们有

$$\|f-g\|_2^2=\int_{-1}^{1}|f(t)-g(t)|^2dt\leqslant 16\|f\|_\infty^2/n.$$

换句话说，$\|f-g\|_2$ 可任意小．因为 g 是连续的，并且由于 $g(1)=g(-1)$ 而能被周期性地延拓，所以，据(7.4.2)存在一三角多项式 h，使得 $\|g-h\|_2 \leqslant \sqrt{2}\|g-h\|_\infty$ 为任意小． 这就完成了证明。

(7.4.4) 如果 E 是紧距离空间，则空间 $\mathscr{C}_{\boldsymbol{R}}(E)$ 与 $\mathscr{C}_{\boldsymbol{C}}(E)$ 都是可分的。

因为 $\mathscr{C}_{\boldsymbol{C}}(E)$ 是 $\mathscr{C}_{\boldsymbol{R}}(E)$ 与 $i\mathscr{C}_{\boldsymbol{R}}(E)$ 的拓扑直和，所以我们只须对 $\mathscr{C}_{\boldsymbol{R}}(E)$ 给出证明．设(U_n)是关于 E 的拓扑的一个可数基(3.16.2)，又设 $g_n(t)=d(t;E-U_n)$． 用 g_n 组成的那些单项式 $g_1^{k_1}\cdots g_n^{k_n}$ 也构成一可数集 (h_n)（据(1.9.3)与(1.9.4)）．并且由 h_n 生成的向量空间 A 就是由 g_n 生成的 $\mathscr{C}_{\boldsymbol{R}}(E)$ 的子代数．如果能证明 A 在 $\mathscr{C}_{\boldsymbol{R}}(E)$ 中是稠密的，那么我们的证明就完成了(5.10.1)．但是我们只须应用 Stone–Weierstrass 定理,并因而去检验族 (g_n) 区分 E 的点就行了． 然而当 $x\neq y$ 时，存在集 U_n 使得 $x\in U_n$，$y\notin U_n$，于是由定义 $g_n(x)\neq 0$，$g_n(y)=0$，这就是所要证明的。

问　　题

1) 设 E, F 是两个紧距离空间，f 是 $E\times F$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的连续映射．证明：对于任意 $\varepsilon>0$,存在 E 到 $\boldsymbol{R}$ 的连续映射的一个有限系 $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ 与 F 到 $\boldsymbol{R}$ 的连续映射的一个有限系 $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ 使对于任意 $(x,y)\in E\times F$，都有 $\left|f(x,y)-\sum_{i=1}^{n}u_i(x)v_i(y)\right|\leqslant\varepsilon$．(把 Stone-Weierstrass 定理应用到由连续映射 $(x,y)\to u(x)$ 与 $(x,y)\to v(y)$ 生成的代数上,其中 $u\in\mathscr{C}_{\boldsymbol{R}}(E)$ 与 $v\in\mathscr{C}_{\boldsymbol{R}}(F)$)．

2) 设 $n\to r_n$ 是 N 到区间 $[0,1]=I$ 中有理数集上的双映射．用归纳法定义含在 I 中的一个闭区间序列 (I_n)，使得：1°I_n 的中心是 r_{k_n}，其中 k_n 是满足下列条件的最小附标 p：r_p 不在区间 I_h，$h<n$，的并集中． 2° I_n 的长度$\leqslant 1/4^n$，并且 I_n 不与任何一个 I_h，$h\leqslant n$，相交．在积空间 $I\times\boldsymbol{R}$ 中,定义一个有界实连续函数 u，使具有下列性质：1°对每个整数 $n\geqslant 0$，对于 $x=r_{k_n}$；$x\to u(x,n)$ 取值 1，对于 $x\notin I_n$，等于 0；并且对于所有 $x\in I$，有 $0\leqslant u(x,n)\leqslant 1$；2° 对每个 $x\in I$，函数 $y\to u(x,y)$ 在区间 $]-\infty,0]$ 与每个 $[n,n+1]$ $(n\in\boldsymbol{N})$ 上均具有形式 $\alpha y+\beta$．证明：不存在有限函数系 $v_i\in\mathscr{C}_{\boldsymbol{R}}(I)$

与 $w_i \in \mathscr{C}_{\mathbf{R}}^{\infty}(\mathbf{R})$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 使得在 $I \times \mathbf{R}$ 中 $\left|u(x, y)-\sum_{i=1}^{n} v_i(x) w_i(x)\right| \leqslant 1/4$.
(假设相反. 考虑 $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(I)$ 中的函数 $u_n: x \to u(x, n)$, 并注意 $\|u_n\| = 1$, 以及对 $m \neq n$ 有 $\|u_n - u_m\| = 1$. 如果存在 $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(I)$ 的有限维子空间 E 使得对每个 n 都有 $d(u_n, E) \leqslant 1/4$, 那么在 E 中将存在这样一个无穷序列 (h_n): $\|h_n\| = 2$ 并且对于 $m \neq n$, $\|h_n - h_m\| \geqslant 1/2$, 这与(5.10.1))矛盾.

3) 设 E 是 $\mathbf{R}$ 中的区间[0,1].

a) 证明: 如果 $a_k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 是 E 中 n 个不同的点, 则函数 $x \to |x - a_k|$ 在 $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(E)$ 中是线性无关的.

b) 由 a) 推证: $E \times E$ 中的函数 $(x, y) \to |x - y|$ 不能被写成有限和 $\sum_{i=1}^{n} v_i(x) w_i(y)$, 其中 v_i 与 w_i 在 E 中是连续的.

4) 证明: Banach 空间 $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}^{\infty}(\mathbf{R})$是不可分的. (利用类似于 5.10 节问题中用过的那种方法.)

5. 等度连续集

设 H 是空间 $\mathscr{B}_F(E)$ (E 是距离空间, F 是赋范空间)的一个子集. 我们说 H 在点 $x_0 \in E$ 是**等度连续的**, 如果对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在一个 $\delta > 0$ 使得只要 $d(x_0, x) \leqslant \delta$ 就对每个 $f \in H$ 都有 $\|f(x) - f(x_0)\| \leqslant \varepsilon$ (这里重要的一点是 δ 与 f 无关). 我们说 H 是等度连续的, 如果它在 E 的每一点都是等度连续的.

(7.5.1)**例** 假设存在两个常数 $c, \alpha > 0$ 使得对于任意 $f \in H$ 与 E 的任意一对点 x, y 都有 $\|f(x)-f(y)\| \leqslant c \cdot (d(x, y))^{\alpha}$, 则 H 是等度连续的.

(7.5.2) 在点 x_0 (相应地, 在 E 中)连续的函数的任意有限集是在 x_0 等度连续的(相应地, 等度连续的). 更一般地, 在点 x_0 等度连续(相应地, 等度连续)的函数集的任意有限并集仍是在 x_0 等度连续的(相应地, 等度连续的).

(7.5.3) 设 (f_n) 是 $\mathscr{B}_F(E)$ 中的一函数序列, 如果它简单收敛于一函数 g 并且是在 x_0 等度连续的(相应地, 等度连续的). 则 g 在

x_0是连续的(相应地,连续的).

事实上,假设对任意满足 $d(x, x_0) \leqslant \delta$ 的 x 与任意 n,均有 $\|f_n(x_0) - f_n(x)\| \leqslant \varepsilon$. 那么据不等延拓原理,对任意使 $d(x, x_0) \leqslant \delta$ 的 x,有 $\|g(x) - g(x_0)\| \leqslant \varepsilon$,这就是所要证明的.

(7.5.4) 在空间 $\mathscr{C}_F^\infty(E)$ 中,任意等度连续子集的闭包是等度连续的.

这可立即由(3.13.13)与(7.5.3)的证明得到.

(7.5.5) 假设 F 是一 Banach 空间,(f_n) 是 $\mathscr{C}_F^\infty(E)$ 中的一等度连续序列,而且对于 E 的一稠密子集 D 中的任意一点 x,序列 $(f_n(x))$ 在 F 中是收敛的. 那么序列 (f_n) 简单收敛于一(连续)函数 g.

因为 F 是完备的,我们只须证明对每个 $x \in E$,$(f_n(x))$ 是 F 中的 Cauchy 序列. 现在对任意 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta > 0$ 使得关系 $d(x, y) \leqslant \delta$ 蕴含 $\|f_n(x) - f_n(y)\| \leqslant \varepsilon/3$ 对每个 n 成立. 另一方面,存在 $y \in D$ 使得 $d(x, y) \leqslant \delta$,而据假设存在 n_0 使得对于 $m \geqslant n_0$,$n \geqslant n_0$,有 $\|f_m(y) - f_n(y)\| \leqslant \varepsilon/3$. 由此推知对于 $m \geqslant n_0$,$n \geqslant n_0$,有 $\|f_m(x) - f_n(x)\| \leqslant \varepsilon$,这就是所要证明的.

(7.5.6) 假设 E 是紧距离空间,(f_n) 是 $\mathscr{C}_F(E)$ 中的等度连续序列. 如果 (f_n) 在 E 中简单收敛于 g,则它在 E 中一致收敛于 g.

给定任意 $\varepsilon > 0$,对于每个 $x \in E$,存在一邻域 $V(x)$ 使得关系 $y \in V(x)$ 蕴含 $\|f_n(x) - f_n(y)\| \leqslant \varepsilon/3$ 对每个 n 成立. 用有限个邻域 $V(x_i)$ 覆盖 E. 从而存在 n_0 使得对于 $n \geqslant n_0$ 有 $\|g(x_i) - f_n(x_i)\| \leqslant \varepsilon/3$ 对于所有附标 i 成立. 但是,对于任意 $x \in E$,x 必属于 $V(x_i)$ 中的一个,于是对所有 n 我们有 $\|f_n(x) - f_n(x_i)\| \leqslant \varepsilon/3$. 令 n 趋于 $+\infty$,即得出 $\|g(x) - g(x_i)\| \leqslant \varepsilon/3$. 于是对于任意 $n \geqslant n_0$ 与每个 $x \in E$ 我们均有 $\|g(x) - f_n(x)\| \leqslant \varepsilon$. 这就是所要证明的.

(7.5.7) (Ascoli 定理). 假设 F 是 Banach 空间,E 是紧距离空间. 为使 Banach 空间 $\mathscr{C}_F(E)$ 的子集 H 为相对紧的,充要条件是 H 为等度连续的,而且对于每个 $x \in E$,$H(x)$ 是在 F 中相对紧的,

这里 $H(x)$ 是所有使 $f \in H$ 的 $f(x)$ 的集。

a）必要性．如果 H 是相对紧的，则对于每个 $\varepsilon > 0$，存在有限个函数 $f_i \in H$ 使得对于每个 $f \in H$，均存在附标 i 使 $\|f(x) - f_i(x)\| \leqslant \varepsilon/3$，又因为 F 是完备的，据(3.17.5)知 $H(x)$ 是相对紧的．另一方面，设 V 是 x 的这样的邻域，使得 $y \in V$ 蕴含 $\|f_i(y) - f_i(x)\| \leqslant \varepsilon/3$ 对每一附标 i 成立．那么，对任意 $f \in H$，$y \in V$ 蕴含 $\|f(y) - f(x)\| \leqslant \varepsilon$，这就证明 H 是等度连续的．

b）充分性．因为由(7.1.3)与(7.2.1)，$\mathscr{C}_F(E)$ 是完备的．所以我们只须证明 H 是准紧的(3.17.5)．任意给定 $\varepsilon > 0$，对每个 $x \in E$，设 $V(x)$ 是 x 这样的邻域，使得 $y \in V(x)$ 蕴含 $\|f(y) - f(x)\| \leqslant \varepsilon/4$ 对每个 $f \in H$ 成立．用有限个邻域 $V(x_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ 覆盖 E．另一方面，据假设，每个集合 $H(x_i)$ 都是在 F 中相对紧的．因此它们的并集 K 也是在 F 中相对紧的．设 $(c_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ 是 K 中这样的有限子集，使得 K 中每个点都在以 c_j 之一为中心以 $\varepsilon/4$ 为半径的球内．现在设 Φ 是 $[1,m]$ 到 $[1,n]$（$\boldsymbol{N}$ 中的区间）的所有映射 $i \to \varphi(i)$ 的(有限)集合．对于每个 $\varphi \in \Phi$，用 L_φ 表示所有这样的函数 $f \in H$ 的集合：即对 $[1,m]$ 中的每一附标 i，我们都有 $\|f(x_i) - c_{\varphi(i)}\| \leqslant \varepsilon/4$．有些 L_φ 可能是空的，但是从 c_j 的定义可以推出 H 被 L_φ 的并集覆盖．要完成定理的证明我们只须证明每个 L_φ 的直径 $\leqslant \varepsilon$．现在设 f, g 是 L_φ 中的两个函数．对于每个 $y \in E$，存在 i 使 $y \in V(x_i)$，于是 $\|f(y) - f(x_i)\| \leqslant \varepsilon/4$ 与 $\|g(y) - g(x_i)\| \leqslant \varepsilon/4$．因为依定义 $\|f(x_i) - g(x_i)\| \leqslant \varepsilon/2$，所以对于每个 $y \in E$ 我们都有 $\|f(y) - g(y)\| \leqslant \varepsilon$，亦即 $\|f - g\| \leqslant \varepsilon$，这就是所要证明的．

问　　题

1）设 E 是距离空间，F 是赋范空间，H 是 $\mathscr{C}_F^\infty(E)$ 的有界子集．对于每个 $x \in E$，设 $\tilde{x}$ 是 H 到 F 的映射 $u \to u(x)$，它是连续而且有界的．证明：为使 H 在 x_0 是等度连续的，必须且只须 E 到 $\mathscr{C}_F^\infty(H)$ 的映射 $x \to \tilde{x}$ 在 x_0 是连续的．

2）设E是距离空间，F是赋范空间，(f_n)是$\mathscr{C}_F^\infty(E)$中的等度连续序列。证明：使$(f_n(x))$在F中是 Cauchy 序列的点$x\in E$的集在E中是闭的。

3）设E是$\boldsymbol{R}$中的区间$[0,+\infty[$，对于任意n，在E中设

$$f_n(t)=\sin\sqrt{t+4n^2\pi^2}$$

证明：序列(f_n)在E中是等度连续的并且在E中简单收敛于0，但它在空间$\mathscr{C}_{\boldsymbol{R}}^\infty(E)$中不是相对紧的(证明：如果它是的，则它将一致收敛于0)。

4）设E是距离空间，F是赋范空间，(f_n)是$\mathscr{C}_F^\infty(E)$中的函数序列并且在点$a\in E$是等度连续的。证明：如果序列$(f_n(a))$收敛于$b\in F$，则对于E中任意这样的序列(x_n)，满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，序列$(f_n(x_n))$在$F$中也收敛于$b$。

5）设E是距离空间，F是赋范空间。我们说：$\mathscr{C}_F^\infty(E)$的子集H是**一致等度连续的**，如果对于任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$使得关系$d(x,y)\leqslant\delta$蕴含$\|f(x)-f(y)\|\leqslant\varepsilon$对于每个$f\in H$成立。任意函数$f\in H$是一致连续的。反之，一致连续的函数的有限集是一致等度连续的。证明：对于$\mathscr{C}_F^\infty(E)$中有界子集H，下列性质是等价的：

α）H是一致等度连续的。

β）E到$\mathscr{C}_F^\infty(H)$的映射$x\to\tilde{x}$（问题1）是一致连续的。

γ）$H\times E$到F的映射$(u,x)\to u(x)$（把H看成$\mathscr{C}_F^\infty(E)$的一个子空间）是一致连续的。

6）设E是距离空间，F是赋范空间，H是$\mathscr{C}_F^\infty(E)$的一致等度连续子集（问题5）；证明：H在$\mathscr{C}_F^\infty(E)$中的闭包中是一致等度连续的。

7）设E是紧距离空间，F是赋范空间。证明：$\mathscr{C}_F(E)$的任意等度连续子集是一致等度连续的。

8）设E是紧距离空间，F是 Banach 空间。证明：如果$\mathscr{C}_F(E)$的子集H是相对紧的，则所有集合$H(x)$的并集，其中$x\in E$，在F中是相对紧的（利用7.2节问题5）。

9）证明：Ascoli 定理(7.5.7)的结论仍然成立，如果我们不假设$H(x)$对每个$x\in E$都是在F中相对紧的，而只假设$H(x)$对所有$x\in D$是相对紧的，其中D是E的一稠密子集。

10）设E是距离空间，H是$\mathscr{C}_{\boldsymbol{R}}^\infty(E)$的等度连续子集。证明：使$H(x)$在$\boldsymbol{R}$中有界的那种点$x\in E$的集合$A$在$E$中是既开又闭的。若$E$是紧的与

连通的，并若对一点 $x_0\in E$，$H(x_0)$ 在 $\boldsymbol{R}$ 中是有界的，则 H 在 $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(E)$ 中是相对紧的。

11) 设 E 是距离空间，H 是 $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}^{\infty}(E)$ 的等度连续子集。对每个 $x\in E$，设 $v(x)=\sup_{f\in H}f(x)$，$w(x)=\inf_{f\in H}f(x)$。证明：如果 v（相应地，w）在一点 x_0 是有限的，则它在 x_0 的一个邻域中是有限的与连续的；如果 $v(x_0)=+\infty$（相应地，$w(x_0)=-\infty$），则在 x_0 的一个邻域中，$v(x)=+\infty$（相应地，$w(x)=-\infty$）。由此得出结论：使 $v(x)$（相应地，$w(x)$）为有限的那种点 $x\in E$ 的集合在 E 中是既开又闭的。

12) 设 $I=[a,b]$ 是 $\boldsymbol{R}$ 中的紧区间，函数 $f\in\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(I)$ 称为关于常数 $k>0$ 是 Lipschitz 的，如果对 I 中的每一点对 (x,x') 有 $|f(x)-f(x')|\leqslant k|x-x'|$。设 K 是关于 k 为 Lipschitz 的所有函数 f 组成的 $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(I)$ 的子集，且 $f(a)=0$。试证，ε-熵 $H_\varepsilon(K)$ 与 ε-容量 $C_\varepsilon(K)$（3.16 问题4））由下述公式给出

$$H_\varepsilon(K)=C_{2\varepsilon}(K)=\left(\frac{k(b-a)}{\varepsilon}-1\right)\log 2，若\ \frac{k(b-a)}{\varepsilon}\ 是整数，$$

$$H_\varepsilon(K)=C_{2\varepsilon}(K)=\left[\frac{k(b-a)}{\varepsilon}\right]\log 2，若\ \frac{k(b-a)}{\varepsilon}\ 非整数。$$

（$[t]$ 是 $\leqslant t$ 的最大整数）。（借助于适当的线性变换，可以假设 $k=1$。设 $b-a=n\varepsilon$，这里 n 是整数，考虑这样的 2^{n-1} 个函数 $g\in K$ 的集 M_{n-1}，在每个区间

$$\left]a+h\frac{n-1}{b-a},\ a+(h+1)\frac{n-1}{b-a}\right[\quad(0<h\leqslant n-2)$$

中等于一个仿射函数，并在每个这样的区间中有等于 1 或 -1 的导数；试证 M_{n-1} 中的任意两个不同元素的距离 $\geqslant 2/(n-1)$。类似的，考虑由 M_n 中 2^{n-1} 个函数组成的子集 M_n'，其中每个函数在 $[a,a+(b-a)/n]$ 中等于 $x-a$ 并且对每个函数 $g\in M_n'$，考虑所有 $f\in K$ 的这样的集：对每个 $x\in I$ 有 $g(x)-2/n\leqslant f(x)\leqslant g(x)$。当 $(b-a)/\varepsilon$ 不是整数时，利用同样的作法。）

6. 正则函数

设 I 是 $\boldsymbol{R}$ 中的区间，始点为 a，终点为 b（a 或 b 或两者可以是无穷的），F 是 Banach 空间。我们说，I 到 F 的映射 f 是阶梯

函数，如果存在 $\bar{I}$（I 在 $\bar{R}$ 中的闭包）中点的递增有限序列 $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$，使得 $x_0=a$，$x_n=b$，而且 f 在每个开区间 $]x_i, x_{i+1}[$ $(0\leqslant i\leqslant n-1)$中都是常数.

对于 I 到 F 的任意映射 f 与任意异于 b 的点 $x\in I$，我们说 f 在 x 有**右极限**，如果 $\lim\limits_{\substack{y\in I, y>x\\ y\to x}} f(y)$ 存在. 我们把这个极限记作 $f(x+)$. 对于每个异于 a 的点 $x\in I$，我们类似地定义 f 在 x 的**左极限**，并记为 $f(x-)$. I 到 F 的映射 f 称为**正则函数**，如果它在 I 的每一点都有右侧极限和左侧极限. 显然，任意阶梯函数是正则的.

(7.6.1) 为使紧区间 $I=[a,b]$ 到 F 的映射 f 为正则的，充要条件是 f 为一致收敛的阶梯函数序列的极限.

a) 必要性. 对于每个整数 n 与每个 $x\in I$，存在包含 x 的开区间 $V(x)=]y(x), z(x)[$，使得当 s，t 同在 $]y(x), x[\cap I$ 中或者同在 $]x, z(x)[\cap I$ 中时，$\|f(s)-f(t)\|\leqslant 1/n$. 用有限个区间 $V(x_i)$ 覆盖 I，并设 $(c_j)_{0\leqslant j\leqslant m}$ 是由点 a，b，x_i，$y(x_i)$ 与 $z(x_i)$ 组成的严格递增序列. 因为，对于 $j\leqslant m-1$，每个 c_j 都在某个 $V(x_i)$ 中，c_{j+1} 或者在那同一个 $V(x_i)$ 中，或者我们有 $c_{j+1}=z(x_i)$. 换句话说，如果 s，t 在同一个区间 $]c_j, c_{j+1}[$ 中，则 $\|f(s)-f(t)\|\leqslant 1/n$. 现在把 g_n 定义成这样的阶梯函数，它在各点 c_j 与每个区间 $]c_j, c_{j+1}[$ 的中点处等于 f，而在这些区间的每一个中都等于常量. 显然 $\|f-g_n\|\leqslant 1/n$.

b) 充分性：假设 f 是阶梯函数序列 (f_n) 一致收敛的极限. 对每个 $\varepsilon>0$，存在 n 使得 $\|f-f_n\|\leqslant \varepsilon/3$；又，对每个 $x\in I$，存在包含 x 的区间 $]c, d[$ 使得当 s 与 t 同在 $]c, x[$ 或者同在 $]x, d[$ 中时，$\|f_n(s)-f_n(t)\|\leqslant\varepsilon/3$. 于是在上述同样假设下，我们有 $\|f(s)-f(t)\|\leqslant\varepsilon$. 这证明了 f 在 x 的左侧和右侧极限是存在的，因为 F 是完备的(3.14.6).

(7.6.1)的另一种说法是：正则函数集在 $\mathscr{B}_F(E)$ 中是闭的，而且阶梯函数集在正则函数集中是稠密的.

(7.6.2) 区间 $I\subset \boldsymbol{R}$ 到 Banach 空间的任意连续映射是正则的；I 到 R 的任意单调映射也是正则的.

考虑到(3.16.5)与(4.2.1)，这可由定义推出.

问　　题

1) 设 f 是区间 $I\subset \boldsymbol{R}$ 到 Banach 空间 F 的正则映射. 证明：对 I 的每个紧子集 H，$f(H)$ 在 F 中是相对紧的. 举例说明 $f(H)$ 在 F 中不一定是闭的.

2) 函数 $f(x)=x\sin(1/x)$ $(f(0)=0)$ 是连续的，于是在 $I=[0,1]$ 上是正则的. 又函数 $g(x)=\operatorname{sgn}x$（当 $x>0$ 时 $g(x)=1$，$g(0)=0$，当 $x<0$ 时 $g(x)=-1$）在 $\boldsymbol{R}$ 中是正则的，但是复合函数 $g\circ f$ 在 I 中不是正则的.

3) 设 $I=[a,b]$ 是 $\boldsymbol{R}$ 中的紧区间. I 中的囿变函数是指 I 到 Banach 空间 F 中的映射 f，它具有下列性质：存在数 $V\geqslant 0$ 使对于 I 中点的任意严格递增有限序列 $(t_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$，不等式 $\sum_{i=0}^{n-1}\|f(t_{i+1})-f(t_i)\|\leqslant V$ 成立.

a) 证明：$f(I)$ 在 F 中是相对紧的(利用间接证法证明 $f(I)$ 是准紧的).

b) 证明：f 是 I 中的正则函数(利用 a) 与(3.16.4)).

c) 在[0,1]上这样定义的函数 g，对于 $x\neq 0$，它等于 $x^2\sin(1/x^2)$，而对于 $x=0$，它等于0，证明 g 不是囿变的，尽管它在 I 的每一点都有导数.

第八章 微 分 学

本章的主要内容不是别的而是微积分的基本定理. 然而它是以一种或许对大多数学生感到陌生的方式介绍的. 这种介绍始终严格坚持我们对分析的一般“几何”观点，其目的在于尽可能密切地保持微分学的基本思想，即用线性函数“局部”逼近函数. 在微分学的经典数学中，这种思想被下述偶然的事实直接掩盖着，即在一维向量空间中，线性型与数之间存在一一对应，因而定义一点的导数时用数而不用线性型. 在处理多变量函数时，不惜一切地奴隶般地顺从于数值解释的老调，将会变得更糟. 例如，如此得到的复合函数偏导数的经典公式(8.9.2)，已失去任何直观意义的痕迹，而这条定理的自然陈述当然是：复合函数的(全)导数是它们的各个导数的复合(8.2.1)，当我们用线性逼近思考时，这是一个很容易察觉得到的表述.

微积分的这种“内在”的表述，是由于它的更高度的“抽象”，特别是由于这一事实，即我们不得不一再抛弃初始空间，高而又高地攀登到新的“函数空间”(尤其是处理高阶导数的理论时)，它与经典公式的舒服的常规相比，确实需要一定的精神努力. 但是我们相信其结果是很值得花费劳动的，因为它将使学生获得在微分流形上的微积分的更一般的思想作准备，它们将在第十九与二十章中加以讨论. 当然他们会注意到：在这些应用中，所涉及的大多数向量空间都是有限维的；如果能给他一种额外保险感觉的话，他当然可以给本章的所有定理都加上有限维的假设. 但是他必将认识到：这样的作法既不一直使证明变得更简短也不能使证明更单纯；换句话说，有限维的假设与以后发展的内容是完全无关的，因此我们认为最好把它统统除去，虽然讨论有限维情形的微积分的应用不论在数量上还是在重要性上都仍然远远超过其他方面.

在导出微积分的形式规则之后(8.1 到 8.4 节)，本章其余各节是 8.5 节证明的中值定理的各种应用，这个定理在分析中或许是最有用的．读者将注意到，这个定理的叙述，当然是对向量值函数给出的，在外表上不同于古典中值定理(对于实值函数)，后者通常被写成等式 $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$．古典叙述引起的麻烦是：1° 一旦 f 取向量值或 f' 只在有限个点处有定义，就没有任何类似之处了；2° 它完全隐蔽这一事实，即除了它介于 a，b 之间以外，人们对数 c 毫无所知，并且对大多数目的来说，只须知道 $f'(c)$ 是位于 f' 在区间 $[a, b]$ 的上、下确界之间的一个数就行了(而不是它实际上是 f' 的一个值的事实)．换句话说，中值定理的实质由写成不等式而非等式的形式所揭示出来．

最后，读者可能会注意到，这里明显地没有列入微积分教程中一个古老的题目，即"黎曼积分"．人们大概会感觉到：如果不是它的有权威的名字，它老早就该没落下去了，因为对于任何一位从事研究工作的数学家来说(带着对黎曼天才的应有尊敬)，十分清楚，现今这一"理论"的重要性在测度与积分的一般理论中，最多不过是一普通的有趣的练习(参看 13.9 问题 7)．只有那种学究传统的顽固保守主义才会把它冻结成课程的正规部分，长时间以后必将失去它的历史重要性．当然，把积分方法限制在满足下述条件的一类函数中是完全可能的，这类函数对初等分析的一切目的来说(在本卷的水平上)是足够广而与连续函数足够接近，以致足以消除由测度论引起的一切顾虑；这正是我们通过只定义正则函数的积分(有时称为"Cauchy 积分")所已做到的．当我们需要更有效的工具时，没有中间立足点，只依赖于一般的("Lebesgue"的)积分理论(第十三章)就是了．

1. 连续映射的导数

设 E，F 是两个 Banach 空间(同为实或同为复)，A 是 E 的开子集．设 f，g 是 A 到 F 的两个映射．我们说 f 与 g 在点 $x_0 \in A$

相切，如果 $\lim_{x\to x_0, x\neq x_0}\|f(x)-g(x)\|/\|x-x_0\|=0$；这当然蕴含 $f(x_0)=g(x_0)$. 我们注意这个定义只取决于 E 与 F 的拓扑. 因为，如果 f, g 对于 E 与 F 上给定的范数是相切的，那么它们对于等价的范数(5.6)仍然是相切的. 如果 f, g 在 x_0 相切，g, h 在 x_0 相切，则 f, h 在 x_0 相切，这由不等式 $\|f(x)-h(x)\|\leqslant\|f(x)-g(x)\|+\|g(x)-h(x)\|$ 推出.

与函数 f 在 x_0 相切的所有函数中，最多只有一个形如 $x\to f(x_0)+u(x-x_0)$ 的映射，其中 u 是线性的. 因两个这样的函数 $x\to f(x_0)+u_1(x-x_0)$, $x\to f(x_0)+u_2(x-x_0)$ 在 x_0 相切，那就意味着，对于线性映射 $v=u_1-u_2$，有 $\lim_{y\to 0, y\neq 0}\|v(y)\|/\|y\|=0$. 但是这蕴含 $v=0$，因为，对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $r>0$ 使得 $\|y\|\leqslant r$ 蕴含 $\|v(y)\|\leqslant\varepsilon\|y\|$，而这最后的不等式对于任意 $x\neq 0$ 仍然成立，这是通过把它应用到 $y=rx/\|x\|$ 上知道的；由于 ε 是任意的，故对于任意 x 都有 $v(x)=0$.

我们称 A 到 F 的连续映射 f 在点 $x_0\in A$ 是**可微的**，如果存在 E 到 F 的线性映射 u 使得 $x\to f(x_0)+u(x-x_0)$ 与 f 在 x_0 相切. 刚才已看到这个映射是唯一的；称它为 f 在点 x_0 的**导数**(或全导数)，记为 $f'(x_0)$ 或 $Df(x_0)$.

(8.1.1) 如果 A 到 F 的连续映射 f 在点 x_0 是可微的，则导数 $f'(x_0)$ 是 E 到 F 的连续线性映射.

设 $u=f'(x_0)$. 任给 $\varepsilon>0$，存在这样的 r：$0<r<1$ 并且 $\|t\|\leqslant r$ 蕴含 $\|f(x_0+t)-f(x_0)\|\leqslant\varepsilon/2$ 与 $\|f(x_0+t)-f(x_0)-u(t)\|\leqslant\varepsilon\|t\|/2$；于是 $\|t\|\leqslant r$ 蕴含 $\|u(t)\|\leqslant\varepsilon$，由(5.5.1)，这便证明 u 是连续的.

由此可知，A 到 F 的连续映射 f 在点 $x_0\in A$ 的导数(当它存在时)是 Banach 空间 $\mathscr{L}(E;F)$ (见(5.7))的一个元素，而不是 F 的元素. 以下对于 $u\in\mathscr{L}(E;F)$ 与 $t\in E$，将把 $u(t)$ 记为 $u\cdot t$，我们回忆(5.7)：$\|u\cdot t\|\leqslant\|u\|\cdot\|t\|$ 以及 $\|u\|=\sup_{\|t\|\leqslant 1}\|u\cdot t\|$.

当 E 具有有限维数 n 与 F 具有有限维数 m 时，$f'(x_0)$ 可以视

为一个m行n列矩阵；这个矩阵将在(8.10)中确定.

(8.1.2) **例** 常值函数在A的每一点都是可微的，它的导数是$\mathscr{L}(E;F)$的元素0.

(8.1.3) E到F的连续线性映射u的导数在每一点$x\in E$都存在，而且$D\cdot u(x)=u$.

因为，据定义，$u(x_0)+u(x-x_0)=u(x)$.

(8.1.4) 设E,F,G是三个 Banach 空间，$(x,y)\to[x\cdot y]$是$E\times F$到G中的连续双线性映射.则这个映射在每一点$(x,y)\in E\times F$都是可微的.且它的导数是线性映射$(s,t)\to[x\cdot t]+[s\cdot y]$.

因我们有$[(x+s)\cdot(y+t)]-[x\cdot y]-[x\cdot t]-[s\cdot y]=[s\cdot t]$；又由假设，存在常数$c>0$使得$\|[s\cdot t]\|\leqslant c\cdot\|s\|\cdot\|t\|$ (5.5.1). 因此，对于任意$\varepsilon>0$，关系式$\sup(\|s\|,\|t\|)=\|(s,t)\|\leqslant\varepsilon/c$蕴含

$$\|[(x+s)\cdot(y+t)]-[x\cdot y]-[x\cdot t]-[s\cdot y]\|/\|(s\cdot t)\|\leqslant\varepsilon,$$

这就证明了我们的断言.

(8.1.5) 设$F=F_1\times F_2\times\cdots\times F_m$是 Banach 空间的积，$f=(f_1,\cdots,f_m)$是$E$的开子集$A$到$F$的连续映射. 为使$f$在$x_0$是可微的，充要条件是每个$f_i$在$x_0$是可微的，而且$f'(x_0)=(f_1'(x_0),\cdots,f_m'(x_0))$ (这时$\mathscr{L}(E;F)$可看成诸空间$\mathscr{L}(E;F_i)$的积).

事实上，E到F的任意线性映射u可唯一地写成$u=(u_1,\cdots,u_m)$，这里u_i是E到F_i的线性映射. 据定义我们有$\|u(x)\|=\sup(\|u_1(x)\|,\cdots,\|u_m(x)\|)$，于是(由(5.7.1)与(2.3.7))推出$\|u\|=\sup(\|u_1\|,\cdots,\|u_m\|)$，此式证明$\mathscr{L}(E;F)$与积$\prod_{i=1}^{m}\mathscr{L}(E;F_i)$等同. 由定义立即推得：$u$是$f$在$x_0$的导数当且仅当$u_i$是$f_i$在$x_0$的导数，其中$1\leqslant i\leqslant m$.

附注 设E,F是复 Banach 空间，E_0,F_0是相应的基础实 Banach 空间. 如果E的开子集A到F中的映射f在点x_0可微，

则当我们把它看作是 A 到 F_0 中的映射时，它也是可微的，且有同一个导数（E 到 F 的线性映射作为 E_0 到 F_0 的映射也是线性的）. 但是逆命题不真，这可立即由 $\boldsymbol{C}$ 到自身的映射 $z \to \bar{z}$（复共轭）这一例子看出；作为 $\boldsymbol{R}^2$ 到自身的一个映射，u: $z \to \bar{z}$（可以把它写成 $(x, y) \to (x, -y)$）是可微的，而且据(8.1.3)它在每一点的导数都等于 u; 但是 u 不是复线性映射，于是得到结果. 在第 IX 章(9.10.1)中我们再回到这个问题.

当 A 到 F 的映射 f 在 A 的每一点都可微时，就说 **f 在 $\boldsymbol{A}$ 中可微**；A 到 $\mathscr{L}(E; F)$ 中的映射 $x \to f'(x) = Df(x)$ 将写成 f' 或 Df，并且称之为 **f 在 $\boldsymbol{A}$ 中的导数**.

2. 形式求导法则

(8.2.1) 设 E, F, G 是三个 Banach 空间，A 是 $x_0 \in E$ 的开邻域，f 是 A 到 F 中的连续映射，$y_0 = f(x_0)$，B 是 y_0 在 F 中的开邻域，g 是 B 到 G 中的连续映射. 那么，如果 f 在 x_0 可微，g 在 y_0 可微，则 $h = g \circ f$（它在 x_0 的邻域有定义并且连续）在 x_0 可微，而且我们有 $h'(x_0) = g'(y_0) \circ f'(x_0)$.

据假设，给定 ε 使得 $0 < \varepsilon < 1$，则存在 $r > 0$ 使得对于 $\|s\| \leqslant r$ 与 $\|t\| \leqslant r$，可以写出

$$f(x_0 + s) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot s + o_1(s),$$
$$g(y_0 + t) = g(y_0) + g'(y_0) \cdot t + o_2(t),$$

其中 $\|o_1(s)\| \leqslant \varepsilon\|s\|$，$\|o_2(t)\| \leqslant \varepsilon\|t\|$. 另一方面，由 (8.1.1) 与 (5.5.1)，存在常数 a, b 使得对于任意 s 与 t，

$$\|f'(x_0) \cdot s\| \leqslant a\|s\|, \ \|g'(y_0) \cdot t\| \leqslant b\|t\|.$$

于是对于 $\|s\| \leqslant r$，

$$\|f'(x_0) \cdot s + o_1(s)\| \leqslant (a + 1)\|s\|.$$

因此对于 $\|s\| \leqslant r/(a + 1)$ 有

$$\|o_2(f'(x_0) \cdot s + o_1(s))\| \leqslant (a + 1)\varepsilon\|s\|$$

以及

$$\|g'(y_0)\cdot o_1(s)\|\leqslant b\varepsilon\|s\|.$$

于是我们可以写出

$$h(x_0+s)=g(y_0+f'(x_0)\cdot s+o_1(s))=g(y_0)$$
$$+g'(y_0)\cdot(f'(x_0)\cdot s)+o_3(s),$$

其中

$$\|o_3(s)\|\leqslant(a+b+1)\varepsilon\|s\|.$$

这就证明了定理.

(8.2.1) 当然有许多应用,在这些应用中我们只提出下面一个:

(8.2.2) 设 f,g 是 E 的开子集 A 到 F 中的两个连续映射. 如果 f 与 g 在 x_0 是可微的,则 $f+g$ 与 αf (α 是数量) 也是可微的, 而且有 $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$, $(\alpha f)'(x_0)=\alpha f'(x_0)$.

映射 $f+g$ 是由 $F\times F$ 到 F 的映射 $(u,v)\to u+v$ 与 A 到 $F\times F$ 的映射 $x\to(f(x),g(x))$ 复合而成的; 据(8.1.3)与(8.1.5)这两个映射都可微, 于是结果(对于 $f+g$) 由 (8.2.1) 推得. 对于 αf 论证将更简单, 只要利用这一事实, 即 F 到它自身的映射 $u\to\alpha u$, 据(8.1.3),是可微的. 当然,(8.2.2)也能用直接论证的方法很简单地证明.

设 E, F 是两个 Banach 空间, A 是 E 的开子集, B 是 F 的开子集. 当 A 与 B 同胚, 并且存在 A 到 B 的一个可微同胚 f 时, 仍不能推出: 对于每个 $x_0\in A$, $f'(x_0)$ 是 E 到 F 上的线性同胚(例如考虑 $\boldsymbol{R}$ 到它自身的映射 $\xi\to\xi^3$).

(8.2.3) 设 f 是 Banach 空间 E 的开子集 A 到 Banach 空间 F 的开子集 B 上的一个同胚, g 是它的逆同胚. 假如 f 在点 x_0 可微, 且 $f'(x_0)$ 是 E 到 F 上的一个线性同胚;则 g 在 $y_0=f(x_0)$ 可微,而且 $g'(y_0)$ 是 $f'(x_0)$ 的逆映射(参见(10.2.5)).

据假设, 映射 $s\to f(x_0+s)-f(x_0)$ 是 E 中 0 的邻域 V 到 F 中 0 的邻域 W 上的一个同胚,它的逆同胚是 $t\to g(y_0+t)-g(y_0)$. 由假设, E 到 F 上的线性映射 $f'(x_0)$ 具有一个逆映射 u,它是连续的,于是由(5.5.1)可知存在常数 $c>0$ 使得对于任意 $t\in F$,

$\|u\cdot t\| \leqslant \|t\|$. 任意给定 ε，使 $0<\varepsilon\leqslant 1/2c$，如我们记 $f(x_0+s)-f(x_0)=f'(x_0)\cdot s+o_1(s)$，则存在 $r>0$，使关系 $\|s\|\leqslant r$ 蕴含 $\|o_1(s)\|\leqslant\varepsilon\|s\|$. 现在设 r' 是这样一个数，使得球 $\|t\|\leqslant r'$ 含在 W 中，并且它在映射 $t\to g(y_0+t)-g(y_0)$ 下的象含在球 $\|s\|\leqslant r$ 中. 设 $z=g(y_0+t)-g(y_0)$；据定义，对于 $\|t\|\leqslant r'$，这个方程蕴含 $t=f(x_0+z)-f(x_0)$，又由于 $\|z\|\leqslant r$，我们可以写出 $t=f'(x_0)\cdot z+o_1(z)$，其中 $\|o_1(z)\|\leqslant\varepsilon\|z\|$. 由此关系与 u 的定义推出

$$u\cdot t=u\cdot(f'(x_0)\cdot z)+u\cdot o_1(z)=z+u\cdot o_1(z),$$

而且 $\|u\cdot o_1(z)\|\leqslant c\|o_1(z)\|\leqslant c\ \varepsilon\|z\|\leqslant \dfrac{1}{2}\|z\|$，于是 $\|u\cdot t\|\geqslant\|z\|-\dfrac{1}{2}\|z\|=\dfrac{1}{2}\|z\|$. 因此，$\|z\|\leqslant 2\|u\cdot t\|\leqslant 2c\|t\|$，终于得出 $\|u\cdot o_1(z)\|\leqslant c\varepsilon\|z\|\leqslant 2c^2\varepsilon\|t\|$. 这样，我们证明了关系 $\|t\|\leqslant r'$ 蕴含 $\|g(y_0+t)-g(y_0)-u\cdot t\|\leqslant 2c^2\varepsilon\|t\|$，由于 ε 是任意的，这就完成了证明.

(8.2.3)的结果也可以写成(在同样的假设下)

(8.2.3.1)
$$(f^{-1})'(f(x_0))=(f'(x_0))^{-1}.$$

问　　题

1) 设 E 是一个实准 Hilbert 空间. 试证 E 到 $\boldsymbol{R}$ 中的映射 $x\longrightarrow\|x\|$ 在 E 中的每一点 $x\neq0$ 都是可微的，而且它在这种点的导数就是线性映射 $s\longrightarrow(s|x)/\|x\|$.

2) a) 在 Banach 空间 (c_0)(5.3 节，问题 5)，试证：为使范数 $x\longrightarrow\|x\|$ 在点 $x=(\xi_n)$ 可微，必须且只须存在附标 n_0 使得对每个 $n\neq n_0$ 都有 $|\xi_{n_0}|>|\xi_n|$. 算出此导数.

b) 在 Banach 空间 l^1 (5.7 节问题 1) 中，试证范数 $x\longrightarrow\|x\|$ 在任何点都是不可微的(利用(8.1.1)与 5.7 问题 1c)).

3) 设 f 是一个可微的实值函数，在 Banach 空间 E 的开子集 A 上定义.

a) 试证：如果在点 $x_0 \in A$，f 达到一个极大值（3.9 节，问题 6），则 $Df(x_0)=0$。

b) 假如 E 是有限维的，A 是相对紧的，f 在 $\bar{A}$ 上有定义且连续，而且在 A 的边界上等于 0. 证明存在一点 $x_0 \in A$，使得 $Df(x_0)=0$。（"罗尔定理"；利用 a) 与(3.17.10)）.

3. 连续线性函数空间中的导数

(8.3.1) 设 E，F，G 是三个 Banach 空间. 则 $\mathscr{L}(E;F)\times\mathscr{L}(F;G)$ 到 $\mathscr{L}(E;G)$ 中的映射 $(u,v)\to v\circ u$（也写为 vu）是可微的，并且在点 (u_0,v_0) 的导数是映射 $(s,t)\to v_0\circ s+t\circ u_0$.

如果我们注意，据(5.7.5)映射 $(u,v)\to v\circ u$ 是双线性与连续的，则结果是(8.1.4)的特殊情形.

(8.3.2) 设 E，F 是两个 Banach 空间，使得至少存在 E 到 F 上的一个线性同胚. 那么，这些线性同胚的集合 $\mathscr{H}$ 在 $\mathscr{L}(E;F)$ 中是开的；设 $\mathscr{H}^{-1}$ 是 F 到 E 上的线性同胚的集，则 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{H}^{-1}$ 上的映射 $u\to u^{-1}$ 是连续的与可微的，并且 $u\to u^{-1}$ 在点 u_0 的导数是（$\mathscr{L}(E;F)$ 到 $\mathscr{L}(E;F)$ 的）线性映射 $s\to -u_0^{-1}\circ s\circ u_0^{-1}$.

a) 我们首先考虑 $F=E$ 的情况，并且用 1_E 表示 E 上的恒同映射. 那么有

(8.3.2.1) 如果在 $\mathscr{L}(E;E)$ 中 $\|w\|<1$，则线性映射 1_E+w 是一个同胚，它的逆 $(1_E+w)^{-1}$ 等于绝对收敛级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n$ 的和，而且有

(8.3.2.2) $\|(1_E+w)^{-1}-1_E+w\|\leqslant\|w\|^2/(1-\|w\|)$.

我们有

$$\sum_{n=0}^{N}\|w\|^n=(1-\|w\|^{N+1})/(1-\|w\|)\leqslant 1/(1-\|w\|),$$

于是据(5.7.5)，(5.3.1)，(5.3.2) 与 (5.7.3)，在 $\mathscr{L}(E;E)$ 中级数

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n$ 是绝对收敛的. 此外,我们有

$$(1_E + w)(1_E - w + w^2 + \cdots + (-1)^N w^N)$$
$$= (1_E - w + w^2 + \cdots + (-1)^N w^N)(1_E + w)$$
$$= 1 - (-1)^N w^{N+1},$$

因为 w^{N+1} 随 $1/N$ 趋于 0, 所以由定义与 (5.7.5) 对于 $\mathscr{L}(E; E)$ 的元素 $N = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n$ 有 $(1_E + w)v = v(1_E + w) = 1$,这证明了前两个论断;不等式(8.3.2.2)可由关系式 $(1_E + w)^{-1} - 1_E + w = w^2(1_E - w + w^2 + \cdots)$ 以及(5.7.5)与(5.3.2)推得.

b) 现在考虑一般情形;假设 $s \in \mathscr{L}(E; F)$ 使得 $\|s\| \cdot \|u_0^{-1}\| < 1$; 则元素 $1_E + u_0^{-1}s \in \mathscr{L}(E; E)$ 有一个逆元素, 这是由 (5.7.5) 与(8.3.2.1)推知的; 因为我们可以写 $u_0 + s = u_0(1_E + u_0^{-1}s)$, 所以 $u_0 + s$ 也同样有逆元素,这个逆元素就是 $(1_E + u_0^{-1}s)^{-1}u_0^{-1}$; 于是我们有

$$(u_0 + s)^{-1} - u_0^{-1} = ((1_E + u_0^{-1}s)^{-1} - 1_E)u_0^{-1}.$$

对于 $\|s\| < 1/\|u_0^{-1}\|$, 把(8.3.2.2)应用于 $w = u_0^{-1}s$, 就得到

$$\|(u_0 + s)^{-1} - u_0^{-1} + u_0^{-1}su_0^{-1}\| \leqslant \|u_0^{-1}\|^3 \cdot \|s\|^2/(1 - \|u_0^{-1}\| \cdot \|s\|).$$

因此,如果取 $\|s\| \leqslant 1/2\|u_0^{-1}\|$, 就有

$$\|(u_0 + s)^{-1} - u_0^{-1} + u_0^{-1}su_0^{-1}\| \leqslant c\|s\|^2,$$

其中 $c = 2\|u_0^{-1}\|^3$, 这就完成了证明.

4. 单变量函数的导数

当我们把 E 限定为一维向量空间(可视为 $\boldsymbol{R}$ 或 $\boldsymbol{C}$)时, 我们知道 $\mathscr{L}(E; F)$ 自然可看成是 F 自身, 一个向量 $b \in F$ 可视为 E 到 F 的线性映射 $\xi \to b\xi$ (5.7.6). 如果 f 是开集 $A \subset E$ 到 F 的可微映射, 则它在点 $\xi \in A$ 的导数 $Df(\xi_0)$ 就可视为 F 的一个向量, 而映射 Df 就可视为 A 到 F 的一个映射. 如果 F 本身也是一维的(可视为 $\boldsymbol{R}$ 或 $\boldsymbol{C}$), 我们就得到了古典情形, 即(在一点的)导数是

一个数．上面所获得的那些一般结果，在这最后的情形下，就化为微积分的经典公式．例如，当 E 与 F 是一维时，(8.3.2)就简化为这样一个公式：对于 $\xi\neq 0$，$1/\xi$ 的导数等于 $-1/\xi^2$ 我们把(8.2.1)的结果明确地写在下面：

(8.4.1) 设 E，F 是两个实(相应地，复) Banach 空间，f 是 E 的开子集 A 到 F 的可微映射，g 是 $\boldsymbol{R}$(相应地，$\boldsymbol{C}$)的开子集 I 到 A 的可微映射，则 I 到 F 的复合映射 $h=f\circ g$ 在 $\xi\in I$ 的导数是 F 的向量，等于 $Df(g(\xi))\cdot g'(\xi)$(记住 $g'(\xi)$在 E 中，$Df(g(\xi))$ 是在 $\mathscr{L}(E;F)$中)．

附注． 设 F 是复 Banach 空间，f 是开子集 $A\subset\boldsymbol{C}$ 到 F 的一个可微映射；于是它在 $z\in A$ 的导数可视为 F 的一个向量又设 g 是 $\boldsymbol{R}$ 的开子集 I 到 A 中的一个可微映射(把 $\boldsymbol{C}$ 看成基础的二维实向量空间)；则 $f\circ g$ 是可微映射，它是 I 到 F 的基础的实 Banach 空间 F_0 中的，(8.4.1)给出它在点 $\xi\in I$ 的导数是 $g'(\xi)Df(g(\xi))$(记住，这里 $g'(\xi)$ 是一个复数)．

当 $E=\boldsymbol{R}$ 并且 F 是一实 Banach 空间时，导数概念可以大大推广：对于任意子集 $J\subset\boldsymbol{R}$ 与任意这样的点 $\xi_0\in J$，使 ξ_0 是 $J-\{\xi_0\}$ 的触点，以及对于 J 到 F 的任一映射 f，我们可以定义 f 在 ξ_0(关于J)的导数为下列极限(当它存在时)

$$\lim_{\xi\to\xi_0,\xi\in J-\{\xi_0\}}(f(\xi)-f(\xi_0))/(\xi-\xi_0).$$

当这个极限存在时，就说 **f 在 ξ_0 关于 J 是可微的**．我们将只考虑 J 是 $\boldsymbol{R}$ 的一个区间的情形．在 J 的内点处．f 对于 J 的导数(当它存在时)与普通导数一致；在 J 的始点 α(相应地，终点 β)，当它属于 J 时，f 关于 J 的导数也称为 f 在点 α(相应地，β)的**右导数**(**相应地，左导数**)，并且记为 $f'_d(\alpha)$ 或 $D_+f(\alpha)$(相应地，$f'_g(\beta)$ 或 $D_-f(\beta)$)．定理(8.4.1)当其中 I 是一个区间，并且 g 在 ξ 关于 I 有导数时，仍然成立；这时，如果 f 在 A 中可微，则 $f\circ g$ 在 ξ 关于 I 有导数，它由同一个公式给出($g'(\xi)$ 由 g 关于 I 的导数代替)．它的证明就是(8.2.1)的证明，但要作些明显的修正．我们略去

该定理的最通常的一些推论，例如与(8.2.2)相对应的那个结果.

问　题

1) a) 设 f 是区间 $I\subset \boldsymbol{R}$ 到 Banach 空间 E 中的连续映射. 为使 f 在 I 的内点 x_0 可微，必须且只须 $(f(x_0+h)-f(x_0-k))/(h+k)$，当点 (h,k) 在使 $h>0$, $k>0$ 的点偶的集中趋于$(0,0)$时，在 E 中有极限.

b) 实函数 f 在 $x\neq 0$ 时，等于 $x^2\sin(1/x)$，在 $x=0$ 时等于 0，它在 $\boldsymbol{R}$ 中是可微的，但是当 (x,y) 在使 $x>0$, $y>0$, $x\neq y$ 的点偶的集中趋于 $(0,0)$ 时，$(f(x)-f(y))/(x-y)$ 却没有极限.

c) 在区间 $I=[0,1]$ 中定义连续函数序列 f_n 如下：$f_0(t)=t$；对于每个 $n\geqslant 1$, f_n 在下列 3^n 个子区间的每一个中都具有 $\alpha t+\beta$ 的形式，这些子区间是 $\frac{k}{3^n}\leqslant t\leqslant\frac{k+1}{3^n}$，其中 $0\leqslant k\leqslant 3^n-1$；而且

$$f_n\left(\frac{k}{3^{n-1}}\right)=f_{n-1}\left(\frac{k}{3^{n-1}}\right), f_n\left(\frac{k}{3^{n-1}}+\frac{1}{3^n}\right)=f_{n-1}\left(\frac{k}{3^{n-1}}+\frac{2}{3^n}\right),$$

$$f_n\left(\frac{k}{3^{n-1}}+\frac{2}{3^n}\right)=f_{n-1}\left(\frac{k}{3^{n-1}}+\frac{1}{3^n}\right).$$

试证序列 (f_n) 在 I 中一致收敛于一个连续函数，而且这个连续函数在 I 的任何一点都没有导数(利用 a)).

2) 设 f 是开区间 $I\subset\boldsymbol{R}$ 到 Banach 空间 E 中的一个连续映射，它在每一点 $t\in I$ 都既有左导数 $f'_g(t)$ 又有右导数 $f'_d(t)$.

a) 设 U 是 E 的非空开子集，A 是使 $f'_d(t)\in U$ 的点 $t\in I$ 的集合. 对于任意 $\alpha>0$，设 B_α 是由这样的点 t 组成的 I 的子集，即至少存在一点 $s\in I$ 使得 $t-\alpha\leqslant s<t$ 并且 $(f(t)-f(s))/(t-s)\in U$；证明 B_α 是开的，并且 $A\cap CB_\alpha$ 是可数的(利用 3.9 节问题3). 由此结果得到：使得 $f'_g(t)\notin\bar{U}$ 的点 $t\in A$ 的集是至多可数的.

b) 由 a) 推证：使 $f'_g(t)\neq f'_d(t)$ 的点 $t\in I$ 的集是至多可数的. (首先注意：$f(I)$ 是紧距离空间的可数的并集，再通过对 $f(I)$ 生成的 E 的闭向量子空间的考虑，把此问题化为下述情形：即 E 的拓扑有一个可数的开集的基 (U_n)；然后注意：对于 E 的每一对不同点 a, b，都存在一对这样的集合 U_p, U_q，使得 $a\in U_p$, $b\in U_q$，而且 $U_p\cap U_q=\phi$.)

3) a) 设 f 在 $\boldsymbol{R}^2$ 上由下列条件定义：对于 $x=(\xi_1,\xi_2)\neq(0,0)$

$$f(x)=\frac{\xi_1\xi_2^2}{\xi_1^2+\xi_2^2},\ f(0)=0.$$

试证：对于任意 $x\in R^2$ 与任意 $y\in R^2$，极限 $\lim_{t\to 0, t\neq 0}(f(x+ty)-f(x)/t)=g(x,y)$存在，但映射 $y\to g(0,y)$ 不是线性的(于是 f 在点 0 是不可微的).

b) 设 f 在 R^2 上由下列条件定义：

$$f(x)=\frac{\xi_1^3\xi_2}{\xi_1^4+\xi_2^2},\text{对于 } x=(\xi_1\xi_2)\neq(0,0),\ f(0)=0.$$

试证：对于每个 x 与 y 极限 $g(x,y)$ 存在，并且映射 $y\to g(x,y)$ 对每个 $x\in R^2$ 都是线性的，但 f 在点0是不可微的.

4) a) 设 f 是 Banach 空间 E 的开子集 A 到 Banach 空间 F 的连续映射. 我们说在 $x_0\in A$ 函数 f 是**拟可微的**，如果存在 E 到 F 的一个线性映射 u，具有下述性质：对于 $I=[0,1]$ 到 A 中的任意连续映射 g，只要 $g(0)=x_0$ 并且 g 在 0 (对于 I) 的导数 $g'(0)$ 存在，则 $t\to f(g(t))$ 在点 $t=0$ (对于 I) 有导数等于 $u(g'(0))$. 这时线性映射 u 称为 f 在 x_0 的**拟导数**. 试证：如果 f 在 x_0 是拟可微的，则它的拟导数是唯一的. 把性质 (8.2.1) 推广到拟可微映射.

b) 试证：如果 f 在 x_0 是拟可微的，则它的拟导数 u 是 E 到 F 的连续线性映射. (假设 $x_0=0$，$f(x_0)=0$，这是可以办到的. 利用反证法：如果 u 在球 $B(0;1)$ 中无界，则存在 E 中这样一个向量序列 (a_n)：$\|a_n\|=1$ 与这样一个正数的数列 (t_n)：$\lim_{n\to\infty} t_n=0$ 使得 $\|t_n^{-1}f(t_na_n)\|=\alpha_n$ 趋于 $+\infty$；我们可以假设序列 (t_n) 与 $(\sqrt{\alpha_n}t_n)$ 是递减趋于 0 的. 定义$[0,1]$到 E 的连续映射 g 使得 $g(0)=0$，$g'(0)$存在且等于 0，而且 $g(\sqrt{\alpha_n}t_n)=t_n\alpha_n$).

5) a) 设 E，F 是两个 Banach 空间，f 是 E 的开子集 A 到 F 中的连续映射. 试证：如果 f 在 $x_0\in A$ 可微，则它在 x_0 是拟可微的，并且它的拟导数就等于它的导数.

b) 假设 E 是有限维的. 试证：如果 f 在 $x_0\in A$ 是拟可微的，则 f 在 x_0 也是可微的. (用反证法：设 u 是 f 在 $x_0\in A$ 的拟导数，假设存在 $\alpha>0$ 与 A 中趋于 x_0 的点列 (x_n) 使得 $\|f(x_n)-f(x_0)-u\cdot(x_n-x_0)\|\geq\alpha\|x_n-x_0\|$. 利用 E 的局部紧性证明：我们可以假设序列 $(\|x_n-x_0\|)$ 是递减的，而且向量 $z_n=(x_n-x_0)/\|x_n-x_0\|$ 的序列在 E 中趋于一个极限；然后定义 $[0,1]$ 到 E 中的一个连续映射 g，使得 $g(0)=x_0$，$g'(0)$ 存在，但是

$u(g'(0))$ 不是映射 $t\to f(g(t))$ 在 $t=0$ 的导数.)

6) a) 设 $I=[0,1]$, 并设 E 是 Banach 空间 $\mathscr{C}_{\boldsymbol{R}}(I)$. 为使 E 到 $\boldsymbol{R}$ 的映射 $x\to\|x\|$ 在点 x_0 是拟可微的, 必须且只须函数 $t\to|x_0(t)|$ 在唯一的点 $t_0\in I$ 达到它在 I 上的最大值; 这时 $x\to\|x\|$ 在 x_0 的拟导数是这样一个线性映射 u, 使得, 当 $x_0(t_0)>0$ 时 $u(z)=z(t_0)$, 当 $x_0(t_0)<0$ 时, $u(z)=-z(t_0)$(参看 8.2 节问题 3).(为了证明条件是必要的,假设 $|x_0|$ 至少在两个不同的点 t_0, t_1 达到它的最大值; 设 y 是 I 到自身的一个连续映射, 它在 t_0 处等于 1 在 t_1 处等于 0; 当实数 $\lambda\neq0$ 趋于 0 时考察 $(\|x_0+\lambda y\|-\|x_0\|)/\lambda$ 的变化.为了证明条件是充分的,假设 $\lambda\to z_\lambda$ 是 I 到 E 中的连续映射,在 $\lambda=0$ 处有导数 $a\in E$, 并且 $z_0=0$; 注意,如果 t_λ 是 I 上使 $t\to|x_0(t)+z_\lambda(t)|$ 达到最大值的最大数(或最小数),则当 λ 趋于 0 时, $t_\lambda\to t_0$.)

b) 由此结果导出, E 到 $\boldsymbol{R}$ 的映射 $x\to\|x\|$ 在任一点是不可微的. (参看 8.2 问题 2).)

7) 设 f 是 Banach 空间 E 的开子集 A 到 Banach 空间 F 中的一个连续映射. 假设 f 在 A 中满足 Lipschitz 条件,即(参见(10.5.4))存在常数 $k>0$ 使对于 A 中任意点对 x_1, x_2 都有 $\|f(x_1)-f(x_2)\|\leqslant k\|x_1-x_2\|$. 设 $x_0\in A$, 并且假设存在 E 到 F 的线性映射 u, 使对 E 中任意向量 $a\neq0$, $(f(x_0+at)-f(x_0))/t$ 当 $t\neq0$ 在 $\boldsymbol{R}$ 中趋于 0 时的极限存在并且等于 $u(a)$. 试证 f 在 x_0 是拟可微的. 如果 f 不满足 Lipschitz 条件,则这个性质就不再成立.

8) a) 设 a, b 是 Banach 空间 E 中的两个点. 试证: $\boldsymbol{R}$ 到它自身的映射 $t\to\|a+tb\|$ 对于每一个 $t\in\boldsymbol{R}$ 都有右导数与左导数(证明: 如果 $0<t<s$, 则 $(\|a+bt\|-\|a\|)/t\leqslant(\|a+bs\|-\|a\|)/s$, 并应用(4.2.1)).

b) 设 u 是区间 $I\in\boldsymbol{R}$ 到 E 中的连续映射. 试证: 如果在点 $t_0\in I$, u 有右导数,则 $t\to\|u(t)\|$ 在 t_0 也有右导数,并且

$$(D_+\|u\|)(t_0)\leqslant\|D_+u(t_0)\|$$

(应用 a)).

c) 设 U 是 I 到 $\mathscr{L}(E;E)$ 的连续映射. 试证: 如果在点 $t_0\in I$, U 有右导数, 并且 $U(t_0)$ 是 E 到自身的一个线性同胚, 则映射 $t\to\|(U(t))^{-1}\|=f(t)$, 它在 t_0 的某邻域中有定义,在 t_0 有右导数而且

$$|(D_+(f^{-1}))(t_0)|\leqslant\|D_+U(t_0)\|.$$

5. 中值定理

(8.5.1) 设 $I=[\alpha,\beta]$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的一个紧区间，f 是 I 到 Banach 空间 F 的一个连续映射，φ 是 I 到 $\boldsymbol{R}$ 的一个连续映射．假设存在一个 I 的可数子集 D 使得对每个 $\xi\in I-D$，f 与 φ 在 ξ 对于 I 都有导数，并且 $\|f'(\xi)\|\leqslant\varphi'(\xi)$．则 $\|f(\beta)-f(\alpha)\|\leqslant\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)$．

设 $n\to\rho_n$ 是 $\boldsymbol{N}$ 到 D 上的双映射；对任意 $\varepsilon>0$．我们将证明：$\|f(\beta)-f(\alpha)\|\leqslant\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)+\varepsilon(\beta-\alpha+1)$；由于左边与 ε 无关，便将完成证明．定义 A 是由下面这样的点 ξ 组成的 I 的子集，即对于 $\alpha\leqslant\zeta<\xi$，有 $\|f(\zeta)-f(\alpha)\|\leqslant\varphi(\zeta)-\varphi(\alpha)+\varepsilon(\zeta-\alpha)+\varepsilon\sum_{\rho_n<\zeta}2^{-n}$．显然 $\alpha\in A$．如果 $\xi\in A$ 且 $\alpha<\eta<\xi$，则据定义也有 $\eta\in A$．这证明了，如果 γ 是 A 的上确界，则 A 必定或者是区间 $[\alpha,\gamma[$ 或者是区间 $[\alpha,\gamma]$． 但是事实上由 A 的定义立即推知 $A=[\alpha,\gamma]$．此外，由 f 与 φ 的连续性推得

(8.5.1.1) $$\|f(\gamma)-f(\alpha)\|\leqslant\varphi(\gamma)-\varphi(\alpha)+\varepsilon(\gamma-\alpha)+\varepsilon\sum_{\rho_n<\gamma}2^{-n}.$$

因此我们只须证明 $\gamma=\beta$．假设 $\gamma<\beta$；如果 $\gamma\notin D$，则由导数的定义推知，存在区间 $[\gamma,\gamma+\lambda]$ 含于 I 中使对于 $\gamma\leqslant\zeta<\gamma+\lambda$ 有

$$\|f(\zeta)-f(\gamma)-f'(\gamma)(\zeta-\gamma)\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}(\zeta-\gamma)$$

与

$$|\varphi(\zeta)-\varphi(\gamma)-\varphi'(\gamma)(\zeta-\gamma)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}(\zeta-\gamma).$$

于是有

$$\begin{aligned}\|f(\zeta)-f(\gamma)\|&\leqslant\|f'(\gamma)\|(\zeta-\gamma)+\frac{\varepsilon}{2}(\zeta-\gamma)\\&\leqslant\varphi'(\gamma)(\zeta-\gamma)+\frac{\varepsilon}{2}(\zeta-\gamma)\end{aligned}$$

$$\leqslant \varphi(\zeta) - \varphi(\gamma) + \varepsilon(\zeta - \gamma).$$

由(8.5.1.1)推得

$$\|f(\zeta) - f(\alpha)\| \leqslant \varphi(\zeta) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(\zeta - \alpha) + \varepsilon \sum_{\rho_n < \gamma} 2^{-n}$$

$$\leqslant \varphi(\zeta) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(\zeta - \alpha) + \varepsilon \sum_{\rho_n < \zeta} 2^{-n}.$$

这与γ的定义矛盾. 如果$\gamma \in D$, 设$\gamma = \rho_m$; 由f与φ的连续性推知存在含于I中的区间$[\gamma, \gamma + \lambda]$使对于$\gamma \leqslant \zeta < \gamma + \lambda$, 有

$$\|f(\zeta) - f(\gamma)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} 2^{-m}, \quad |\varphi(\zeta) - \varphi(\gamma)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} 2^{-m}.$$

于是,由(8.5.1.1)又推出

$$\|f(\zeta) - f(\alpha)\| \leqslant \varphi(\zeta) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(\gamma - \alpha) + \varepsilon \sum_{\rho_n < \zeta} 2^{-n}$$

$$\leqslant \varphi(\zeta) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(\zeta - \alpha) + \varepsilon \sum_{\rho_n < \zeta} 2^{-n}.$$

我们又得出了矛盾,这就完成了证明.

最重要的情形是当 $\varphi(\xi) = M(\xi - \alpha)$ 而 $M > 0$ 时,

(8.5.2) 如果存在I的一个可数子集D, 使对于每个$\xi \in I - D$, 在ξ对于I都有导数, 而且使 $\|f'(\xi)\| \leqslant M$, 则有 $\|f(\beta) - f(\alpha)\| \leqslant M(\beta - \alpha)$.

对于实值函数, 仿照(8.5.1)中的论证可以证明下面(8.5.3)的第一部分:

(8.5.3) 假设φ是I到$\boldsymbol{R}$的连续映射使在每个点 $\xi \in I - D$, φ对于I都有导数, 并且 $m \leqslant \varphi'(\xi) \leqslant M$, 则 $m(\beta - \alpha) \leqslant \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) \leqslant M(\beta - \alpha)$; 而且事实上,除了当 $\varphi(\xi) = \varphi(\alpha) + m(\xi - \alpha)$ 或者 $\varphi(\xi) = \varphi(\alpha) + M(\xi - \alpha)$ 时以外,其中 $\xi \in I$, 有

$$m(\beta - \alpha) < \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) < M(\beta - \alpha).$$

要证明第二部分, 注意据第一部分, 函数 $\varphi(\xi) - \varphi(\alpha) - m(\xi - \alpha)$ 在I中是递增的;如果它不恒等于0, 则

$$\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)-m(\xi-\alpha)>0.$$

类似的论证可得另一个不等式.

在赋范空间 E 中，我们把连结两点 a, b 的**线段**定义为点 $a+\xi(b-a)$ 的集，其中 $0\leqslant\xi\leqslant 1$.

(8.5.4) 设 E, F 是两个 Banach 空间，S 是连结 E 中两点 x_0，x_0+t 的线段，f 是 S 的一个邻域到 F 中的连续映射．如果 f 在 S 的每一点都是可微的，则

$$\|f(x_0+t)-f(x_0)\|\leqslant\|t\|\cdot\sup_{0\leqslant\xi\leqslant 1}\|f'(x_0+\xi t)\|.$$

考虑区间 $I=[0, 1]$ 到 F 中的映射 g，它由 $g(\xi)=f(x_0+\xi t)$ 定义；据(8.4.1)，(8.2.2) 与 (8.1.3)，g 在 I 的每一点(对于 I) 都是可微的，而且它的导数是 $f'(x_0+\xi t)\cdot t$；于是结果由 (8.5.2) 与 (5.7.4)得到。

问　　题

1) a) 设 $I=]a, b[$ 是 $\mathbf{R}$ 中的开区间，f 是在 I 上定义的实连续函数．假设存在 I 的一个可数子集 D 使对每个 $t\in I-D$，f 在点 t 的右侧都是递增的，这就是说，存在区间 $[t, t+h]$ $(h>0)$ 使得对于 $t\leqslant t'\leqslant t+h$，有 $f(t)\leqslant f(t')$．试证 f 在 I 中是递增的 (利用(8.5.1) 中的那一论证)．当 f 在每个 $t\in I$ 仅是左连续(即 $f(t-)=f(t)$ 时)但 $D=\varphi$ 时结论同样成立.

b) 对于每个数 $t\in J=[0, 1[$，设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n/2^n$ 是 t 的满足下述条件的唯一的“二进”展开式，即 a_n 或为 0 或为 1，并且不存在附标 m，使对所有的 $n\geqslant m$ 都有 $a_n=1$ (参见 4.2 节问题 2)．设 $f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n/4^n$．试证：$f$ 在每一点 $t\in J$ 都是右连续的(即 $f(t+)=f(t)$)，它在 J 的任意一个多于一点的子区间中不为常数，而且它在每一点 $t\in J$ 都有等于0的右导数 (参见 12.16，问题 27).

2) 试证(8.5.1)的结论仍然正确，如果只假设 f 与 φ 在 $I-D$ 的每一点 ξ (β 除外)都有右导数，而且 $\|f'_d(\xi)\|\leqslant\varphi'_d(\xi)$.

3) 设 f 是在紧区间 $[\alpha, \beta]$ 上定义的实连续函数，且在 $]\alpha, \beta[$ 的每一点都有右导数．又设 m 与 M 是 f'_d 在 $]\alpha, \beta[$ 中的下确界与上确界.

a) 试证：如果 f 不是映射 $t\to\lambda t+\mu$，则当 x 与 y 是 $[\alpha,\beta]$ 中使 $x\neq y$ 的任意数时，所有数 $(f(x)-f(y))/(x-y)$ 的集恒等于 $]m,M[$.（通过减去一个适当的 $t\to\lambda t+\mu$ 型的函数，把问题化为证明：如果 $f'_d(\gamma)f'_d(\delta)<0$ 其中 $\alpha<\gamma<\delta<\beta$，则在区间 $]\gamma,\delta[$ 中存在两个不同的点，使 f 取相同的值.）

b) 试证：如果还假设 f 在 $]\alpha,\beta[$ 的每一点有左导数，则 f'_d 与 f'_g 在 $]\alpha,\beta[$ 中的下确界（相应地，上确界）是相同的.

c) 由 b) 推证：如果 f 在 $]\alpha,\beta[$ 的每一点都有导数，则含于 $]\alpha,\beta[$ 中的任一区间在 f' 下的象是连通的（见(3.19.1)）.

4) 在 $\boldsymbol{R}$ 的区间 $I=[-1,+1]$ 中，设 f 是 I 到 $\boldsymbol{R}^2$ 的映射，它的定义如下：$f(t)=(0,0)$，当 $-1\leqslant t\leqslant 0$ 时；$f(t)=\left(t^2\sin\frac{1}{t},\ t^2\cos\frac{1}{t}\right)$，当 $0<t\leqslant 1$ 时. 试证：在 $]-1,+1[$ 的每一点 f 都有导数，但是这个区间在 f' 下的象是不连通的.

5) 把(8.5.4)推广到只假设 f 在 S 的每一点拟可微(8.4 节问题 4)，并用 f' 表示拟导数.

6) 假设 F 是实 Hilbert 空间. 利用下面的方法推证(8.5.1)，即把对于实函数 g 的同一定理应用到实值函数 $\xi\to(f(\xi)|a)$ 上，其中 $a\in F$.（这个方法实际上可以应用到任意 Banach 空间，甚至可应用到更一般类型的拓扑向量空间，见参考文献 [6]）.

7) 设 $I=[a,b]$ 是 $\boldsymbol{R}$ 中不退缩为一点的紧区间，f 是 I 到 Banach 空间 E 中的连续映射. 假设在 $I-D$ 的每个点上，右导数 f'_d 存在，这里 D 是包含 b 的 I 的至多可数子集. 试证存在一点 $\xi\in I-D$，使 $\|f(b)-f(a)\|\leqslant\|f'_d(\xi)\|(b-a)$.（可以假设 $k=\|f(b)-f(a)\|/(b-a)$ 不为 0. 用反证法，设 $\|f'_d(t)\|<k$ 对每个 $t\in I-D$ 都成立，则应存在点 $x_0\in I-D$ 与 $h>0$，使 $\|f(x_0+h)-f(x_0)\|<kh$；应用问题 2 于每个区间 $[a,x_0]$ 与 $[x_0+h,b]$ 而得出矛盾.）

8) $\boldsymbol{R}$ 上的实向量空间 E 的子集 A 称为凸的，若对 A 中的任意点对 x,y，以 x,y 为端点的闭线段（对 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$，所有点 $\lambda x+(1-\lambda)y$ 的集）含于 A 中. 为使 A 是凸的，其充要条件为 A 与下述线段的交将是 $\boldsymbol{R}$ 中的区间在 φ 之下的象；此线段是 $\boldsymbol{R}$ 在仿射映射 φ：$\xi\to a\xi+b$（这里 $a\neq 0$，b 是 E 中的向量）之下的象.

凸集 $A\subset E$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的映射 f 称为凸的，若在向量空间 $E\times\boldsymbol{R}$ 中，所有满

足 $x\in A$, $\zeta\geqslant f(x)$ 的点对 (x, ζ) 所成的集 D_f 是凸的. 这等价于下述说法: 对 A 中任一点对 x, y 与每个满足 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ 的数 λ, 有

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y).$$

为使 f 在 A 中是凸的, 其充要条件为: 对 R 到 E 的满足 $\varphi(R)\cap A\neq\phi$ 的任一仿射映射 φ: $\xi\to a\xi+b(a\neq 0)$, 映射 $f\circ\varphi$ 在区间 $\varphi^{-1}(A)\subset R$ 中是凸的.

设 $I\subset R$ 是一区间, f 是定义在 I 上的实函数. 为使 f 在 I 上是凸的,其充要条件为: 对每个 $a\in I$, 函数 $t\to(f(t)-f(a))/(t-a)$ 在 $I\cap C\{a\}$ 中是递增的. 由此结果得出,在 I 的每个内点上, f 是连续的,且有左导数与右导数. 此外,若 $a<b$ 是 I 的两个内点,则有

$$f'_d(a)\leqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leqslant f'_g(b).$$

反之,若 I 是一开区间, f 在 I 中连续,且在每个点有右导数,而 f'_d 在 I 中递增,则 f 在 I 中是凸的 (利用反证法与问题 2). 若 A 是实向量空间 E 中的凸集, A 到 R 的映射 f 称为严格凸的,若对 A 中每两不同点 x, y 的对与每个满足 $0<\lambda<1$ 的数 λ, 有 $f(\lambda x+(1-\lambda)y)<\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$. 若 $A=I$ 是 R 中的开区间, 为使 f 在 I 中是严格凸的, 其充要条件为: f'_d 在 I 中是严格递增的.

6. 中值定理的应用

(8.6.1) 设 A 是 Banach 空间 E 的开连通子集, f 是 A 到 Banach 空间 F 的连续映射;如果 f 在 A 的每一点都有等于 0 的导数,则 f 是一个常数.

设 x_0 是 A 的一点, B 是这样的点 $x\in A$ 的集合, 使得 $f(x)=f(x_0)$. B 对于 A 是闭的(3.15.1); 另一方面, 若 $x\in B$ 且 U 是含在 A 中的一个以 x 为中心的开球, 则 U 包含连接 x 与球的任意点 y 的线段, 于是由(8.5.4)得出 $f(y)=f(x)=f(x_0)$. 这就证明 B 对于 A 也是开的,于是由假设得出 $B=A$(3.19).

利用 (8.5.2) 可得出较好的结果. 例如, 当 $E=\mathbf{R}$ 且 A 是 R 的区间时, 只要假设 f 的导数除去一可数集以外存在并且为 0 .

(8.6.2) 设 E, F 是两个 Banach 空间, A 是连接 E 中 a, b 两点

的线段 S 的开邻域，f 是 A 到 F 的可微映射，那么对于每个 $x_0\in A$ 都有

$$\|f(b)-f(a)-f'(x_0)(b-a)\|$$
$$\leqslant \|b-a\|\cdot \sup_{x\in S}\|f'(x)-f'(x_0)\|.$$

把(8.5.4)应用到映射

$$x\to f(x)-f'(x_0)\cdot x,$$

据(8.2.2)与(8.1.3)这个映射的导数是 $t\to(f'(x)-f'(x_0))\cdot t$.

(8.6.3) 设 A 是 Banach 空间 E 中的开连通子集，(f_n) 是 A 到 Banach 空间 F 的可微映射的序列．假设：1° 存在一点 $x_0\in A$ 使得序列 $(f_n(x_0))$ 在 F 中收敛；2° 对每一点 $a\in A$，存在一个含于 A 中的以 a 为中心的球 $B(a)$，使得在 $B(a)$ 中序列 (f'_n) 一致收敛．则对每个点 $a\in A$，序列 (f_n) 在 $B(a)$ 中一致收敛；而且如果对每个 $x\in A$，设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$，$g(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f'_n(x)$，则对每个 $x\in A$ 都有 $g(x)=f'(x)$.

设 r 是 $B(a)$ 的半径；则据(8.5.4)，对任意点 $x\in B(a)$，我们有

(8.6.3.1) $$\|f_n(x)-f_m(x)-(f_n(a)-f_m(a))\|\leqslant\|x-a\|$$
$$\cdot\sup_{z\in B(a)}\|f'_n(z)-f'_m(z)\|\leqslant r\cdot\sup_{z\in B(a)}\|f'_n(z)-f'_m(z)\|.$$

由于序列 (f'_n) 在 $B(a)$ 中一致收敛以及 F 是完备的，这就证明了：如果序列 $(f_n(x))$ 在 $B(a)$ 的任意一点收敛，它也就在 $B(a)$ 的每一点收敛，而且实际上是在 $B(a)$ 中一致收敛．这个结果首先证明了，使序列 $(f_n(x))$ 收敛的点 x 的集 U 在 A 中是既开又闭的；因为据假设它是不空的，且 A 是连通的，所以 $U=A$．最后我们来证明 g 是 f 的导数：任给 $\varepsilon>0$，据假设存在整数 n_0 使得当 $n\geqslant n_0$, $m\geqslant n_0$ 时，$\|f'_n(z)-f'_m(z)\|\leqslant\varepsilon/r$ 对每个 $z\in B(a)$ 都成立，而且有 $\|g(a)-f'_n(a)\|\leqslant\varepsilon$，在(8.6.3.1)中令 m 趋于 $+\infty$，我们看到：对于 $n\geqslant n_0$ 与 $x\in B(a)$，有

$$\|f(x)-f(a)-(f_n(x)-f_n(a))\|\leqslant\varepsilon\|x-a\|.$$

另一方面，对于任意 $n\geqslant n_0$，存在 $r'\leqslant r$ 使得对 $\|x-a\|\leqslant r'$，有 $\|f_n(x)-f_n(a)-f'_n(a)\cdot(x-a)\|\leqslant\varepsilon\|x-a\|$；利用(5.7.4)，我们得到对于 $\|x-a\|\leqslant r'$，有

$$\|f(x)-f(a)-g(a)\cdot(x-a)\|\leqslant 3\varepsilon\|x-a\|.$$

这就证明了 $f'(a)$ 存在并且等于 $g(a)$，证完.

又当 $E=\boldsymbol{R}$ 且 A 是 $\boldsymbol{R}$ 的区间时，可以叙述一些较好的结果：

(8.6.4) 设 (g_n) 是区间 $I\subset\boldsymbol{R}$ 到 F 中的映射序列，假设对每个 n，除了一个可数子集 $D_n\subset I$ 的点 ξ 以外，$g_n(\xi)$ 是连续函数 f_n 的导数. 此外又设 1° 存在一点 $\xi_0\in I$ 使得序列 $(f_n(\xi_0))$ 在 F 中收敛；2° 对每个点 $\zeta\in I$，存在 I 的一邻域 $B(\zeta)$ 使得在 $B(\zeta)$ 中序列 (g_n) 一致收敛. 则对每个 $\zeta\in I$，序列 (f_n) 在 $B(\zeta)$ 中一致收敛；如果我们令 $f(\xi)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(\xi)$，$g(\xi)=\lim\limits_{n\to\infty}g_n(\xi)$，则对 $I-\bigcup\limits_n D_n$ 的每一点，都有 $f'(\xi)=g(\xi)$. 这个证明与(8.6.3)一样，只是要用(8.5.2)代替(8.5.4).

特别地由(8.6.3)得出

(8.6.5) 设 A 是 Banach 空间中的一个开连通子集，(u_n) 是 A 到 Banach 空间 F 中的可微映射的序列. 如果对每个 $a\in A$，都存在以 a 为中心含于 A 中的球 $B(a)$，使得级数 (u'_n) 在 $B(a)$ 中一致收敛，又若存在一个点 $x_0\in A$ 使得级数 $(u_n(x_0))$ 收敛，则对每个 $a\in A$，级数 (u_n) 在 $B(a)$ 中一致收敛，而且在每个 $x\in A$，这个级数的和 $s(x)$ 都有导数，等于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u'_n(x)$.

问　　题

1) 设 f, g 是在开区间 $I\subset\boldsymbol{R}$ 上定义的两个实值可微函数. 假设在 I 上，$f(t)>0$，$g(t)>0$，$f'(t)>0$ 与 $g'(t)>0$. 试证如果函数 f'/g' 在 I 中严格递增，则或者 f/g 在 I 中严格递增，或者存在 $c\in I$ 使得 f/g 对于 $t\leqslant c$ 严格递减而对于 $t\geqslant c$ 严格递增. （证明：如果 $f'(s)/g'(s)<f(s)/g(s)$，则

对任意 $t<s$，都有 $f'(t)/g'(t)<f(t)/g(t)$）．将它应用到区间 $]a, \frac{\pi}{2}[$ 中的函数：$\dfrac{\dfrac{\operatorname{tg} t}{t}-\dfrac{\operatorname{tg} a}{a}}{t\operatorname{tg} t-a\operatorname{tg} a}$）.

2）a）设 I 是 $\boldsymbol{R}$ 中的一个开区间，$x_0\in\boldsymbol{R}$ 是它的一个端点，f 是 I 到 Banach 空间 E 中的一个连续映射．假设存在 I 的一个可数子集 D 使得在 $I-D$ 的每一点，f 都有右导数．要 $f'_d(t)$ 当 t 在 $I-D$ 中趋于 x_0 时有极限，其充要条件为：当偶 (s,t) 在由 $s\in I$，$t\in I$ 以及 $s\neq t$ 所定义的集合中趋于 (x_0, x_0) 时，$(f(t)-f(s))/(t-s)$ 有极限．这时两个极限是相等的；如果 c 是他们的共同值，试证：当 t 在 I 中趋于 x_0 时，$f(t)$ 在 E 中有极限，而且如果 f 可连续延拓到 $I\cup\{x_0\}$(3.15.5)，则当 t 在 I 中趋于 x_0 时，$(f(t)-f(x_0))/(t-x_0)$ 趋于 c．（利用中值定理与 Cauchy 准则.）

b）试证：在 f'_d 左连续的每一点 $t\in I-D$，f 都有左导数．如果在点 $t\in I-D$，f'_d 是连续的，则 f 在这点 t 有导数．（应用 a）．）

3）设 f 是 E 的开子集 A 到 F 的一个可微映射（E，F 都是 Banach 空间）.

a）为使 f' 在 x_0 连续，充要条件是：对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得关系 $\|s\|\leqslant\delta$，$\|t\|\leqslant\delta$ 蕴含 $\|f(x_0+s)-f(x_0+t)-f'(x_0)\cdot(s-t)\|\leqslant \varepsilon\|s-t\|$.

b）为使 f' 在 A 中是一致连续的，充要条件为：对任意 $\varepsilon>0$ 存在 $\delta>0$，使得关系 $\|s\|\leqslant\delta$，$\|t\|\leqslant\delta$，$x\in A$ 与 $x+s\in A$，$x+t\in A$ 蕴含 $\|f(x+s)-f(x+t)-f'(x)\cdot(s-t)\|\leqslant\varepsilon\|s-t\|$.

4）设 f 是紧区间 $I\subset\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的连续映射，并且在 I 中有连续导数．设 S 是那些使 $f'(t)=0$ 的点 t 的集．试证：对任意 $\varepsilon>0$，存在一个正数的序列 (r_n) 使得 $\sum_{n=0}^{\infty} r_n\leqslant\varepsilon$ 而且集 $f(S)$ 含在满足 $\delta(J_n)\leqslant r_n$ 的区间 J_n 的可数并集中．（对任意 $\alpha>0$，考虑 I 的开子集 U_α，它由 $|f'(t)|<\alpha$ 的点 t 组成．并利用(3.19.6)与中值定理.）

5）设 f 是区间 $I\subset\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{C}$ 中这样的连续映射；在 I 中 $f(t)\neq 0$ 而且 $f'_d(t)$ 在 I 的可数子集 D 的补集中存在．为使 $|f|$ 在 I 中是增函数，试证其充要条件是：在 $I-D$ 中 $\mathscr{R}(f'_d(t)/f(t))\geqslant 0$.

6）设 E，F 是两个 Banach 空间，A 是 E 的开子集，B 是子空间 A 中的闭

子集，B 的内部是空的，而且 E 中任意一条不含于 B 的线段与 B 的交是至多可数的．设 f 是 A 到 F 的连续映射，且在 $A-B$ 中连续可微，假设在每一点 $b\in B$，$f'(x)$ 对于 $A-B$ 的极限存在．试证：f 在 A 中是连续可微的．

7）设 f 为 Banach 空间 E 的开子集到 Banach 空间 F 的连续映射．

a）我们说 f 在点 $x_0\in A$ 是**强可微的**，如果 f 在这点上是可微的并且对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得关系式 $\|s\|\leqslant\delta$，$\|t\|\leqslant\delta$ 蕴涵

$$\|f(x_0+s)-f(x_0+t)-f'(x_0)\cdot(s-t)\|\leqslant\varepsilon\|s-t\|$$

（见问题 3a)）．试给出例子，有 $E=F=\boldsymbol{R}$，其中 f 在 x_0 是强可微的，但对 x_0 的任何邻域 V，存在 V 的点，使在这些点上，f 不可微．（能够证明：这些点构成零测集．）

b）设 g 是 F 的开子集 B 到 Banach 空间 G 的连续映射．证明：如果 $f(x_0)\in B$，g 在点 $f(x_0)$ 是强可微的且 f 在点 x_0 是强可微的，那么 $g\circ f$ 在点 x_0 是强可微的．

7. 原函数与积分

设 f 是区间 $I\subset\boldsymbol{R}$ 到 Banach 空间 F 中的一个映射．我们称 I 到 F 的一个连续映射 g 是 f 在 I 中的**原函数**，如果存在一可数集 $D\subset I$ 使得对任意 $\xi\in I-D$，g 在 ξ 都是可微的，且 $g'(\xi)=f(\xi)$．

(8.7.1) 如果 g_1，g_2 是 f 在 I 中的两个原函数，则 g_1-g_2 在 I 中是常数．

这立即可由(8.6.1)后的附注推出．

$\boldsymbol{R}$ 中任意区间 I（它不化为一点）都是递增的紧区间序列 J_n 的并集；要检验在 I 上定义的函数 f 有原函数，只要对 f 在每个 J_n 上的限制这样做就够了．理由如下：如果 ξ_0 是 J_1 的内点，又若对每个 n，g_n 是 f 在 J_n 上的限制在 J_n 中的原函数，并且使得 $g_n(\xi_0)=0$（据(8.7.1)，g_n 是唯一确定的），则 g_{n+1} 在 J_n 上的限制是 f 在 J_n 中的原函数，并且在 ξ_0 等于 0，于是它等于 g_n．因此我们可以定义 I 到 F 的映射 g，使它在每个 J_n 中都等于 g_n，显然，g 是 f 在 I 中的原函数．

(8.7.2) 设 I 是 $\boldsymbol{R}$ 的一个区间；I 到 F 的任意正则映射(7.6)（特

别地，到 F 中的任意连续映射，或者当 $F=\boldsymbol{R}$ 时，任意单调函数）都有一个在 I 中的原函数.

据前面的附注，我们可以假设 I 是紧的. 于是，由(8.6.4)与(7.6.1)，我们只须对阶梯函数证明这个定理. 假设 f 是阶梯函数，$(\lambda_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ 是 $I=[\alpha,\beta]$ 中递增的点列，使得 $\lambda_0=\alpha$，$\lambda_n=\beta$，而且在 $]\lambda_i,\lambda_{i+1}[(0\leqslant i\leqslant n-1)$ 中 $f(\xi)$ 等于常数 c_i. 如果我们定义 g，使得在每个区间 $[\lambda_i,\lambda_{i+1}](0\leqslant i\leqslant n-1)$ 中，都有 $g(\xi)=c_i(\xi-\lambda_i)+\sum_{k=0}^{i-1}c_k(\lambda_{k+1}-\lambda_k)$，那么容易验证 g 是 f 的原函数.

阶梯函数的原函数也称为**分段线性函数**. 对于连续函数，我们还有：

(8.7.3) 如果 g 是 I 到 F 的连续映射 f 的原函数，则 g 在每点 $\xi\in I$ 对于 I 都有导数且等于 $f(\xi)$.

因为由(8.5.2)可以推出：对每个区间 $[\xi,\xi+\lambda]\subset I$ 以及 $0\leqslant\zeta\leqslant\lambda$，有

$$\|g(\xi+\zeta)-g(\xi)-f(\xi)\zeta\|\leqslant\zeta\cdot\sup_{0\leqslant\eta\leqslant\lambda}\|f(\xi+\eta)-f(\xi)\|,$$

且据假设 $\sup\limits_{0\leqslant\eta\leqslant\lambda}\|f(\xi+\eta)-f(\xi)\|$ 是随 λ 任意小的.

如果 g 是正则函数 f 的任一原函数，那么由于(8.7.1)，对于 I 的任意两点 α,β，差 $g(\beta)-g(\alpha)$ 与所考虑的这个特殊原函数 g 无关. 我们把这个差记为 $\int_\alpha^\beta f(\xi)d\xi$，并称它为 f 在 α 与 β 之间的**积分**. 求导的任意形式规则都可以转换成这一记号，而得出对应的"积分学"公式；我们只明确写出三个最重要的公式；为方便起见，如果 g 是规则函数 f 的原函数，则我们写 g' 以代替 f，尽管 g 一般地并非处处有导数，而且导数存在时也不一定等于 f（在一个可数集的那些点上）：

(8.7.4) ("换元") 设 φ 是在区间 I 上定义的正则函数的一个实值原函数；f 是在区间 $J\supset\varphi(I)$ 上定义的一个正则函数；则当 f 连续或者 φ 单调时，对 I 的任意两点 α,β，我们有

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(\xi))\varphi'(\xi)d\xi = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(\zeta)d\zeta.$$

要验证的只有一点，那就是 $f(\varphi(\xi))\varphi'(\xi)$ 是正则函数，这一点立即由假设与正则函数的定义(7.6)推出；于是，如果 g 是 f 的原函数，那么由于(8.4.1)，公式的两边都等于 $g(\varphi(\beta))-g(\varphi(\alpha))$.

(8.7.5) （"分部积分"）设 f, g 是在区间 I 上定义的两个正则函数的原函数，它们分别在 Banach 空间 E, F 上取值；设 $(x,y)\to[x\cdot y]$ 是 $E\times F$ 到 Banach 空间 G 的一个连续双线性映射；那么对 I 的任意两点 α, β 都有

$$\int_{\alpha}^{\beta}[f(\xi)\cdot g'(\xi)]d\xi = [f(\beta)\cdot g(\beta)] - [f(\alpha)\cdot g(\alpha)] - \int_{\alpha}^{\beta}[f'(\xi)\cdot g(\xi)]d\xi.$$

要验证的仍然只有一点，即 $[f\cdot g']$ 与 $[f'\cdot g]$ 是正则函数，然后公式可由(8.1.4)与(8.4.1)推得.

(8.7.6) 设 f 是 I 到 Banach 空间 F 中的正则映射，u 是 F 到 Banach 空间 G 中的任意连续线性映射. 则

$$\int_{\alpha}^{\beta} u(f(\xi))d\xi = u\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(\xi)d\xi\right).$$

这可由(8.4.1)与(8.1.3)推得.

用积分术语，中值定理可表述成：

(8.7.7) 对于紧区间 I 上的任意规则函数 f,

$$\left\|\int_{\alpha}^{\beta} f(\xi)d\xi\right\| \leqslant \int_{\alpha}^{\beta}\|f(\xi)\|d\xi \leqslant (\beta-\alpha)\sup_{\xi\in I}\|f(\xi)\|.$$

这里为应用(8.5.1)，我们仍然只要验证 $\xi\to\|f(\xi)\|$ 是正则的.

最后，关于积分，我们叙述相应于(8.6.4)与(8.6.5)的结果：

(8.7.8) 在紧区间 $I=[\alpha,\beta]$ 上定义的正则函数序列 (g_n) 如果在 I 上一致收敛于 g，则序列 $\left(\int_{\alpha}^{\beta} g_n(\xi)d\xi\right)$ 收敛于 $\int_{\alpha}^{\beta} g(\xi)d\xi$.（记住据(7.6.1) g 是正则的.）

(8.7.9) 在紧区间 $I=[\alpha,\beta]$ 上定义的正则函数级数 (u_n)，如果

在 I 上是依范数收敛的(7.1)，那么，当 $u=\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ 时，一般项为 $\int_\alpha^\beta u_n(\xi)d\xi$ 的级数是绝对收敛的，而且

$$\int_\alpha^\beta u(\xi)d\xi=\sum_{n=0}^{\infty}\int_\alpha^\beta u_n(\xi)d\xi.$$

绝对收敛性立可由假设与中值定理(8.7.7)推得.

(8.7.10) **附注.** 由(8.6.4)与(7.6.1)的证明，对每个定义在闭区间 $[\alpha,\beta]$ 上的正则函数 f 与任意 $\varepsilon>0$，存在一递增序列

$$\alpha=x_0\leqslant t_0\leqslant x_1\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant x_k\leqslant t_k$$
$$\leqslant x_{k+1}\leqslant\cdots\leqslant x_n=\beta$$

使得

$$\left\|\int_\alpha^\beta f(x)\,dx-\sum_{k=0}^{n-1}f(t_k)(x_{k+1}-x_k)\right\|\leqslant\varepsilon.$$

如果 f 是连续的，则可取(由于(3.16.5)) $x_{k+1}-x_k$ 等于 $(\beta-\alpha)/n$ 并且 $t_k=x_k$ 的所有数(见问题 1)).

问　　题

1) 设 f 是在紧区间 $I\subset R$ 上定义的正则函数. 试证对于任意 $\varepsilon>0$，存在数 $\delta>0$ 使得对于 I 中任意递增点列 $x_0\leqslant t_0\leqslant x_1\leqslant\cdots\leqslant x_k\leqslant t_k\leqslant x_{k+1}\leqslant\cdots\leqslant x_n$，只要 $x_{k+1}-x_k\leqslant\delta(0\leqslant k\leqslant n-1)$，就有

$$\left\|\int_{x_0}^{x_n}f(t)dt-\sum_{k=0}^{n-1}f(t_k)(x_{k+1}-x_k)\right\|\leqslant\varepsilon$$

("黎曼和"；首先考虑 f 是阶梯函数的情形).

2) a) 设 f 是在紧区间 $I=[a,b]$ 上定义的正则函数. 试证：对于任意 $\varepsilon>0$，存在一个在 I 上定义的连续函数 g 使得

$$\int_a^b\|f(t)-g(t)\|dt\leqslant\varepsilon.$$

b) 假设 f 在 E 中取值；设 h 是在 I 上定义在 F 中取值的正则函数，并设 $(x,y)\to[x\cdot y]$ 是 $E\times F$ 到 $G(E,F,G$ 都是 Banach 空间) 中的连续双线性映射. 试证：

$$\lim_{s\to 0, s>0}\int_a^b [f(t)\cdot h(t+s)]dt = \int_a^b [f(t)\cdot h(t)]dt.$$

c) 试证：

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(t)\sin ntdt = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(t)\cos ntdt = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(t)|\sin nt|\,dt = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)dt.$$

d) 设 u 是 f 的原函数，并假设 $u(I)$ 含于球 $B\subset E$ 中. 试证：如果 g 是 I 上的单调函数，则

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = (u(b)-c)g(b) + (c-u(a))g(a),$$

其中 $c\in B$. 特别地，如果 f 是实值正则函数，则存在 $s\in I$ 使得

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = g(a)\int_a^s f(t)dt + g(b)\int_s^b f(t)dt$$

("第二中值定理").

(对所有这些性质的证明，均利用问题 1 中同样的方法).

3) 设 f 是在紧区间 $I=[a, b]$ 上定义的正则函数. 对于任意整数 $n>0$ 以及任意这样的整数 k：$0\leqslant k\leqslant n$，令 $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$. 设

$$\gamma(n) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) - \int_a^b f(t)dt.$$

a) 假设 f 在 I 上有连续导数. 试证

$$\lim_{n\to\infty} n\gamma(n) = \frac{b-a}{2}(f(b)-f(a)).$$

(写成 $\gamma(n) = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x_{k+1})-f(t))dt$；利用中值定理与问题 1.)

b) 假设 f 在 I 上是递增的实值函数；试证：

$$0\leqslant\gamma(n)\leqslant\frac{b-a}{n}(f(b)-f(a)).$$

c) 举出一个在 I 上递增的连续函数 f 的例子，使得 $n\gamma(n)$ 当 n 趋于 $+\infty$ 时并不趋于 $\dfrac{b-a}{2}(f(b)-f(a))$. (把 f 取为序列 (f_n) 的极限，这里 f_n 是递增、连续的分段线性函数，且满足如下条件：

$$(b-a)\sum_{k=1}^{2^n} f_n\left(a+k\frac{b-a}{2^n}\right)-2^{n-1}\int_a^b f_n(t)dt$$

$$\geqslant\frac{5}{8}(b-a)(f_n(b)-f_n(a))$$

以及对于 $0\leqslant k\leqslant 2^n$ 有

$$f_{n+1}\left(a+k\frac{b-a}{2^n}\right)=f_n\left(a+k\frac{b-a}{2^n}\right).)$$

4) 试证：当 n 趋于 $+\infty$ 时，多项式

$$f_n(x)=\int_0^x(1-t^2)^n dt\Big/\int_0^1(1-t^2)^n dt$$

在任意区间 $[-1,-\varepsilon]$ 上一致收敛于 -1 而在任意区间 $[\varepsilon,+1]$ 上一致收敛于 $+1$ $\left(\varepsilon>0\right.$ 是任意的；利用不等式 $\left.\int_0^1(1-t^2)^n dt\geqslant\int_0^1(1-t)^n dt\right)$. 设 $g_n(x)=\int_0^x f_n(t)dt$；证明多项式 g_n 在 $[-1,+1]$ 上一致收敛于函数 $|x|$，由此获得一个关于(7.3.1.3)的新证法。

5) 设 f 是区间 $[x_0,+\infty[$ 到 Banach 空间 F 上的连续映射，并且对每个 $\lambda>0$，都有 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+\lambda)-f(x))=0$。

a) 试证：当 x 趋于 $+\infty$ 而 λ 属于紧区间 $K=[a,b]\subset[0,+\infty[$ 中时，$f(x+\lambda)-f(x)$ 一致收敛于 0 (即对每一个 $\varepsilon>0$，都存在 $A>0$，使得当 $x\geqslant A$ 时，对每个 $\lambda\in k$ 都有 $\|f(x+\lambda)-f(x)\|\leqslant\varepsilon$)。(用反证法：假设存在这样一个序列 (x_n)：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$ 与 k 中点列 (λ_n) 使得对每个 n 都有 $\|f(x_n+\lambda_n)-f(x_n)\|>\alpha>0$。注意：存在 λ_n 在 K 中的邻域 J_n 使得对任意 $\lambda\in J_n$ 都有 $\|f(x_n+\lambda)-f(x_n)\|>\alpha$。现在用归纳法定义一个递减的闭区间序列 $I_k\subset K$ 与 (x_n) 的一个子列 (x_{n_k}) 使得对每个 $\mu\in I_k$ 都有 $\|f(x_{n_k}+\mu)-f(x_{n_k})\|\geqslant\alpha/3$；当 I_k 已知后，为定义 I_{k+1}，注意：如果 δ_k 是 I_k 的长，q 是使得 $q\delta_k>b-a$ 的一个整数，则当 x 充分大就有 $\|f(x+\delta_k)-f(x)\|\leqslant\alpha/3q$。)

b) 由 a) 推证 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\int_x^{x+1}f(t)dt-f(x)\right)=0$ 并断定

$$\lim_{x\to\infty}f(x)/x=0.$$

6) a) 试证：存在一个在 R 上定义的实值可微函数 f(相应地，g) 使得对于 $t\neq0$，$f'(t)=\sin(1/t)$ (相应地，$g'(t)=\cos(1/t)$) 以及 $f'(0)=0$(相应地，$g'(0)=0$)。(考虑函数 $t^2\cos(1/t)$ 与 $t^2\sin(1/t)$ 的导数) 函数

f' 与 g' 都不是正则的.

b) 设 $P(t, u, v)$ 是关于 u, v 的多项式，其中系数都是 t 的连续实函数，t 在包含 0 的开区间 $I\subset \mathbf{R}$ 上取值. 试证. 存在一个在 I 上定义的可微函数 f, 使得对于 $t\neq 0$ 有 $f'(t)=P(t, \sin(1/t), \cos(1/t))$ (把关于 $\sin(1/t)$ 与 $\cos(1/t)$ 的单项式用 $\sin(k/t)$ 或者 $\cos(k/t)$ 形的项的线性组合表出，并利用 a)). $f'(0)$ 的值是什么? 证明我们可以有 $f'(0)\neq P(0, 0, 0)$.

c) 试证：存在一个定义于 $[-1,+1]$ 上的可微函数 f, 使得除了 0 与诸点 $1/n\pi$ (n 是正或负整数) 以外，在每一点 t 上 $f'(t)=\sin(1/\sin(1/t))$. (在 $t=1/n\pi$ 的邻域中,记 $t=\dfrac{1}{n\pi+\arcsin u}$ 并利用 b) 证明 $f'(1/n\pi)$ 存在;进而证明存在常数 $a>0$ 与 n 无关,使得

$$\left|\int_{2/(2n+1)\pi}^{2/(2n-1)\pi}\sin(1/\sin(1/t))dt\right|\leqslant a/n^3$$

对于每一个整数 $n>0$ 成立. 然后对于 $t>0$ 考虑函数

$$f(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{t}\sin(1/\sin(1/s))ds,$$

对于 $t<0$ 可以类似地定义 f.)

7) 设 $I=[0,1[$, 再设 E 是一个向量空间，它由在 I 上定义的有界且右连续(即对于 $t\in I$, $f(t+)=f(t)$) 的正则复值函数组成.

a) 试证: 在 E 上, $(f|g)=\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$ 是一个非退化的正 Hermite 型(参见(8.5.3)). 证明这样定义的准 Hilbert 空间 E 是不完备的(利用下面这个函数不在 E 中的事实:当 $t>0$ 时这个函数等于 $\sin(1/t)$,当 $t=0$ 时它等于 0).

b) 用下面的方法定义 E 中元素列 (f_n):

1° f_0 是常数 1;

2° 对每个整数 $n>0$, 设 m 是使 $2^m\leqslant n$ 的最大整数,并设 $n=2^m+k$. 对于$\dfrac{2k}{2^{m+1}}\leqslant t<\dfrac{2k+1}{2^{m+1}}$ 我们取 f_n 等于 $2^{m/2}$, 对于 $\dfrac{2k+1}{2^{m+1}}\leqslant t<\dfrac{2k+2}{2^{m+1}}$ 取 f_n 等于$-2^{m/2}$, 对于 I 中所有其他的 t 值取 f_n 等于 0.

试证: 在这个准 Hilbert 空间 E 中, (f_n) 是一个标准直交系 (“Haar 标准直交系”).

c) 对每个 $n\geqslant 0$, 设 V_n 是 E 的子空间，它由附标 $k\leqslant n$ 的那些 f_k 生成.

试证：存在 I 的一个分解，它把 I 分解成 $n+1$ 个 $[\alpha,\beta[$ 型区间，这些区间没有公共点，且满足下述条件：在这些区间的每一个上，V_n 中的每一个函数都是常数；反之，具有这种性质的每个函数都属于 V_n（考虑由这些函数生成的 E 的向量子空间的维数）。

d) 设 g 是 E 的任意一个函数，h 是它在 V_n 上的直交射影（6.3 节）；试证：在那些区间 $[\alpha,\beta[$——在其上 V_n 的所有函数都是常数者——的每一个上，都有 $h(t)=\dfrac{1}{\beta-\alpha}\displaystyle\int_\alpha^\beta g(u)du$.

e) 利用 d) 推证：对于在 I 上一致连续的任意函数 $g\in E$，一般项为 $(g|f_n)f_n(t)$ 的级数在 I 中是一致收敛的，而且它的和等于 $g(t)$. 由此结果推出 (f_n) 是 E 中的全标准直交系.

8) 设 f 是紧区间 $I=[a,b]$ 上的一个正则实值函数；并设 $\int_a^b|f(t)|dt=c$. 证明：对于任意 $\varepsilon>0$，存在 I 上的一个实值连续函数 g，使得在 I 上 $|g(t)|\leqslant 1$，而且 $\int_a^b f(t)g(t)dt\geqslant c-\varepsilon$.（把问题化成 f 是阶梯函数的情形.）

8. 应 用：数 e

对于任意数 $a>0$，函数 $x\to a^x$ 在 $\boldsymbol{R}$ 中是连续的(4.3)，于是函数 $g(x)=\int_0^x a^t dt$ 有定义并在 $\boldsymbol{R}$ 中可微，而且在每一点上 $g'(x)=a^x$. 我们知道

$$g(x+1)=\int_0^{x+1}a^t\,dt=\int_0^x a^t\,dt+\int_x^{x+1}a^t dt.$$

但是据(8.7.4)，

$$\int_x^{x+1}a^t dt=\int_0^1 a^{x+u}du=a^x\int_0^1 a^u du.$$

因为对于 $0\leqslant x\leqslant 1$ 有 $a^x\geqslant\inf(a,1)$，所以由(8.5.3) $c=\int_0^1 a^u du>0$，于是我们可以写出

$$a^x=c^{-1}(g(x+1)-g(x));$$

因此 a^x 在 $\mathbf{R}$ 中是可微的，并且 $D(a^x)=\varphi(a)\cdot a^x$，其中 $\varphi(a)\neq 0$，如果 $a\neq 1$. 假设 $a\neq 1$，设 b 是任意正数，我们可以写出

$$b^x = a^{x\log_a b},$$

因此，据(8.4.1)有

$$\varphi(b)\cdot b^x = \log_a b\cdot\varphi(a)\cdot b^x.$$

换句话说，

$$\varphi(b) = \varphi(a)\log_a b.$$

因此存在一个且只存在一个数 $e>0$ 使得 $\varphi(e)=1$，即 $e=a^{1/\varphi(a)}$；因为 $D(e^x)=e^x>0$，所以 e^x 是严格递增的（由(8.5.3)知道），于是 $e=e^1>e^0=1$. 函数 e^x 也写作 $\exp(x)$ 或者 $\exp x$. 函数 $\log_e x$ 可写成 $\log x$，于是由(8.2.3)与(4.2.2)推知，对于 $x>0$ 有 $D(\log x)=1/x$. 此外还可推出 $D(a^x)=\log a\cdot a^x$.

问　　题

研究下列函数的变化： $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+p}$，$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x-p}$，$\left(1+\frac{p}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$，$\left(1+\frac{p}{x}\right)^{x+1}$，**对于** $x>0$，**这里** p **是固定的任意正数．当** x **趋于** $+\infty$ **时，确定它们的极限．**

9. 偏　导　数

设 f 是由 Banach 空间 E 的开子集 A 到 Banach 空间 F 的一个可微映射；那么 Df 是一个 A 到 $\mathscr{L}(E;F)$ 的映射．如果 Df 在 A 中连续，我们就说 f 在 A 中是**连续可微的**.

现在假设 $E=E_1\times E_2$. 对每个点 $(a_1,a_2)\in A$，我们可以考虑分别由 E_1 与 E_2 的开子集到 F 的偏映射 $x_1\to f(x_1,a_2)$ 与 $x_2\to f(a_1,x_2)$. 我们说在 (a_1,a_2)，f 关于第一个（相应地，第二个）变量是

可微的，如果偏映射 $x_1 \to f(x_1, a_2)$（相应地，$x_2 \to f(a_1, x_2)$）在 a_1（相应地，a_2）是可微的．那么这个映射的导数，是 $\mathscr{L}(E_1;F)$（相应地，$\mathscr{L}(E_2,F)$）的一个元素，称为 f 在 (a_1,a_2) 对于第一个（相应地，第二个）变量的**偏导数**，并记为 $D_1f(a_1, a_2)$（相应地，$D_2f(a_1, a_2)$）．

(8.9.1) 设 f 是 $E_1 \times E_2$ 的开子集 A 到 F 的连续映射．为使 f 在 A 中是连续可微的，充要条件是：f 在每一点关于第一与第二变量都是可微的，而且映射 $(x_1, x_2) \to D_1f(x_1, x_2)$（$A$ 到 $\mathscr{L}(E_1; F)$ 的）与 $(x_1, x_2) \to D_2f(x_1, x_2)$（$A$ 到 $\mathscr{L}(E_2; F)$ 的）在 A 中是连续的．这时，在 A 的每一点 (x_1, x_2)，f 的导数由下式给出：

(8.9.1.1) $Df(x_1, x_2)\cdot(t_1,t_2)=D_1f(x_1,x_2)\cdot t_1+D_2f(x_1, x_2)\cdot t_2.$

a) 必要性．映射 $x_1 \to f(x_1, a_2)$ 是由 f 与 E_1 到 $E_1 \times E_2$ 的映射 $x_1 \to (x_1, a_2)$ 复合而成的，据(8.1.2)(8.1.3)与(8.1.5)，这第二个映射的导数是 $t_1 \to (t_1, 0)$．其次，据(8.2.1)，$x_1 \to f(x_1, a_2)$ 在 a_1 有导数，等于 $t_1 \to Df(a_1, a_2)\cdot(t_1, 0)$．如果我们令 i_1（相应地，i_2）是自然单映射 $t_1 \to (t_1,0)$（相应地，$t_2 \to (0,t_2)$），它是 $\mathscr{L}(E_1;E_1\times E_2)$（$\mathscr{L}(E_2; E_1 \times E_2)$）的常数元素，于是我们看到 $D_1f(a_1,a_2) = Df(a_1, a_2)\circ i_1$，类似地 $D_2f(a_1, a_2) = Df(a_1, a_2)\circ i_2$（即使只假设 f 在 A 中可微这一切仍然成立）．因为 $\mathscr{L}(E_1 \times E_2; F) \times \mathscr{L}(E_1; E_1 \times E_2)$ 到 $\mathscr{L}(E_1; F)$ 的映射 $(v, u) \to v\circ u$ 是连续的（(5.7.5)与(5.5.1)），所以 D_1f 与 D_2f 的连续性由 Df 的连续性推出；最后，我们由 $(t_1, t_2) = i(t_1) + i_2(t_2)$ 便得到(8.9.1.1)

b) 充分性．记

$$f(a_1+t_1, a_2+t_2) - f(a_1, a_2) = (f(a_1+t_1, a_2+t_2) - f(a_1+t_1,a_2)) + (f(a_1+t_1,a_2) - f(a_1,a_2)).$$

任意给定 $\varepsilon > 0$，据假设，存在一个 $\gamma > 0$，使得对 $\|t_1\| \leqslant \gamma$，有

$$\|f(a_1+t_1, a_2) - f(a_1, a_2) - D_1f(a_1, a_2)\cdot t_1\| \leqslant \varepsilon\|t_1\|.$$

另一方面，据(8.6.2)，在以 (a_1, a_2) 为中心且含于 A 的一个球 B 中我们有

$$\|f(a_1+t_1,a_2+t_2) - f(a_1+t_1,a_2) - D_2f(a_1+t_1,a_2)\cdot t_2\|$$

$$\leqslant \|t_2\| \cdot \sup_{\|z\| \leqslant \|t_2\|} \|D_2f(a_1 + t_1, a_2 + z)$$
$$- D_2f(a_1 + t_1, a_2)\|.$$

因此由映射 D_2f 的连续性推知： 存在 $\gamma' > 0$ 使得对于 $\|t_2\| \leqslant \gamma'$ 与 $\|t_1\| \leqslant \gamma'$，有

$$\|f(a_1 + t_1, a_2 + t_2) - f(a_1 + t_1, a_2) - D_2f(a_1 + t_1, a_2) \cdot t_2\|$$
$$\leqslant \varepsilon\|t_2\|,$$

另一方面有

$$\|D_2f(a_1 + t_1, a_2) - D_2f(a_1, a_2)\| \leqslant \varepsilon,$$

于是由(5.7.4)有

$$\|D_2f(a_1 + t_1, a_2) \cdot t_2 - D_2f(a_1, a_2) \cdot t_2\| \leqslant \varepsilon\|t_2\|.$$

最后，对于 $\sup(\|t_1\|, \|t_2\|) \leqslant \inf(\gamma, \gamma')$ 我们有

$$\|f(a_1 + t_1, a_2 + t_2) - f(a_1, a_2) - D_1f(a_1, a_2) \cdot t_1$$
$$- D_2f(a_1, a_2) \cdot t_2\| \leqslant 4\varepsilon\sup(\|t_1\|, \|t_2\|)$$

这就证明了(8.9.1.1)；Df 的连续性由下述事实与(5.7.5)推出，即(8.9.1.1)可以写成

$$Df = D_1f \circ pr_1 + D_2f \circ pr_2.$$

定理(8.9.1)可以通过对 n 用归纳法而直接推广到 n 个 Banach 空间的积．如果我们把此结果与(8.2.1)结合起来，则得到

(8.9.2) 设 f 是 $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ 的开集 A 到 F 的连续可微映射，对每个 i，设 g_i 是 Banach 空间 G 的开子集 B 到 E_i 的连续可微映射，而且使得对每个 $z \in B$ 都有 $(g_1(z), \cdots, g_n(z)) \in A$．那么，复合映射 $h = f \circ (g_1, \cdots, g_n)$ 在 B 中是连续可微的，而且我们有

$$Dh(z) = \sum_{k=1}^{n} (D_kf(g_1(z), \cdots, g_n(z))) \circ Dg_k(z).$$

问　　题

1) 设 E，F 是两个 Banach 空间，f 是 E 的开子集 A 到 F 的连续映射．假设对每个 $x \in A$，存在元素 $u(x) \in \mathscr{L}(E; F)$ 使得，对每个 $y \in E$，$(f(x + ty)$

$-f(x))/t$ 当 $t \neq 0$ 在 $\boldsymbol{R}$ 中趋于 0 时的极限存在并且等于 $u(x)\cdot y$. 再设 $x \to u(x)$ 是 A 到 $\mathscr{L}(E;F)$ 的连续映射. 试证: f 在 A 中是连续可微的, 并且对每个 $x\in A$ 都有 $u(x)=Df(x)$. (把中值定理应用于函数 $t\to f(x+ty)$, $t\in[0,1]$.)

2) 设 E 是 Banach 空间 (c_0) (5.3 节问题 5); 设 F 是复 Banach 空间 $(c_0)+i(c_0)$, 它由所有这样的复数列 $z=(\zeta_n)_{n\geq 0}$ 组成 $\lim\limits_{n\to\infty}\zeta_n=0$, 其中范数为 $\|z\|=\sup\limits_n|\zeta_n|$. 我们用 F_0 表示基本空间 F 的实 Banach 空间 (5.1 节). 设 $I\subset\boldsymbol{R}$ 是包含 0 的开区间, 对每个整数 $n\geq 0$, 设 f_n 是 I 到 $\boldsymbol{C}$ 的这样的连续映射, 使条件 $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=0$ 蕴含 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(t_n)=0$. 这就定义了 E 到 F_0 的一个映射 $f:(\xi_n)\to(f_n(\xi_n))$.

a) 假设 f 在 0 的一邻域中连续. 那么为使 f 在点 0 是拟可微的(8.4 节问题 4), 必须且只须对每个 n, 导数 $f'_n(0)$ 存在并且存在两个数 $A>0$, $\delta>0$ 使得由 $|t|\leq\delta$ 推出 $|f_n(t)-f_n(0)|\leq A|t|$ 对任意 n 成立. 因此, 有 $\sup\limits_n|f'_n(0)|<+\infty$.

b) 为使 f 在 0 是可微的, 必须且只须对每个 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得关系 $|t|\leq\delta$ 蕴含 $|f_n(t)-f_n(0)-f'_n(0)t|\leq\varepsilon|t|$ 对每个 n 成立.

c) 为使导数 f' 在 E 中 0 的一个邻域中存在并且在 0 连续, 充要条件是: 存在 0 的一个邻域 $J\subset I$ 使得: 1° 每个 f'_n 在 J 中存在; 2° $\sup\limits_n|f'_n(0)|<+\infty$; 3° 序列 (f'_n) 在点 0 是等度连续的 (7.5 节) (参阅 8.6 节, 问题 3).

d) 对于每个 $n\geq 1$, 设 $f_n(t)=e^{nit}/n$, $f_0(t)=1$. 试证 f 在每一点 $x\in E$ 都是拟可微的. 如果 $u(x)$ 是 f 在点 x 的拟导数, 试证: $E\times E$ 到 F_0 的映射 $(x,y)\to u(x)\cdot y$ 是连续的, 但是 f 在 E 的任意一点都是不可微的.

3) 设 f 是 Banach 空间 E 中的开集 A 到 Banach 空间 F 的连续映射. 假设: 对任意 $x\in A$ 与任意 $y\in E$, $\lim\limits_{t\to 0,\, t\neq 0}(f(x+ty)-f(x))/t=g(x,y)$ 在 E 中存在. 如果对于 $y_i\in E$, $1\leq i\leq n$, 与 $x_0\in A$, 每个映射 $x\to g(x,y_i)$ 在 x_0 都是连续的, 试证:

$$g(x_0,y_1+y_2+\cdots+y_n)=\sum_{i=1}^{n}g(x_0,y_i)$$

(利用中值定理).

4) 设 E_1, E_2, F 是三个 Banach 空间, f 是 $E_1\times E_2$ 的开子集 A 到 F 的连续映射. 为使 f 在 $(a_1,a_2)\in A$ 是可微的, 必须且只须: 1° $D_1f(a_1,a_2)$

与 $D_2f(a_1, a_2)$ 存在；2° 对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得关系 $\|t_1\|\leqslant\delta$，$\|t_2\|\leqslant\delta$ 蕴含

$$\|f(a_1+t_1, a_2+t_2)-f(a_1+t_1, a_2)-f(a_1, a_2+t_2)+f(a_1, a_2)\|$$
$$\leqslant\varepsilon(\|t_1\|+\|t_2\|).$$

试证：如果 $D_1f(a_1, a_2)$ 存在，并且有 $E_1\times E_2$ 中 (a_1, a_2) 的一个邻域 V，使得 D_2f 在 V 中存在，而且 V 到 $\mathscr{L}(E_2, F)$ 的映射 $(x_1,x_2)\to D_2f(x_1, x_2)$ 连续，则上面第二个条件满足.

5）设 f 是在 $\boldsymbol{R}^2$ 中用下面的方法定义的实值函数：对于 $(x,y)\neq(0,0)$，$f(x, y)=x^5y^2/(x^4+y^2)^2$，而 $f(0,0)=0$. 试证：D_1f 与 D_2f 在每一点 $(x,y)\in\boldsymbol{R}^2$ 存在，而且对于任意 $(a, b)\in\boldsymbol{R}^2$，四个映射 $x\to D_1f(x, b)$，$y\to D_1f(a, y)$，$x\to D_2f(x, b)$，$y\to D_2f(a, y)$ 在 $\boldsymbol{R}$ 中都是连续的，但是 f 在 $(0,0)$ 是不可微的.

6）设 I 是 $\boldsymbol{R}$ 的区间，f 是 I^p 到实 Banach 空间 E 的这样的映射，使得对于任意 $(a_1, \cdots, a_p)\in I^p$，每个映射 $x_j\to f(a_1,\cdots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1},\cdots, a_p)$ $(1\leqslant j\leqslant p)$ 在 I 中都是连续的与可微的，而且那 p 个函数 D_jf $(1\leqslant j\leqslant p)$ 在 I^p 中都是有界的. 试证：f 在 I^p 中是连续的(应用中值定理).

7）仍使用 8.9 节的记号，我们说 f 在点 (a_1, a_2) 对于第一个变量是强可微的，如果对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得由关系式 $\|s_1\|\leqslant\delta$，$\|t_1\|\leqslant\delta$，$\|x_2-a_2\|\leqslant\delta$ 可推出

$$\|f(a_1+s_1,x_2)-f(a_1+t_1,x_2)-D_1f(a_1,a_2)\cdot(s_1-t_1)\|$$
$$\leqslant\varepsilon\|s_1-t_1\|.$$

证明：如果 f 在点 (a_1, a_2) 对于第二个变量也是可微的，那么在点 (a_1, a_2) 按照 8.6 节问题 7 的意义，f 是强可微的.

10. Jacobi 行列式

现在我们把一般结果(8.9.1)特殊化到最重要的情形.

1）$E=\boldsymbol{R}^n$(相应地，$E=\boldsymbol{C}^n$). 如果 f 是 E 的开子集 A 到 F 的可微映射，则偏导数 $D_kf(\alpha_1,\cdots, \alpha_n)$ 可视为 F 的一个向量(8.4)，而 f 的导数是映射：

$$(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)\to\sum_{k=1}^{n}D_kf(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\zeta_k.$$

如果 Df 是连续的，则每个 D_kf 都是连续的. 反之，如果每个映射 D_kf 存在并且在 A 中连续，则 f 在 A 中连续可微.

2) $E=\boldsymbol{R}^n$ 与 $F=\boldsymbol{R}^m$(相应地，$E=\boldsymbol{C}^n$ 与 $F=\boldsymbol{C}^m$). 这时我们可以写成 $f=(\varphi_1,\cdots,\varphi_m)$，其中 φ_i 是在 E 上定义的纯量函数. 据(8.1.5)，f 是连续可微的，当且仅当每个 φ_i 都是连续可微的. 又据情形 1，φ_i 是连续可微的，当且仅当每个偏导数 $D_i\varphi_i$ (现在它是纯量函数)存在并且连续. 此外，f 的(全)导数是线性映射

$$(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)\to(\eta_1,\cdots,\eta_m),$$

其中

$$\eta_i=\sum_{j=1}^{n}(D_j\varphi_i(\alpha_1,\cdots,\alpha_n))\zeta_j.$$

换句话说，f' 是 $\boldsymbol{R}^n$ 到 $\boldsymbol{R}^m$(相应地，$\boldsymbol{C}^n$ 到 $\boldsymbol{C}^m$)的线性映射，与(m,n)型的矩阵 $(D_j\varphi_i(\alpha_1,\cdots,\alpha_n))$相对应，后者称为 f (或 $\varphi_1,\cdots,\varphi_m$) 在 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 的雅可比矩阵. 当 $m=n$ 时，f 的雅可比矩阵(方阵)的行列式称为 f 的(或 $\varphi_1,\cdots,\varphi_m$ 的) **Jacobi 行列式**. 把定理(8.9.2)特殊化，有

(8.10.1) 设 $\varphi_j(1\leqslant j\leqslant m)$ 是 m 个纯量函数，在 $\boldsymbol{R}^n$(相应地，$\boldsymbol{C}^n$)的开子集 A 中连续可微. 设 $\psi_i\ (1\leqslant i\leqslant p)$是 p 个纯量函数，在 $\boldsymbol{R}^m$(相应地，$\boldsymbol{C}^m$) 的开子集 B 中连续可微，B 包含 A 在 $(\varphi_1,\cdots,\varphi_m)$ 下的象. 如果对于 $x\in A$ 与 $1\leqslant i\leqslant p$，$\theta_i(x)=\psi_i(\varphi_1(x),\cdots,\varphi_m(x))$，那么我们有 Jacobi 矩阵间的关系式

$$(D_k\theta_i)=(D_j\psi_i)(D_k\varphi_j).$$

特别地，当 $m=n=p$ 时，有 Jacobi 行列式间的关系式

$$\det(D_k\theta_i)=\det(D_j\psi_i)\det(D_k\varphi_j).$$

在这里提一下，$D_if(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 的通常记号 $f'_{\xi_i}(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，$\frac{\partial}{\partial\xi_i}f(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，当变量代入时，不幸地导致令人失望的混淆 ($f'_y(y,x)$ 或 $f'_x(x,x)$ 是什么意思?) Jacobi 行列式也记为 $D(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)/D(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 或者 $\partial(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)/\partial(\xi_1,\cdots,\xi_n)$.

11. 含参量积分的导数

(8.11.1) 设 $I=[\alpha,\beta]\subset\boldsymbol{R}$ 是一紧区间，E，F 是实 Banach 空间，f 是 $I\times A$ 到 F 的连续映射（A 是 E 的开子集）. 那么 $g(z)=\int_\alpha^\beta f(\xi,z)d\xi$ 在 A 中是连续的.

任给 $\varepsilon>0$ 与 $z_0\in A$，对任意 $\xi\in I$，存在 ξ 在 I 中的邻域 $V(\xi)$ 与数 $r(\xi)>0$ 使得对于 $\eta\in V(\xi)$ 与 $\|z-z_0\|\leqslant r(\xi)$，有 $\|f(\eta;z)-f(\xi,z_0)\|\leqslant\varepsilon$. 用有限个邻域 $V(\xi_i)$ 复盖 I，并设 $r=\inf(r(\xi_i))$. 则对于 $\|z-z_0\|\leqslant r$ 与任意 $\xi\in I$ 有 $\|f(\xi,z)-f(\xi,z_0)\|\leqslant 2\varepsilon$. 于是，由(8.7.7)，对于 $\|z-z_0\|\leqslant r$ 有

$$\|g(z)-g(z_0)\|\leqslant 2\varepsilon(\beta-\alpha),$$

这就是要证明的.

(8.11.2) (Leibniz 法则) 在 (8.11.1) 同样的假设下，再假设 f 对于第二变量的偏导数 D_2f 存在并且在 $I\times A$ 中连续. 那么 g 在 A 中是连续可微的，并且

$$Dg(z)=\int_\alpha^\beta D_2f(\xi,z)d\xi$$

(注意：公式的两边都在 $\mathscr{L}(E;F)$ 中).

把 (8.11.1) 中的同样论证应用于 D_2f 上，就可证明：任给 $\varepsilon>0$ 与 $z_0\in A$，存在 $r>0$ 使得对于 $\|z-z_0\|\leqslant r$ 与任意 $\xi\in I$ 有 $\|D_2f(\xi,z)-D_2f(\xi,z_0)\|\leqslant\varepsilon$. 于是，据(8.6.2)，对于任意 $\xi\in I$ 与任意 t，只要 $\|t\|\leqslant r$，就有

$$\|f(\xi,z_0+t)-f(\xi,z_0)-D_2f(\xi,z_0)\cdot t\|\leqslant\varepsilon\|t\|.$$

因此据(8.7.7)我们有

$$\|g(z_0+t)-g(z_0)-\int_\alpha^\beta(D_2f(\xi,z_0)\cdot t)d\xi\|$$
$$\leqslant\varepsilon(\beta-\alpha)\|t\|.$$

但是，据(8.7.6)与(5.7.4)对于任意 t，有

$$\int_{\alpha}^{\beta} (D_2 f(\xi, z_0) \cdot t) d\xi = \left(\int_{\alpha}^{\beta} D_2 f(\xi, z_0) d\xi \right) \cdot t.$$

证完.

问　　题

1) 设 $J \subset \boldsymbol{R}$ 是一开区间，E，F 是两个 Banach 空间，A 是 E 的开子集，f 是 $J \times A$ 到 F 的这样一个连续映射：使 $D_2 f$ 存在并且在 $J \times A$ 中连续；α 与 β 是 A 到 J 的两个连续可微映射. 设

$$g(z) = \int_{\alpha(z)}^{\beta(z)} f(\xi, z) d\xi.$$

试证：g 在 A 中是连续可微的，并且 $g'(z)$ 是线性映射

$$t \longrightarrow \left(\int_{\alpha(z)}^{\beta(z)} D_2 f(\xi, z) d\xi \right) \cdot t + (\beta'(z) \cdot t) f(\beta(z), z) - (\alpha'(z) \cdot t) f(\alpha(z), z)$$

(利用(8.9.1)与(8.11.2)).

2) 设 f，g 是紧区间 $[a, b]$ 上的两个实值正则函数，并且 f 在 $[a,b]$ 上是下降的，而 $0 \leqslant g(t) \leqslant 1$. 试证：

$$\int_{b-\lambda}^{b} f(t) dt \leqslant \int_{a}^{b} f(t) g(t) dt \leqslant \int_{a}^{a+\lambda} f(t) dt,$$

其中 $\lambda = \int_a^b g(t) dt$. 等号何时成立？（把积分 $\int_a^y f(t) g(t) dt$ 与 $\int_a^{a+h(y)} f(t) dt$，其中 $h(y) = \int_a^y g(t) dt$，看成 y 的函数，对另一不等式类似地处理.）

3) 令假设与问题 1 中相同，只是对 α 与 β 只假设连续而不必可微，但是另外再假设对于任意 $z \in A$，$f(\alpha(z), z) = 0$ 与 $f(\beta(z), z) = 0$. 试证：$g(z)$ 在 A 中是连续可微的，而且 $g'(z) = \int_{\alpha(z)}^{\beta(z)} D_2 f(\xi, z) d\xi$.（利用 Bolzano 定理 (3.19.8) 试证：如果 ξ 属于以 $\beta(z_0)$ 与 $\beta(z)$ 为端点的区间，则存在 $z' \in A$ 使得 $\|z' - z_0\| \leqslant \|z - z_0\|$ 并且 $\xi = \beta(z')$；如果 M 是 $\|D_2 f\|$ 在 $(\beta(z_0), z_0)$ 一邻域中的上确界，利用中值定理证明：$\|f(\xi, z)\| \leqslant M \|z - z_0\|$.）

4) 设 $I = [a, b]$，$A = [c, d]$ 是 $\boldsymbol{R}$ 中两个紧区间，f 是 $I \times A$ 到 Banach 空间 E 的映射，使得：1° 对每个 $y \in A$，函数 $x \longrightarrow f(x, y)$ 在 I 中是正则的，而对每个 $x \in I$，函数 $y \longrightarrow f(x, y)$ 在 A 中也是正则的；2° f 在 $I \times A$ 中是有界的；3° 如果 D 是由 $I \times A$ 中使 f 不连续的点 (x, y) 组成的子集，

则对于每个 $x_0\in I$（相应地，每个 $y_0\in A$），使 $(x_0, y)\in D$（相应地，$(x,y_0)\in D$）的点 y（相应地，x）的集是有限的.

a) 试证：函数 $g(y)=\int_a^b f(t,y)dt$ 在 A 中是连续的.（如果 $\varepsilon>0$ 与 $y_0\in A$ 给定，证明：存在 y_0 在 A 中的邻域 V 与有限个区间 $J_k\subset I(1\leqslant k\leqslant n)$，使得这些 J_k 之长的和$\leqslant\varepsilon$，而且，如果 $W=I-\bigcup_{k=1}^{n} J_k$，则 $\|f(x,y)-f(x,y_0)\|\leqslant\varepsilon$ 对 $x\in W$，$y\in V$ 成立. 为证本题结果，可利用 Borel-Lebesgue 定理(3.17.6).）

b) 由 a) 推证

$$\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy.$$

（考虑两个函数 $z\to\int_c^z dy\int_a^b f(x,y)dx$ 与 $z\to\int_a^b dx\int_c^z f(x,y)dy$，对于 $z\in A$.）（参看(13.21).）

c) 由 a) 推证，如果 $a=c$，$b=d$，则

$$\int_a^b dy\int_y^b f(t,y)dt=\int_a^b dx\int_a^x f(x,u)du.$$

（考虑对 $y\leqslant x$ 等于 $f(x,y)$，对 $y>x$ 等于零的函数.）

5) a) 设 f 是区间 $[0,a]$ 中严格递增的连续函数，并且 $f(0)=0$，设 g 是它的逆映射，在区间 $[0,f(a)]$ 中是连续的与严格递增的. 试证：

$$\int_0^a f(t)dt=\int_0^{f(a)}(a-g(u))du$$

（把问题 4 应用到这样的函数，即对于 $0\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant y\leqslant f(x)$ 它等于 1，对于 $0\leqslant x\leqslant a$，$f(x)<y\leqslant f(a)$，它等于 0）.

b) 试证：如果 $0\leqslant x\leqslant a$ 与 $0\leqslant y\leqslant f(a)$，则下面的不等式成立：

$$xy\leqslant\int_0^x f(t)dt+\int_0^y g(u)du.$$

当且仅当 $y=f(x)$ 时，两边才相等.

c) 由 b) 推证下面两个不等式：

$xy\leqslant x\cdot\log x+e^{y-1}$ 　　对于 $x>0$，$y\in\boldsymbol{R}$；

$xy\leqslant ax^p+by^q$ 　　对于 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$p>1$，$q>1$，

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$a>0$，$b>0$ 与 $(pa)^q(qb)^p\geqslant 1$.

12. 高 阶 导 数

假设 f 是由 Banach 空间 E 的开子集 A 到 Banach 空间 F 的连续可微映射，则 Df 是 A 到 Banach 空间 $\mathscr{L}(E;F)$ 的连续映射．如果这个映射在点 $x_0\in A$（相应地，在 A 中）是可微的，我们就说 f 在 x_0（相应地，在 A 中）是**二次可微的**．Df 在 x_0 的导数称为 f 在 x_0 的**二阶导数**，记为 $f''(x_0)$ 或 $D^2f(x_0)$．它是 $\mathscr{L}(E;\mathscr{L}(E;F))$ 的一个元素．但是由 (5.7.8) 已经知道：最后这个空间可自然地看成空间 $\mathscr{L}(E,E;F)$（也写成 $\mathscr{L}_2(E;F)$），它是 $E\times E$ 到 F 的连续双线性映射空间．我们回忆，这一点是通过把 $u\in\mathscr{L}(E;\mathscr{L}(E,F))$ 看作双线性映射 $(s,t)\to(u\cdot s)\cdot t$ 而做到的．最后这个元素也写成 $u\cdot(s,t)$．

(8.12.1)假设 f 是在 x_0 二次可微的．那么对任意固定的 $t\in E$，A 到 F 的映射 $x\to Df(x)\cdot t$ 在点 x_0 的导数是 $s\to D^2f(x_0)\cdot(s,t)$.

如果我们注意到 $x\to Df(x)\cdot t$ 是由 $\mathscr{L}(E;F)$ 到 F 的线性映射 $u\to u\cdot t$ 与 E 到 $\mathscr{L}(E;F)$ 的映射 $x\to Df(x)$ 复合而成的，则上述结果可由(8.2.1)与(8.1.3)直接推得．

(8.12.2)如果 f 在 x_0 是二次可微的，则双线性映射 $(s,t)\to D^2f(x_0)\cdot(s,t)$ 是对称的，就是说

$$D^2f(x_0)\cdot(s,t)=D^2f(x_0)\cdot(t,s).$$

考虑区间 $[0,1]$ 上实变数 ξ 的函数：

$$g(\xi)=f(x_0+\xi s+t)-f(x_0+\xi s),$$

其中 s, t 满足：$\|s\|\leqslant\frac{1}{2}r$, $\|t\|\leqslant\frac{1}{2}r$，而且以 x_0 为中心 r 为半径的球含在 A 中．由(8.6.2)我们得到

$$\|g(1)-g(0)-g'(0)\|\leqslant\sup_{0<\xi<1}\|g'(\xi)-g'(0)\|.$$

而据(8.4.1)

$$g'(\xi)=(f'(x_0+\xi s+t)-f'(x_0-\xi s))\cdot s$$

$$= ((f'(x_0+\xi s+t)-f'(x_0))-(f'(x_0+\xi s)-f'(x_0)))\cdot s.$$

据假设，任给 $\varepsilon>0$，存在 $r'\leqslant r$ 使对于 $\|s\|\leqslant\frac{1}{2}r'$，$\|t\|\leqslant\frac{1}{2}r'$，有

$$\|f'(x_0+\xi s+t)-f'(x_0)-f''(x_0)\cdot(\xi s+t)\|\leqslant\varepsilon(\|s\|+\|t\|)$$

与

$$\|f'(x_0+\xi s)-f'(x_0)-f''(x_0)\cdot(\xi s)\|\leqslant\varepsilon\|s\|,$$

于是

$$\|g'(\xi)-(f''(x_0)\cdot t)\cdot s\|\leqslant 2\varepsilon\|s\|\cdot(\|s\|+\|t\|).$$

因此

$$\|g(1)-g(0)-(f''(x_0)\cdot t)\cdot s\|\leqslant 6\varepsilon\|s\|(\|s\|+\|t\|).$$

但是 $g(1)-g(0)=f(x_0+s+t)-f(x_0+t)-f(x_0+s)+f(x_0)$ 是关于 s，t 对称的，于是，通过交换 s，t 我们得到

$$\|(f''(x_0)\cdot t)\cdot s-(f''(x_0)\cdot s)\cdot t\|\leqslant 6\varepsilon(\|s\|+\|t\|)^2.$$

这个不等式只对于 $\|s\|\leqslant\frac{1}{2}r'$，$\|t\|\leqslant\frac{1}{2}r'$成立；但如果用 λs 与 λt 代替 s 与 t，则两边都有定义且都乘了 $|\lambda|^2$. 于是上述结果对于 E 中所有的 s 与 t 都正确；特别地，对 $\|s\|=\|t\|=1$ 正确，这表明(据(5.7.7))：对于所有 s 与 t，都有

$$\|f''(x_0)\cdot(t,s)-f''(x_0)\cdot(s,t)\|\leqslant 24\varepsilon\|s\|\cdot\|t\|,$$

由于 ε 是任意的，这就完成了证明.

特别地，

(8.12.3) 设 A 是 $\boldsymbol{R}^n$（相应地，$\boldsymbol{C}^n$）中的开集．如果 A 到 Banach 空间 F 的映射 f 在 x_0 是二次可微的，则诸偏导数 D_if 在 x_0 都是可微的，而且对于 $1\leqslant i\leqslant n$，$1\leqslant j\leqslant n$，

$$D_iD_jf(x_0)=D_jD_if(x_0),$$

我们只须对 t 的特殊值应用(8.12.1)，并注意：对于 $s=(\xi_i)$，$t=(\eta_i)$，二阶导数的 $D^2f(x_0)\cdot(s,t)=(D^2f(x_0)\cdot s)\cdot t$ 的值是

$$\sum_{i,j}'(D_iD_jf(x_0))\xi_i\eta_j \text{ (见 (8.10))}.$$

现在对 p 用归纳法，把开子集 $A\subset E$ 到 F 的 p 次可微映射 f 定义为这样一个 $p-1$ 次可微映射，即它的 $p-1$ 阶导数 $D^{p-1}f$ 在 A 中是可微的. 我们把导数 $D(D^{p-1}f)$ 称为 f 的 p 阶导数，并记为 D^pf 或 $f^{(p)}$. 元素 $D^pf(x_0)$ 被看成空间 $\mathscr{L}_p(E;F)$——它是 E 到 F 的 p 元线性连续映射空间——的一个元素，把它写成

$$(t_1,t_2,\cdots,t_p)\to D^pf(x_0)\cdot(t_1,\cdots,t_p).$$

由(8.12.1)我们知道映射

$$t_1\to D^pf(x_0)\cdot(t_1,t_2,\cdots,t_p)$$

是映射

$$x\to D^{p-1}f(x)\cdot(t_2,\cdots,t_p)$$

在 x_0 的导数.

把(8.12.2)一般化，得

(8.12.4) 如果 f 在 A 中是 p 次可微的，则多重线性映射 $D^pf(x)$ 对每个 $x\in A$ 都是对称的.

这可由对 p 用归纳法而证明. 设 $t_3,\cdots,t_p$ 是固定的，考虑映射 $x\to g(x)=D^{p-2}f(x)\cdot(t_3,\cdots,t_p)$. 由前面的注记推得: g 在 x 的二阶导数是

$$(t_1,t_2)\to D^pf(x)\cdot(t_1,t_2,t_3,\cdots,t_p).$$

于是由(8.12.2)得出

(8.12.4.1) $$D^pf(x)\cdot(t_2,t_1,t_3,\cdots,t_p)=D^pf(x)\cdot(t_1,t_2,t_3,\cdots,t_p).$$

另一方面，对于附标集 $\{2,3,\cdots,p\}$ 的任意排列 σ，归纳假设给出

$$D^{p-1}f(x)\cdot(t_{\sigma(2)},t_{\sigma(3)},\cdots,t_{\sigma(p)})=D^{p-1}f(x)\cdot(t_2,t_3,\cdots,t_p),$$

在等号两边取一阶导数(其中 t_i 是固定的)，我们得到

(8.12.4.2) $$D^pf(x)\cdot(t_1,t_{\sigma(2)},\cdots,t_{\sigma(p)})=D^pf(x)\cdot(t_1,t_2,\cdots,t_p).$$

把(8.12.4.1)与(8.12.4.2)结合起来我们首先看到，当附标 1

与任何别的附标交换时，$D^pf(x)\cdot(t_1,t_2,\cdots,t_p)$ 不变，其次当 $\geqslant 2$ 的任意两个附标互换时，它也不变．但由这种调换即得出附标 $1,2,\cdots,p$ 的任意排列，这就是要证明的．

(8.12.5) 如果在 A 中，f 是 m 次可微的，而 D^mf 是 n 次可微的，则 f 在 A 中是 $m+n$ 次可微的，并且 $D^{m+n}f=D^n(D^mf)$．

当 $n=1$ 时这就是定义．应用定义，结论可由对 n 的归纳法得证．

(8.12.6) 假设 $f=(f_1,\cdots,f_m)$ 是由 E 的开子集 A 到 Banach 空间的积 $F_1\times\cdots\times F_m$ 中的连续映射．为使 f 在 A 中是 p 次可微的，必须且只须每一个 f_i 在 A 中都是 p 次可微的；且这时，

$$D^pf=(D^pf_1,\cdots,D^pf_m).$$

这可由(8.1.5)通过对 p 用归纳法得出．

(8.12.7) 设 A 是 $\boldsymbol{R}^n$(相应地，$\boldsymbol{C}^n$) 中的开集．如果 A 到 Banach 空间 F 的映射 f 是 p 次可微的，则对于 $t_i=(\xi_{ij})$ $(1\leqslant i\leqslant p,1\leqslant j\leqslant n)$，我们有

$$D^pf(x)\cdot(t_1,\cdots,t_p)=\sum_{(j_1j_2,\cdots,j_p)}D_{j_1}D_{j_2}\cdots D_{j_p}f(x)\xi_{1,j_1}\xi_{2,j_2}\cdots\xi_{p,j_p}.$$

这个和取遍由$[1,n]$中整数组成的所有 n^p 个不同的排列$(j_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$．

利用(8.10)，这是可由对 p 用归纳法得证．n^p 个元素 $D_{j_1}D_{j_2}\cdots D_{j_p}f(x)$ 称为 f 在 x 的 **p 阶偏导数**，其中仅由于附标的排列不同的任意两个，据(8.12.4)是相等的．我们说 f 在 A 中是 **p 次连续可微的**，如果 D^pf 存在并且在 A 中连续．

(8.12.8) 设 A 是 $\boldsymbol{R}^n$(相应地，$\boldsymbol{C}^n$) 的开子集，f 是 A 到 Banach 空间 F 的连续映射．如果 f 的 p 阶的 n^p 个偏导数存在并且在 A 中是连续的，则 f 在 A 中 p 次连续可微．

对于 $p=1$，这就是(8.9.1)（推广到 n 个空间之积）．一般地，我们只要对 p 用归纳法与应用公式(8.12.7)即可．

我们说 f 在 A 中是**无限次可微的**，如果对任意 p，它都是 p 次可微的．这时所有的导数 D^pf 在 A 中都是无限次可微的．

(8.12.9) **例**. 任意连续双线性映射是无限次可微的，并且它的阶数 $\geqslant 3$ 的所有导数都是 0.

由(8.1.4)推知连续双线性映射在 (x, y) 的导数是 $(s, t) \to [x \cdot t] + [s \cdot y]$. 把这个线性映射记作 $g(x, y) \in \mathscr{L}(E \times F; G)$. 据假设与(5.5.1)，存在 $c > 0$ 使得在 $E \times F$ 中 $\|[x \cdot y]\| \leqslant c\|x\| \cdot \|y\|$. 据 $\mathscr{L}(E \times F; G)$ 中范数的定义(5.7.1)我们有

$$\|g(x, y)\| \leqslant c(\|x\| + \|y\|) \leqslant 2c\sup(\|x\|, \|y\|).$$

于是 g 为 $E \times F$ 到 $\mathscr{L}(E \times F; G)$ 的连续线性映射. 因此 $(x, y) \to [x \cdot y]$ 是二次可微的，并且它在 (x, y) 的二阶导数(据(8.1.3)与(8.12.1))是

$$((s_1, t_1), (s_2, t_2)) \to [s_1 \cdot t_2] + [s_2 \cdot t_1].$$

这是一个与 (x, y) 无关的映射，于是得到结果.

(8.12.10) 设 E, F, G 是三个 Banach 空间，A 是 E 的开子集，B 是 F 的开子集. 如果 f 是 A 到 B 的 p 次连续可微映射，g 是 B 到 G 的 p 次连续可微映射，则 $h = g \circ f$ 是 A 到 G 的 p 次连续可微映射.

对于 $p = 1$，结果可由 (8.2.1) 与下述事实推出，即据(5.7.5)，$(u, v) \to v \circ u$ 是 $\mathscr{L}(E; F) \times \mathscr{L}(F; G)$ 到 $\mathscr{L}(E; G)$ 的连续双线性映射. 现在对 p 用归纳法. 由于 $h'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x)$ 以及 f 与 g' 是 $p-1$ 次连续可微的，因而由归纳假设 $g' \circ f$ 是 $p-1$ 次连续可微的. 于是由 (8.12.6) 与 (8.12.9) 推得 h' 是 $p-1$ 次连续可微的. 因此据(8.12.5)，h 是 p 次连续可微的.

(8.12.11) **例**. 假设存在 Banach 空间 E 到 Banach 空间 F 上的一个线性同胚，并设 $\mathscr{H} \subset \mathscr{L}(E; F)$ 是 $\mathscr{L}(E; F)$ 中那些同胚组成的开集(8.3.2). 则 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{H}^{-1}$ 上的映射 $u \to u^{-1}$ 是无限次可微的. 我们只须用对 p 的归纳法证明 $u \to u^{-1}$ 是 p 次可微的，据(8.3.2)，这个性质对于 $p = 1$ 是成立的. 在 $\mathscr{L}(F; E) = M$ 中给定 v 与 w，设 $f(v, w)$ 是 $L = \mathscr{L}(E; F)$ 到 M 的线性映射 $t \to -v \circ t \circ w$. 显然 f 是双线性的(把 $M \times M$ 映射到 $\mathscr{L}(L; M)$)，又(5.7.5) 证明 $\|f(v, w)\| \leqslant \|v\| \cdot \|w\|$，于是 f 是连续的. 因此，据

(8.12.9)，f 是无限次可微的．据 (8.3.2)，$u\to u^{-1}$ 的导数是映射 $u\to f(u^{-1},u^{-1})$．由(8.12.6)与(8.12.10)推出：如果 $u\to u^{-1}$ 是 p 次可微分的，则 $u\to f(u^{-1},u^{-1})$ 也是 p 次可微的．因此，根据(8.12.5)，$u\to u^{-1}$ 是 $p+1$ 次可微的．

附注．当 f 是区间 $J\subset \boldsymbol{R}$ 到实 Banach 空间 F 的映射时，我们已在前面(8.4节)定义了 f 在 $\xi_0\in J$ 关于 J 的导数的概念．应用对 p 的归纳法，我们把 f 在 ξ_0 关于 J 的 p 阶导数定义为 f 的 $p-1$ 阶导数(为此，假定它在 ξ_0 的在 J 中的某个邻域中存在)在 ξ_0 (关于 J)的导数．它是 F 的一个元素，仍记为 $D^pf(\xi_0)$ 或 $f^{(p)}(\xi_0)$．如果 ξ_0 是 J 的内点，则对于一般映射定义的那种 p 阶导数与 $\boldsymbol{R}^p$ 到 F 的多重线性映射 $(\zeta_1,\cdots,\zeta_p)\to f^{(p)}(\xi_0)\zeta_1\zeta_2\cdots\zeta_p$ 一致．

问　　题

1) 设 f 是区间 $I\subset\boldsymbol{R}$ 到 Banach 空间 E 的 n 次可微映射.试证：对于任意 $x\in I$，只要 $\frac{1}{x}\in I$ 就有

$$\frac{1}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)=(-1)^nD^n\left[x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

(对 n 用归纳法)．

2) a) 设 ρ 是在 $\boldsymbol{R}$ 上用下面的条件定义的函数：

$$\rho(t)=\exp\left(-\frac{1}{(1+t)^2}-\frac{1}{(1-t)^2}\right),\quad -1<t<1,$$

$$\rho(t)=0,\qquad t\leqslant -1 \text{ 或 } t\geqslant 1.$$

试证：函数 ρ 在 $\boldsymbol{R}$ 中是无限次可微的．(对任意 $n>0$，用关系 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^ne^{-x}=0$.)

b) 在这个问题中，我们允许用下面的方法把在 $\boldsymbol{R}$ 的紧区间 $[a,b]$ 上定义的任意正则函数 f 延拓到整个空间 $\boldsymbol{R}$，即对于 $t<a$ 与 $t>b$ 使它取值 0．然后我们把积分 $\int_a^b f(t)dt$ 写成 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt$，它也等于 $\int_c^d f(t)dt$，对于 $c\leqslant a$ 与 $d\geqslant b$．

对于任意这样的函数 f，设

$$f_n(t) = nc\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\rho(n(t-s))ds = nc\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)\rho(ns)ds,$$

其中 $1/c = \int_{-1}^{+1}\rho(t)dt$ (f 用 ρ 的"正则化". 我们记为 $\rho_n(t) = nc\rho(nt)$ 与 $f_n = f * \rho_n$)(见 14.11.1).证明:f_n 是无限次可微的,并且在一紧区间的余集中变为 0 (利用(8.11.2)).如果 f 在$[a,b]$中是实值的与递增的(相应地,严格递增的,凸的),则 f_n 在$\left[a+\frac{1}{n},\ b-\frac{1}{n}\right]$中是递增的 (相应地,严格递增的,凸的). 如果 f (延拓到 $\boldsymbol{R}$)是 p 次连续可微的,则

$$\begin{aligned} D^p f_n(t) &= nc\int_{-\infty}^{+\infty}(D^p f(s))\rho(n(t-s))ds \\ &= nc\int_{-\infty}^{+\infty}(D^p f(t-s))\rho(ns)ds. \end{aligned}$$

c) 试证: 对于任意 n,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt.$$

d) 如果 f (延拓到 $\boldsymbol{R}$) 是连续的(相应地,p 次连续可微的), 则序列(f_n) (相应地,$(D^p f_n)$)在 $\boldsymbol{R}$ 中一致收敛于 f(相应地,$D^p f$).

e) 当只设 f 在 $[a, b]$ 中是正则时,$f_n(t_0)$ ($t_0 \in \boldsymbol{R}$) 趋于什么极限?(首先考虑 f 是阶梯函数的情形,然后利用(7.6.1))

f) 试证: 对于 $[a, b]$ 中的任意正则函数 f 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f(t) - f_n(t)|dt = 0.$$

3) 设 f 是 $]-1,1[$ 中定义的 n 次可微实函数,并且在该区间上$|f(t)| \leqslant 1$.

a) 设 J 是含在 $]-1,1[$ 中的一个区间, $m_k(J)$ 是 $|f^{(k)}(t)|$ 在 J 中的最小值. 试证: 如果 J 被分解成三个相邻区间 J_1, J_2, J_3 并且 J_2 的长为 μ, 那么,对 $k \leqslant n$.

$$m_k(J) \leqslant \frac{1}{\mu}\ (m_{k-1}(J_1) + m_{k-1}(J_3))$$

(应用中值定理). 由此不等式推证: 如果 J 的长为 λ, 则

$$m_k(J) \leqslant \frac{2^{k(k+1)/2}k^k}{\lambda^k}$$

(对 k 用归纳法).

b) 由 a) 推证: 存在一个只由 n 决定的数 α_n 使得如果 $|f^{(n)}(0)| \geqslant \alpha_n$,

则 $f^{(n)}(t)=0$ 在 $]-1,1[$ 中至少有 $n-1$ 个不同的根.（对 k 用归纳法证明：存在 $]-1,1[$ 中的点的严格递增序列 $x_{k,1}<x_{k,2}<\cdots<x_{k,k}$ 使得对于 $1\leqslant i\leqslant k-1$ 有 $f^{(k)}(x_{k,i})f^{(k)}(x_{k,i+1})<0$；应用 Rolle 定理.）

4）设 E, F 是两个 Banach 空间，A 是 E 的开子集，f 是 A 到 F 的一个可微映射. 设 $x_0\in A$, $h_i\in E(1\leqslant i\leqslant n)$，使对于 $0\leqslant\xi_i\leqslant 1$, $1\leqslant i\leqslant n$ 有 $x_0+\sum_{i=1}^{n}\xi_i h_i\in A$. 我们对 $k\ (1\leqslant k\leqslant n)$ 用归纳法定义

$$\Delta^1 f(x_0;h_1)=f(x_0+h_1)-f(x_0),$$
$$\Delta^k f(x_0;h_1,\cdots,h_k)=\Delta^{k-1}g_k(x_0;h_1,\cdots,h_{k-1}),$$

其中 $g_k(x)=f(x+h_k)-f(x)$.

a）试证：

$$\|\Delta^n f(x_0;h_1,\cdots,h_n)\|\leqslant\|h_1\|\cdot\|h_2\|\cdots\|h_n\|\sup_{z\in P}\|D^n f(z)\|,$$

其中 P 是点 $x_0+\sum_{i=1}^{n}\xi_i h_i$, $0\leqslant\xi_i\leqslant 1$ 的集合.（对 n 用归纳法.）

b）由 a）推证：

$$\|\Delta^n f(x_0;h_1\cdots h_n)-D^n f(x_0)\cdot(h_1,\cdots,h_n)\|$$
$$\leqslant\|h_1\|\cdot\|h_2\|\cdots\|h_n\|\sup_{z\in P}\|D^n f(z)-D^n f(x_0)\|.$$

5）设 f 是 R^2 的开子集 A 到 Banach 空间 E 中的连续可微映射. 假设在 $(a,b)\in A$ 的邻域 V 中导数 $D_2(D_1 f)$ 存在并且连续.

a）设 $(x,y)\in V$. 试证：对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得关系 $\|h\|\leqslant\delta$, $|k|\leqslant\delta$ 蕴含

$$\|\Delta^2 f(x,y;h,k)-D_2D_1 f(x,y)hk\|\leqslant\varepsilon|hk|,$$

这里我们把 $\Delta^2 f((x,y);(h,0),(0,k))$ 记为 $\Delta^2 f(x,y;h,k)$.（把中值定理应用于函数

$$g(t)=f(x+t,y+k)-f(x+t,y)-D_2D_1 f(x,y)tk$$

并利用(8.6.2)）.

b）试证：$D_1(D_2 f)$ 在 V 中存在并且等于 $D_2(D_1 f)$（利用 a)）.

c）举出一个满足上述假设的函数 f 的例子使得 $D_1(D_1 f)$ 与 $D_2(D_2 f)$ 处处不存在(参见 8.4 节问题 1).

d）把 a）和 b）推广到 R^2 换成两个 Banach 空间的积 $F_1\times F_2$ 的情形.

6）设 f 是在 R^2 中由下述条件定义的实函数：$f(0,0)=0$，而对于

$(x, y) \neq (0, 0)$ 有 $f(x, y) = xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$。试证：所有四个导数 $D_1(D_1f), D_1(D_2f)$，$D_2(D_1f)$，$D_2(D_2f)$ 在 $\boldsymbol{R}^2$ 中处处存在，但是在点 $(0,0)$，$D_1(D_2f) \neq D_2(D_1f)$。

7）记号与 8.9 节问题 2 中的相同，对每个 $t \in \boldsymbol{R}$，设 $g_n(t) = t/(1 + n|t|)$ 与 $f_n(t) = \int_0^t g_n(u)du$。试证：函数 $f:(\xi_n) \to (f_n(\xi_n))$ 在 E 中是连续可微的，而且对于每个 $y = (\eta_n) \in E$，映射 $x \to f'(x) \cdot y$ 在 $x = 0$ 是可微的，但是 f' 在点 $x = 0$ 是不可微的(参看(8.12.1))。

8）设 E，F 是两个 Banach 空间，A 是 E 的开子集，$\mathscr{D}_F^{(p)}(A)$ 是由满足下面条件的那些 A 到 F 的 p 次连续可微映射 f 组成的向量空间，即 f 及其所有的导数 $D^k f(1 \leqslant k \leqslant p)$ 在 A 中都是有界的。对于任意 $f \in \mathscr{D}_F^{(p)}(A)$，设

$$\|f\|_p = \sup_{x \in A}(\|f(x)\| + \|Df(x)\| + \cdots + \|D^p f(x)\|);$$

试证：$\|f\|_p$ 是 $\mathscr{D}_F^{(p)}(A)$ 上的一个范数，而且对于此范数这个空间成为一个 Banach 空间(利用(8.6.3))。映射 $f \to Df$ 是 $\mathscr{D}_F^{(p)}(A)$ 到 $\mathscr{D}_{\mathscr{L}(E;F)}^{(p-1)}(A)$ (对于 $p = 1$，是到$\mathscr{D}_{\mathscr{L}(E;F)}^{\infty}(A)$)的一个连续线性映射。

9）设 E，F，G 是三个 Banach 空间，L，M，N 分别是 Banach 空间 $\mathscr{D}_F^{(p)}(E)$，$\mathscr{D}_G^{(p)}(F)$，$\mathscr{D}_G^{(p)}(E)$。对于 $f \in L$，$g \in M$，设 $\Phi(f,g) = g \circ f \in N$。

a）设 $(f_0, g_0) \in L \times M$。试证：如果 $D^p g_0$ 在 F 中一致连续，则映射 Φ 在 (f_0, g_0) 连续(对 p 用归纳法)。如果 E，F，G 都是有限维的，则 Φ 在 $L \times M$ 中连续(利用(3.16.5))。

b）对于 $1 \leqslant k \leqslant p$，设 $N_k = \mathscr{D}_G^{(p-k)}(E)$，其中 $\mathscr{D}_G^{(0)}(E) = \mathscr{C}_G^{\infty}(E)$。试证：$\Phi$ 作为 $L \times M$ 到 N_1 的映射，在每一点都是连续的。为要 Φ (作为$L \times M$ 到 N_1 的映射)在 (f_0, g_0) 是可微的，只须 $D^p g_0$ 是一致连续的，而且此导数 $D\Phi$ 就是线性映射

$$(u, v) \to ((Dg_0) \circ f_0) \cdot u + v \circ f_0.$$

c）设 U_f 是M到N的线性映射 $g \to g \circ f$。试证 U_f 是连续的。对于任意 $k \leqslant p$，我们也可以认为 U_f 是 $\mathscr{L}(M; N_k)$ 的一个元素。试证：L 到 $\mathscr{L}(M; N_1)$ 的映射 $f \to U_f$ 是连续的，且 L 到 $\mathscr{L}(M; N_2)$ 的映射 $f \to U_f$ 是可微的，而且元素 $DU_f \in \mathscr{L}(L; \mathscr{L}(M; N_2))$ 就是线性映射 $(u, v) \to ((Dv) \circ f) \cdot u$。

d）由 b) 与 c) 推证：作为 $L \times M$ 到 N_k 的映射，Φ 是 $k - 1$ 次可微的。

10）设 f 是实值二次可微函数，在 Banach 空间 E 的开子集 A 上定义。

a）假设：在点 $x_0 \in A$，有 $Df(x_0) = 0$，并且存在一常数 $c > 0$ 使得，对于每一个 $t \in E$，都有 $D^2 f(x_0) \cdot (t, t) \leqslant -c\|t\|^2$。试证：$f$ 在点 x_0 达到严

格极大值(3.9 节，问题 6)。如果E是有限维的，则上述条件可以用下面的条件代替，即对于E中的任意 $t\neq 0$, $D^2f(x_0)\cdot(t,t)<0$（利用E中球面 $\|t\|=1$ 的紧性)。

b) 假设A是一开球，f在A中有上界，且存在一实数a使 $f(x)\geqslant a$ 的所有点 $x\in A$ 的集F是E中非空闭集（因此是完备子空间)，最后对每个 $x\in A$ 与 $t\in E$ 有 $D^2f(x)\cdot(t,t)\leqslant -c\|t\|^2$. 试证，在这些条件下，$f$在$A$的唯一点上达到极大值。（设 $m=\sup f(x)$，它是有限数；对每个满足 $a\leqslant m-\varepsilon<m$ 的 $\varepsilon>0$，设 $F_\varepsilon\subset F$ 是满足 $f(x)\geqslant m-\varepsilon$ 的 $x\in A$ 的集。证明F_ε的直径与ε同趋于 0。为此首先证明下列引理：若h是$[0,1]$上的二次连续可微实函数且在 $[0,1]$ 中 $h''(t)\leqslant b$，则 $h(0)-2h(1/2)\leqslant b/4$。对$A$中的$x$与$x+\xi$应用引理于函数 $t\mapsto f(x+t\xi)$.)

11) a) 设f是在开区间 $I\subset\mathbf{R}$ 上定义的实值函数，并且在I中可微。设 $[a,b]\subset I$，并且假设 f'' 在开区间 $]a,b[$ 中存在，但是不必假设f'在a与b是连续的（参见 8.7 节问题 6)。证明：存在 $c\in\,]a,b[$ 使得 $f'(b)-f'(a)=(b-a)f''(c)$（利用 8.5 节问题 3)。

b) 对于在I上定义而在 Hilbert 空间中取值的函数，与上述性质相对应的性质是什么（参见 8.5 节问题 6)?

13. 微 分 算 子

设A是$\mathbf{R}^n$(相应地，$\mathbf{C}^n$)中的一个开集，F是一实(相应地，复) Banach空间．我们用$\mathscr{E}_F^{(p)}(A)$表示A到F的所有p次连续可微映射的集．据(8.12.10)显然$\mathscr{E}_F^{(p)}(A)$是一个实(相应地，复)向量空间．更一般地，(8.12.10)表明$\mathscr{E}_{\mathbf{R}}^{(p)}(A)$(相应地，$\mathscr{E}_{\mathbf{C}}^{(p)}(A)$)是一个环，而$\mathscr{E}_F^{(p)}(A)$是该环上的一个模．对于任意这样的非负整数组 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\boldsymbol{\alpha}$, $|\boldsymbol{\alpha}|=\sum_{i=1}^{n} d_i\leqslant p$，设 $M_\alpha=X_1^{\alpha_1}X_2^{\alpha_2}\cdots X_n^{\alpha_n}$，并定义 D^α 或 D_{M_α} 是 $\mathscr{E}_F^{(p)}(A)$ 到 $\mathscr{E}_F^{(p-|\alpha|)}(A)$ 的映射 $D_1^{\alpha_1}D_2^{\alpha_2}\cdots D_n^{\alpha_n}$. **线性微分算子**是线性组合 $D=\sum_{\alpha} a_\alpha D^\alpha$，其中 $|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant p$，而 a_α 是在A中定义的连续纯量函数．如果对于 $|\boldsymbol{\alpha}|>K$ 有 $a_\alpha=0$，并且每个 a_α

都是 $(p-k)$ 次连续可微的，则D把 $\mathscr{E}_F^{(p)}(A)$ 线性地映射到 $\mathscr{E}_F^{(p-k)}(A)$.

(8.13.1) 如果算子 $\sum_\alpha a_\alpha D^\alpha$ 恒等于0，则每个函数 a_α 在A中恒等于0.

对于 $f(x)=c\cdot\exp(\lambda_1\xi_1+\cdots+\lambda_n\xi_n)$，其中 $c\neq 0$ 在 F 中，而 λ_i 是任意常数，记 $Df=0$；则由(8.8)与(8.4.1)我们得到（在 A 中恒有）

$$c\cdot\left(\sum_\alpha a_\alpha(x)M_\alpha(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\right)\exp(\lambda_1\xi_1+\cdots+\lambda_n\xi_n)=0,$$

此式等价于 $\sum_\alpha a_\alpha(x)M_\alpha(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=0$；对于任一指定的 $x\in A$，这蕴含对每个 $\boldsymbol{\alpha}$ 都有 $a_\alpha(x)=0$，因为 λ_i 是任意的.

由此可知，线性微分算子的系数 a_α 是唯一确定的；使 $a_\alpha\neq 0$ 的 $|\boldsymbol{\alpha}|$ 的最大值称为D的阶数. 这样，对每个次数 $\leqslant p$ 且具有常系数的多项式 $P=\sum_\alpha b_\alpha M_\alpha$，都能对应一个阶数 $\leqslant p$ 的线性算子 $D_P=\sum_\alpha b_\alpha D^\alpha$. 显然有 $D_{P_1+P_2}=D_{P_1}+D_{P_2}$，并且由(8.12.3)推知，如果 P_1P_2 的总次数 $\leqslant p$，则有 $D_{P_1P_2}=D_{P_1}D_{P_2}$. 特别地，由(8.12.7)推知：对于固定的 ξ_{ij}，算子 $f\to Df$，这里

$$Df(x)=D^pf(x)\cdot(t_1,\cdots,t_p)$$

可以写成

$$\prod_{i=1}^{p}(\xi_{i1}D_1+\cdots+\xi_{in}D_n).$$

(8.13.2) (Leibniz 公式). 设 $P(X_1,\cdots,X_n)$ 是一个次数 $\leqslant p$ 的多项式，并且假设 $P(X_1+Y_1,\cdots,X_n+Y_n)=\sum_k \gamma_k M_k'(X_1,\cdots,X_n)M_k''(Y_1,\cdots,Y_n)$，其中 M_k' 与 M_k'' 是单项式. 设 $(x,y)\to[x\cdot y]$ 是$E\times F$到G的连续双线性映射. 那么，对于

任意映射 $f\in\mathscr{E}_E^{(p)}(A)$ 与任意映射 $g\in\mathscr{E}_F^{(p)}(A)$，$[f\cdot g]$ 属于 $\mathscr{E}_G^{(p)}(A)$，而且我们有

$$D_P[f\cdot g]=\sum_k \gamma_k[D_{M'_k}f\cdot D_{M''_k}g].$$

对 P 是单项式 M 的情形证明这个公式就够了. 对 P 的总次数用归纳法，可以假设 $P=X_iM$，于是 $D_P=D_iD_M$. 据假设，有

$$D_M[f\cdot g]=\sum_k \gamma_k[D_{M'_k}f\cdot D_{M''_k}g].$$

故由(8.1.4)得

$$D_P[f\cdot g]=\sum_k \gamma_k([D_iD_{M'_k}f\cdot D_{M''_k}g]+[D_{M'_k}f\cdot D_iD_{M''_k}g]),$$

我们可以把它写成

$$\sum_h \gamma'_h[D_{N'_h}f\cdot D_{N''_h}g],$$

这里求和取遍所有这样的单项式对

$$(N'_h(X_1,\cdots,X_n),\ N''_h(Y_1,\cdots,Y_n)),$$

使得对某一附标 k 或者有 $N'_h=X_iM'_k$ 与 $N''_h=M''_k$，或者有 $N'_h=M'_k$ 与 $N''_h=Y_iM''_k$. 对每个适当的附标 h，都恰好有一个那样的附标 k，因而有 $\gamma'_h=\gamma_k$. 于是结果是显然的.

问　　题

1)设 A 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的开子集，E, F, G 是三个 Banach 空间，$(x,y)\to[x\cdot y]$ 是 $E\times F$ 到 G 的连续双线性映射. 试证：$\mathscr{D}_E^{(p)}(A)\times\mathscr{D}_F^{(p)}(A)$ 到 $\mathscr{D}_G^{(p)}(A)$ (8.12 节，问题 8)的映射 $(f,g)\to[f\cdot g]$ 是连续的.

2) 设 I 是 $\boldsymbol{R}$ 中任意紧区间，J 是 I 的开邻域. 试证：存在 $\boldsymbol{R}$ 到 $[0,1]$ 的无限次可微映射 f，它在 I 中等于 1，而在 J 的余集中等于 0 (考虑函数 $g*\rho_n$ (8.12 节，问题 2)，其中 g 在这样一个紧区间 K: $I\subset K\subset J$ 中等于 1，而在 $\boldsymbol{R}-K$ 中等于 0).

如果 u 是 $\boldsymbol{R}$ 到 Banach 空间 E 的无限次可微映射，试证：存在 $\boldsymbol{R}$ 到 E 的无限次可微映射 v，使得在 I 中 $v(t)=u(t)$，在 $\boldsymbol{R}-J$ 中 $v(t)=0$.

14. Taylor 公式

(8.14.1) 设 I 是 $\boldsymbol{R}$ 中的一个开区间，f, g 分别是 $\mathscr{E}_E^{(p)}(I)$ 与 $\mathscr{E}_F^{(p)}(I)$ 中的两个函数，$(x, y) \to [x \cdot y]$ 是 $E \times F$ 到 G 的连续双线性映射. 那么

$$[f \cdot D^p g] - (-1)^p [D^p f \cdot g] = D([f \cdot D^{p-1} g] - [Df \cdot D^{p-2} g] + \cdots + (-1)^{p-1} [D^{p-1} f \cdot g]).$$

这可应用(8.1.4)直接证实.

(8.14.2) 设 I 是 $\boldsymbol{R}$ 中的一个开区间，f 是 $\mathscr{E}_E^{(p)}(I)$中的函数. 则对 I 中的任意点偶 α, ξ，都有

$$f(\xi) = f(\alpha) + \frac{\xi - \alpha}{1!} f'(\alpha) + \frac{(\xi - \alpha)^2}{2!} f''(\alpha) + \cdots + \frac{(\xi - \alpha)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p-1)}(\alpha) + \int_\alpha^\xi \frac{(\xi - \zeta)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p)}(\zeta) d\zeta.$$

把 (8.14.1) 应用到双线性映射 $(\lambda, x) \to \lambda x$ 与函数 $g(\zeta) = (\xi - \zeta)^{p-1}/(p-1)!$ 上，然后在两边取从 α 到 ξ 的积分.

(8.14.3) 设 E, F 是两个 Banach 空间，A 是 E 的一个开子集，f 是 A 到 F 的 p 次连续可微映射. 那么，如果连接 x 与 $x + t$ 的线段在 A 中，则我们有

$$f(x + t) = f(x) + \frac{1}{1!} f'(x) \cdot t + \frac{1}{2!} f''(x) \cdot t^{(2)} + \cdots + \frac{1}{(p-1)!} f^{(p-1)}(x) \cdot t^{(p-1)} + \left(\int_0^1 \frac{(1 - \zeta)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p)}(x + \zeta t) d\zeta\right) \cdot t^{(p)},$$

其中 $t^{(k)}$ 表示 $(t, t, \cdots, t)$ (k 次). 特别地，对于每个 $\varepsilon > 0$，存在 $r > 0$ 使得对于 $\|t\| \leqslant r$，有

$$\|f(x + t) - f(x) - \frac{1}{1!} f'(x) \cdot t - \frac{1}{2!} f''(x) \cdot t^{(2)} - \cdots$$

$$-\frac{1}{p!}f^{(p)}(x)\cdot t^{(p)}\| \leqslant \varepsilon\|t\|^p.$$

为获得第一个公式，把(8.14.2)应用于区间 [0, 1] 上的函数 $g(\xi)=f(x+\xi t)$。据(8.12.10) g 是 p 次连续可微的；利用(8.4.1)与(8.1.3)，并对 k 用归纳法立即可知 $g^{(k)}(\xi)=f^{(k)}(x+\xi t)\cdot t^{(k)}$。为得出第二个公式，注意，据 $f^{(p)}$ 的连续性，可以选择 r，使得对于 $0\leqslant\zeta\leqslant 1$ 与 $\|t\|\leqslant r$，有 $\|f^{(p)}(x+\zeta t)-f^{(p)}(x)\|\leqslant p!\varepsilon$。然后由中值定理(8.7.7)给出

$$\left\|\int_0^1\frac{(1-\zeta)^{p-1}}{(p-1)!}f^{(p)}(x+\zeta t)d\zeta-\frac{1}{p!}f^{(p)}(x)\right\|\leqslant\varepsilon.$$

于是结论由(5.5.7)推得。

问 题

1) n 阶 Legendre 多项式由下式定义：

$$P_n(t)=\frac{1}{2^n n!}D^n((t^2-1)^n).$$

a) 试证 P_n，准确到正数因子，是下述序列的第 n 项：在准 Hilbert 空间 $\mathscr{C}_C(I)$ 中，其中 $I=[-1,+1]$，将序列 (t_n) 用标准直交化方法所得的序列(6.6)。(利用(8.14.1)证明：$P_n(t)$ 与 t^m 的纯量积，当 $m<n$ 时，是 0.)

b) 试证 $P_n(1)=1$，$P_n(-1)=(-1)^n$ (利用(8.13.2))。

c) 试证：在三个相邻 Legendre 多项式之间存在下面的递推关系：

$$nP_n(t)-(2n-1)tP_{n-1}(t)+(n-1)P_{n-2}(t)=0.$$

(注意：如果选取 c_n 使 $P_n(t)-c_ntP_{n-1}(t)$ 的次数 $\leqslant n-1$，则它与 t^k 直交，其中 $k\leqslant n-3$，于是它必然是 P_n-2 与 P_n-1 的线性组合；还要利用 b).)

d) 试证：P_n 的所有根都是实的，单的并且都在 $]-1,1[$ 中(如果 P_n 只在 $]-1,1[$ 中的 $k\leqslant n-1$ 个点改变符号，则存在多项式 $g(t)=(t-t_1)\cdots(t-t_k)$ 使得对于 $-1\leqslant t\leqslant 1$，有 $P_n(t)g(t)\geqslant 0$ 试证：这导致与下述事实矛盾，即对于 $h<n$，$P_n(t)$ 与 t^h 是直交的)。

e) 试证：P_n 满足微分方程：

$$(1-t^2)P_n''(t)-2tP'(t)+n(n+1)P_n(t)=0$$

(证明：对于 $k<n$，$D((1-t^2)P_n'(t))$ 与 t^k 直交)。

2) a) 设 f 是定义在长度为 a 的区间 $I\subset \boldsymbol{R}$ 中的实的 k 次连续可微函数，且在 I 中有 $|f^{(k)}(t)|\geqslant c>0$. 对 n 用归纳法，试证当 $0<p\leqslant k$ 时，存在长度为 $a/4^p$ 的区间 $I_p\subset I$，使在 I_p 中不等式 $|f^{(k-p)}(t)|\geqslant ca^p/4^p$ 成立.

b) 设 f 是定义在长度为 a 的区间 $I\subset \boldsymbol{R}$ 中的实的 k 次连续可微函数，对 $0\leqslant p\leqslant k$，设 $M_p=\sup\limits_{t\in I}|f^{(p)}(t)|$. 试证

$$M_{k-1}\leqslant\frac{8^{k-1}}{a^{k-1}}M_0+\frac{a}{2}M_k$$

(利用 a)).

c) 如 b) 的那些假设，并设 $k=2$ 与 $I=[-a/2,\ a/2]$. 试证对每个 $t\in I$ 有

$$|f'(t)|\leqslant\frac{2}{a}M_0+\frac{4t^2+a^2}{4a}M_2.$$

(利用 Taylor 公式展开 $f(a/2)-f(t)$ 与 $f(-a/2)-f(t)$). 由此不等式推证：若 $a\geqslant 2(M_0/M_2)^{1/2}$，则 $M_1\leqslant 2(M_0M_2)^{1/2}$. 再证明，在这个不等式中，数 2 不能用更小的数代替. (若仅假设 f' 有右导数 f''_d，且当 f' 是分段线性的，则不等式两边可以相等；然后利用 8.12 的问题 2d)).

d) 设 f 是定义在 $\boldsymbol{R}$ 上的实二次连续可微函数，且使 $M_0=\sup\limits_{t\in R}|f(t)|$ 与 $M_2=\sup\limits_{t\in R}|f''(t)|$ 是有限数. 试证 $M_1=\sup\limits_{t\in R}|f'(t)|$ 是有限的，且 $M_1\leqslant(2M_0M_2)^{1/2}$ (利用 c)). 在这个不等式中，$\sqrt{2}$ 不能用更小的数代替. (如 c) 中同样的方法).

e) 试证：若 f 是定义在 $\boldsymbol{R}$ 上的实的 k 次连续可微函数，且若 $M_0=\sup\limits_{t\in R}|f(t)|$ 与 $M_k=\sup\limits_{t\in R}|f^{(k)}(t)|$ 是有限数，则对 $1\leqslant p\leqslant k-1$，数 $M_p=\sup\limits_{t\in R}|f^{(p)}(t)|$ 都是有限的，且有

$$M_p\leqslant 2^{p(k-p)}M_0^{1-(p/k)}M_k^{p/k}.$$

(首先利用 b) 证明 M_{k-1} 是有限的，然后对 $k\geqslant 2$ 用归纳法与 d).)

3) 设 E, F 是两个 Banach 空间，A 是 E 中的一个开球(或者整个空间 E). 试证：在空间 $\mathscr{D}_F^{(p)}(A)$ 中，范数

$$\sup_{x\in A}(\|f(x)\|+\|D^pf(x)\|)$$

等价于(5.6) 8.12 节问题 8 中定义的范数 $\|f\|_p$ (利用问题 2c) 的结果).

4) 设 E 是 Banach 空间，(c_n) 是 E 中元素的任意序列.

a) 设 f 是 $\boldsymbol{R}$ 到 $[0,1]$ 的无限次可微映射，在 $[-1/2,1/2]$ 中等于 1，

而在$[-1,1]$的补集上为 0 (8.13，问题 2)． 考虑级数

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f(x/t_n)\frac{x^n}{n!}c_n.$$

试证适当选取 $t_n>0$ 的数列，这级数对每个 $x\in \mathbf{R}$ 收敛，且对每个整数 $m\geqslant 1$，m 次导数

$$D^m\left(f\left(\frac{x}{t_n}\right)\frac{x^n}{n!}\right)c_n$$

的级数在 $\mathbf{R}$ 中一致收敛(若 $\|c_n\|\leqslant 1$，可取 $t_n=\frac{1}{2}$，若 $\|c_n\|>1$，取 $t_n=1/2\|c_n\|$；利用 Leibniz 公式控制级数的项)． 推证 u 在 $\mathbf{R}$ 中是无限次可微的，且对每个 $m\geqslant 0$，有 $D^m u(0)=c_m$ (“E. Borel 定理”)．

b) 用同样的方法证明，给定 E 中元素的任意族 (c_α)，其中 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_p)$ 取遍 p 个非负整数 α_i 的所有组，则存在 $\mathbf{R}^p$ 到 E 的无限次可微映射 f 使得对每个 α 都有 $D^\alpha f(0)=c_\alpha$．

c) 由 b) 推证：如果 g 是闭区间 $I\subset \mathbf{R}$ 到 E 的无限次可微映射而 J 是包含 I 的一开区间，则存在 $\mathbf{R}$ 到 E 的无限次可微映射 f，它在 I 中与 g 重合而在 $\mathbf{R}-J$ 中与 0 重合．

5) 设 f 是区间 $I\subset \mathbf{R}$ 到 Banach 空间 E 中的一个映射，假设 f 在点 $\alpha\in I$ 是 n 次可微的．试证

$$\lim_{\xi\to\alpha,\xi\neq\alpha,\xi\in I}\left(f(\xi)-f(\alpha)-f'(\alpha)\frac{\xi-\alpha}{1!}-\cdots-f^{(n)}(\alpha)\frac{(\xi-\alpha)^n}{n!}\right)\Big/(\xi-\alpha)^n=0$$

(对 n 用归纳法，并利用(8.5.1)，取 $\varphi(\xi)=(\xi-\alpha)^{n-1}$)．

6) 设 $I\subset \mathbf{R}$ 是一个包含 0 的区间，f 是 I 到 Banach 空间的 $n-1$ 次可微映射．记

$$f(t)=f(0)+f'(0)\frac{t}{1!}+\cdots+f^{(n-1)}(0)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}+f_n(t)t^n.$$

它在 $I-\{0\}$ 中定义了 f_n．

a) 试证：如果 f 在 $t=0$ 是 $n+p$ 次可微的，则 f_n 可连续延拓到 I，而且成为这样一个函数：使在 V (0 在 I 中的一个邻域) 的所有点 $t\neq 0$ 是 $n+p-1$ 次可微的，在 $t=0$ 是 p 次可微的． 而且对于 $0\leqslant k\leqslant p$ 有 $f_n^{(k)}(0)=\frac{k!}{(n+k)!}f^{(n+k)}(0)$，对于 $1\leqslant k\leqslant n-1$ 有 $\lim\limits_{t\to 0,t\neq 0,t\in V}$

$f_n^{(p+k)}(t)t^k = 0$.(借助于 f 的导数的 Taylor 展开式(问题 5)表出 f_n 的导数,并利用 8.6 节问题 2.)

b) 反之,设 g 是 $I-\{0\}$ 到 E 的这样一个 $n+p-1$ 次可微映射,使 $\lim\limits_{t\to 0, t\neq 0, t\in I} g^{(p+k)}(t)t^k$ 对 $0 \leqslant k \leqslant n-1$ 存在. 试证:如果函数 g 是 I 中的 $p-1$ 次可微映射,那么函数 $g(t)t^n$ 在 I 中是 $n+p-1$ 次可微的,并且在点 0 是 $n+p$ 次可微的.

c) 假设 $I =]-1, 1[$,并假设 f 在 I 中是偶函数,意即:$f(-t) = f(t)$. 利用 a) 与 b) 证明:如果 f 在 I 中是 $2n$ 次可微的,则存在 I 到 E 的 n 次可微映射 h 使 $f(t) = h(t^2)$.

7) a) 设 f 是 R^n 到 Banach 空间 E 的一个无限次可微映射,试证:

$$f(x_1,\cdots,x_n) = f(0,\cdots,0) + x_1f_1(x_1,\cdots,x_n) + x_2f_2(x_2,\cdots,x_n) + \cdots + x_nf_n(x_n),$$

其中 f_k 在 $R^{n-k+1}(1\leqslant k\leqslant n)$ 中是无限次可微的.(记 $f(x_1,\cdots,x_n)=(f(x_1,\cdots,x_n) - f(0,x_2,\cdots,x_n)) + f(0,x_2,\cdots,x_n)$ 并把(8.14.2)应用到第一加数上,此加数可以看作是 x_1 的函数;取适当的 p 值(取决于 k)就能证明:$(f(x_1,\cdots,x_n) - f(0,x_2,\cdots,x_n))/x_1$ 在$(0,\cdots,0)$是 k 次可微的. 最后,对 n 用归纳法.)

b) 由 a) 推证:对任意 $p>0$,都有

$$f(x) = \sum_{|\alpha|<p} x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}f_\alpha(x),$$

其中所有的 f_α 都是无限次可微的,且 $f_0(x) = f(0,\cdots,0)$.

c) 设 f 是 R^n 到 R 的无限次可微映射,对 $1 \leqslant i \leqslant n$ 有 $f(0) = 0$,$D_if(0) = 0$,又二次型

$$(\xi_1,\cdots,\xi_n)\to \sum_{i,j} D_iD_jf(0)\xi_i\xi_j$$

是非退化的. 试证,利用 R^n 中的线性变换,可以假设对 $i\neq j$,$D_iD_jf(0) = 0$ 而对 $1\leqslant i\leqslant n$,$a_i = D_i^2f(0)\neq 0$. 证明存在 0 的邻域 U 与定义在 U 中的 n 个无限次可微函数 g_i 使得在 U 中有

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_ig_i(x))^2;$$

并且对 $1 \leqslant i \leqslant n$ 有 $g_i(0) = 0$. 此外 $(g_1,\cdots,g_n)$ 的 Jacobi 矩阵在点 0 总是恒等的.(把 a) 应用于 a) 中定义的每个函数 f_i,然后用二次型通常化

为具有对角矩阵的二次型的方法.)

8) a) 设 S 是一个距离空间，A, B 是 S 的两个非空子集，M 是 S 上实连续函数空间 $\mathscr{C}_R(S)$ 的向量子空间，N 是 M 的向量子空间，$u\to L(u)$ 是 M 到 R^A 的线性映射，其中 R^A 是 A 到 R 的所有映射的空间. 我们假设：1° 存在一函数 $u_0\in N$ 使得 $L(u_0)$ 是 A 上的常数 1；2° 如果 $u\in N$ 并且存在 $t\in B$ 使 $u(t)=0$，则存在 $x\in A$ 使 $(L(u))(x)=0$.

设 $v\in M$ 使得 $L(v)=0$. 试证：对任意这样的函数 $u\in M$, $u-v\in N$, 与任意 $t\in B$，存在 $\theta\in A$（取决于 t）使 $u(t)=v(t)+u_0(t)(L(u))(\theta)$.（注意 $u_0(t)\neq 0$，因此存在一常数 c（取决于 t）使 $u(t)-v(t)-cu_0(t)=0$.)

b) 假设 S 是紧的，A 在 S 中是连通的，而且所有函数 $u\in N$ 都在 $S-B$ 上变为 0. 假设对每个 $u\in M$, $L(u)$ 都在 A 中连续，而且如果函数 $u\in N$ 使对任意 $t\in A$ 都有 $(L(u))(t)>0$，则 u 在 B 上没有严格最大值. 试证：在这种情况下，a) 中的条件 2° 也被实现.

9) a) 设 f 是定义于区间 I 上的 $n-1$ 次 $(n\geqslant 2)$ 可微实函数；设 p 是 >1 的整数且 $x_1<x_2<\cdots<x_p$ 是 I 中的点，$n_i(1\leqslant i\leqslant p)$ 是这样的正整数，使得 $n_1+n_2+\cdots+n_p=n$. 假设在每个点 x_i，对于 $0\leqslant k\leqslant n_i-1$ 都有 $f^{(k)}(x_i)=0$. 试证：在区间 $]x_1, x_p[$ 中存在一点 ξ 使得 $f^{(n-1)}(\xi)=0$（反复应用 Rolle 定理）.

b) 设 g 是在 I 上定义的 n 次可微实函数，设 P 是 $n-1$ 次实多项式且使得对于 $0\leqslant k\leqslant n_i-1$, $1\leqslant i\leqslant p$ 有 $g^{(k)}(x_i)=P^{(k)}(x_i)$. 试证：对任意 $x\in I$，在包含 x 与各 $x_i(1\leqslant i\leqslant p)$ 的最小区间的内部中，存在 ξ 使得

$$g(x)=P(x)+\frac{(x-x_1)^{n_1}(x-x_2)^{n_2}\cdots(x-x_p)^{n_p}}{n!}g^{(n)}(\xi).$$

（利用问题 8 a)，或者给出一个直接证明，两种情况下都要利用 a).)

10) 设 g 是一实值奇函数，在 R 中 0 的一个对称邻域 I 中定义并且 5 次可微. 试证：对于每个 $x\in I$,

$$g(x)=\frac{x}{3}(g'(x)+2g'(0))-\frac{x^5}{180}g^{(5)}(\xi),$$

其中 ξ 是一个数，属于以 0 与 x 为端点的开区间.

由此结果推证：如果 f 是一个实函数，在 $[a, b]$ 中定义并且 5 次可微，则

$$f(b)-f(a)=\frac{b-a}{6}\left[f'(a)+f'(b)+4f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$$
$$-\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(5)}(\xi),$$

其中 $a<\xi<b$ (Simpson 公式).

11) 设 $I=[a,b]$ 是一紧区间,设 M_0 是在 I 上定义的这样的实连续函数的向量空间,使对于任意 $t\in\,]a,b[$, 极限

$$(L(f))(t)=\lim_{h\to 0,\, h\neq 0}(f(t+h)+f(t-h)-2f(t))/h^2$$

在 $\mathbf{R}$ 中存在. 在 I 上二次可微的所有实函数都属于 M_0.

a) 设 M 是 M_0 的向量子空间, 由这样的函数 f 组成, 对于它, $L(f)$ 在 $]a,b[$ 中是连续的. 证明: 任意函数 $f\in M$ 在 $]a,b[$ 中都是二次可微的, 而且 $L(f)=f''$. (利用问题 8a) 与 8b), 取 $S=I$, $A=B=\,]a,b[$, 并把 N 取为 M 的由这样的函数 f 组成的子空间,对于它有 $f(a)=f(b)=0$.)

b) 证明: 函数 $f(t)=t\cos(1/t)$ 属于 M_0, 虽然它在 $t=0$ 是不可微的.

12) 在 Hilbert 空间中取值的函数与问题 9b), 10 与 11 中讨论的实函数的性质相对应的性质是什么? (参看 8.5 节问题 6.)

13) 设 f 是紧区间 $I=[a,b]\subset\mathbf{R}(a\geqslant 0)$ 到 Banach 空间的无限次可微映射.

a) 试证对每两个满足 $0<p<q$ 的整数 p, q, 有

$$\sum_{n=p}^{q-1}\|f^{(n)}(a)\|\frac{a^n}{n!}\leqslant\sum_{n=p}^{q-1}\|f^{(n)}(b)\|\frac{b^n}{n!}+\int_a^b\|f^{(q)}(x)\|\frac{x^{q-1}}{(q-1)!}dx$$

(对 $p\leqslant n<q$, 用 Taylor 公式 p 到 $q-1$ 间的阶的导数在点 b 的值表示 $f^{(n)}(a)$.)

b) 在同样的条件下,试证

$$\int_a^b\|f^{(p)}(x)\|\frac{x^{p-1}}{(p-1)!}dx\leqslant\int_a^b\|f^{(q)}(x)\|\frac{x^{q-1}}{(q-1)!}dx+\sum_{n=p}^{q-1}\|f^{(n)}(b)\|\frac{b^n}{n!}$$

(应用 Taylor 公式于 $f^{(p)}$ 并利用 8.11 问题 4) c)).

c) 设 f 是区间 $[a,+\infty[$ 中的无穷次可微函数(这里 $a\geqslant 0$), 且对每个整数 $n\geqslant 0$, 存在一有限 M_n, 使 $\sup\limits_{a\leqslant z\leqslant x}\|f^{(n)}(z)\|z^n/n!\leqslant M_n$ 对每个 $x\geqslant a$ 成立,又假设,对任意 $n\geqslant 1$, $\lim\limits_{x\to\infty}f^{(n-1)}(x)x^{n-1}$ 存在. 试证当 $b>a$ 与 $n<q$ 时有

$$f^{(n)}(b) = -\int_b^{+\infty} f^{(q)}(x)\frac{(b-x)^{q-n-1}}{(q-n-1)!}dx$$

而当 $a \leqslant x \leqslant b$ 时有

$$f^{(q)}(x) = \sum_{m=q}^{\infty} f^{(m)}(b)\frac{(x-b)^{m-q}}{(m-q)!},$$

这里级数与积分是收敛的(利用 Taylor 公式). 由此可得

$$\sum_{n=p}^{q-1}\|f^{(n)}(b)\|\frac{b^n}{n!} \leqslant \int_b^{+\infty}\|f^{(q)}(x)\|\frac{x^{q-1}}{(q-1)!}dx$$

与

$$\int_a^b \|f^{(p)}(x)\|\frac{x^{p-1}}{(p-1)!}dx \leqslant \sum_{n=p}^{\infty}\|f^{(n)}(b)\|\frac{b^n}{n!}.$$

d) 在 c) 的假设下,试证函数

$$S_p(x) = \sum_{n=p}^{\infty}\|f^{(n)}(x)\|\frac{x^n}{n!}$$

(它的值是有限的，且 $\geqslant 0$，或 $+\infty$)在 $[a, +\infty[$ 中是递增的。

e) 设 f 在 $[a, +\infty[$ 中是无限次可微的,且

$$\lim_{x\to+\infty} f^{(n)}(x) = 0, \qquad \text{对每个 } n \geqslant 0\,.$$

试证数列(有限或无限)

$$J_n = \int_a^{+\infty}\|f^{(n)}(x)\|\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}dx \quad (n \geqslant 1)$$

是递增的. (当所有这些数都有限时,记

$$f^{(n)}(x) = -\int_x^{+\infty} f^{(n+1)}(t)dt,$$

然后利用 8.11 节问题 4) c).)

f) 设 f 是 $[a, +\infty[$ 上的无限次可微映射,且积分

$$J_n = \int_a^{+\infty}\|f^{(n)}(x)\|\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}dx \text{ 与 } J_{n+1} = \int_a^{+\infty}\|f^{(n+1)}(x)\|\frac{x^n}{n!}dx$$

是有限的. 试证对 $x \geqslant a$ 有

$$\|f^{(n)}(x)\|\frac{x^n}{n!} \leqslant \|f^{(n)}(a)\|\frac{a^n}{n!} + J_n + J_{n+1}.$$

14) 设 f 是区间 $[a, +\infty[$ 到 Banach 空间的无限次可微函数，这里 $a \geqslant 0$,

a）试证对每个 $p>0$，有

$$(*)\qquad \sup_{x\geq a}\sum_{n=p}^{\infty}\|f^{(n)}(x)\|\frac{x^n}{n!}=\sup_{n\geq p}\int_a^{+\infty}\|f^{(n)}(x)\|\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}dx,$$

这里两边可以是有限数或等于 $+\infty$. 试证若两边都有限时，它们也等于两个极限

$$(**)\qquad \lim_{x\to+\infty}\sum_{n=p}^{\infty}\|f^{(n)}(x)\|\frac{x^n}{n!} \text{ 与 } \lim_{n\to\infty}\int_a^{+\infty}\|f^{(n)}(x)\|\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}dx$$

(利用问题 13))。

b）若 f 满足问题 13）c）的假设，则两极限 (**) 总存在并与(*)两边相等。

第九章 解析函数

本章我们试图强调关于解析函数理论的最一般事实，特别对于多变量解析函数叙述尽可能多的结果．直到9.13节以前仅与单变量函数有关的那些定理作为技巧的过渡被穿插在一般叙述中；只在9.14到9.17节以及本章与下一章的许多问题中，我们才真正处理单变量情形所特有的性质．而且，只要可能，我们总是同时讨论实变量与复变量解析函数(直到9.5节以前)．最后，我们始终保持了一开始处理向量值函数的一般原则；象通常一样，这在证明中并不需要任何改变，而读者在十一章中将会看到考虑这样的函数是多么有用．

当然，人们只能期望在这里找到非常广博的解析函数理论的最基本的部分．它的定义是由表示该函数的幂级数的局部存在性给出的，解析函数可微性的获得(9.3.5)也是用的这种幂级数技巧．(由连续导数的存在性给出的解析函数的普通定义，当然只适用于复变量函数，因此，它的表征被推迟到9.10节)．关于幂级数的最基本结果是Abel引理(9.1.2)(由它推导出幂级数代入幂级数的重要可能性(9.2.2))与孤立零点原理(9.1.5)，它的最重要推论是解析开拓原理(9.4.2)，后者表示在定义域的不同点上解析函数值之间的“连带关系”．

此后，我们必得假设变量都是复数；除极大值原理(9.5.9)以外，复变量解析函数的所有其他性质都是从单一的新概念，即“复积分”概念，与它的基本特征，即Cauchy定理(9.6.3)、Cauchy公式(9.9.1)及其推广，即残数定理(9.16.1)推导出来的．这里我们给出的Cauchy定理的形式不是最佳的，因为它把沿回路的积分表示为这个回路的**同伦类**的不变量，而事实上它是它的**同调类**的一个不变量．但是，在大多数应用中，这没有什么不方便，而且有以下

的显著不同：证明 Cauchy 定理的弱形式几乎不需要拓扑预备知识，而证明完全定理就需要代数拓扑的某些新知识，我们认为它们超过了本教程的水平．有兴趣的读者在 Ahlfors[1],Cartan[8] 与 Springer [17] 中将能找到完全的 Cauchy 定理以及所有必要的预备知识．在二十六章中我们将再回到这个问题．为了获得这样的改进而又不使用代数拓扑的结果，我们认为如下一点可能会使某些读者发生兴趣，即看看由 S. Eilenberg 引入的非常简单的方法，在只使用关于复积分的最基本事实的情况下，是怎样获得关于实平面拓扑的很深的知识(包括 Jordan 曲线定理)的．这就是附录的目的(顺便说一下，附录在以后各章中一点也用不到，因而可以绕过它，而不会带来任何不便)．

正如我们在第一章中说过的，读者在本章看不到所谓"多值函数"的任何叙述．当然，非常讨厌的是我们不能在域 $\boldsymbol{C}$ 上定义一个真正的连续函数 $\sqrt{z}$ 满足关系 $(\sqrt{z})^2=z$；然而这个困难的解决一定不会是在有意曲解一般映射概念的情况下获得的，根据这种曲解人们会出乎意外地规定，终究存在这样的"函数"，居然具有不寻常的特性：对每个 $z\neq 0$ 它有两个不同"值"．这种粗劣与愚蠢行为受到了直接的惩罚：连实行那些最简单的具有合理可信的代数运算，也不可能，例如，关系 $2\sqrt{z}=\sqrt{z}+\sqrt{z}$ 一定不真，因为，如果我们按 $\sqrt{z}$ 的"定义"，就不得不认为对于 $z\neq 0$，左边有两个不同的值，而右边有三个不同的值！很幸运，这个困难的解决办法是有的，它与这种荒谬的做法毫无关系；而是一百多年前由 Riemann 发现的，他采用，比方说，"重叠"变量 z 的变域的方法，恢复 $\sqrt{z}$ 值的唯一性，以保证 $\sqrt{z}$ 的两个值对应于两个不同的点而不是一个单独的 z，如果有所谓天才的话，这就是一个！并且它是 Riemann 曲面及其现代推广，即复流形(它将在第十六章中定义)伟大理论的起源．希望通晓这些优美而生动理论的学生应当阅读关于 Riemann 曲面的 H. Weyl 的经典著作[19]与 Springer 著的近代介绍[17]，以及关于复流形的 H. Cartan 的讨论班的讲义[7]与 A. Weil 的新书[18]．

1. 幂级数

在下文中，用K表示实域$\mathbf{R}$或复域$\mathbf{C}$；它的元素称为**纯量**.在K上的向量空间K^p中，一个**开(闭)多圆柱**是p个开(相应地，闭)球的积；换句话说，它是由满足形如$|z_i-a_i|<r_i$(相应地，$|z_i-a_i|\leqslant r_i$)，$1\leqslant i\leqslant p$，的点$z=(z_1,\cdots,z_p)$所定义的集P，而对每个附标，都有$r_i>0$；$a=(a_1,\cdots,a_p)$是P的中心，$r_1,\cdots,r_p$是它的半径(因而球是一个所有半径全相等的多圆柱).

(9.1.1) 设P，Q是K^p中两个开多圆柱，而且$P\cap Q\neq\phi$.则对$P\cap Q$中的任意两点x，y，连结x与y的线段(8.5)都含于$P\cap Q$中.特别地，$P\cap Q$是连通的.

事实上，如果$|x_i-a_i|<r_i$，$|y_i-a_i|<r_i$，则对于$0\leqslant t\leqslant 1$有$|tx_i+(1-t)y_i-a_i|\leqslant t|x_i-a_i|+(1-t)|y_i-a_i|<r_i$；最后的论断可由线段是连通的(据(3.19.1)与(3.19.7))这一事实与(3.19.3)推得.

我们引进下面的记号：对于$\mathbf{N}^p$中的任意元素$\nu=(n_1,\cdots,n_p)$(n_i是$\geqslant 0$的整数)与任意向量$z=(z_1,\cdots,z_p)\in K^p$，记$z^\nu=z_1^{n_1}z_2^{n_2}\cdots z_p^{n_p}$与$|\nu|=n_1+n_2+\cdots+n_p$.如果$E$是($K$上的) Banach 空间，$(c_\nu)_{\nu\in\mathbf{N}^p}$是$E$中以$\mathbf{N}^p$为附标集的元素族，则称$E$中元素族$(c_\nu z^\nu)_{\nu\in\mathbf{N}^p}$是$p$个变量$z_i(1\leqslant i\leqslant P)$的以$c_\nu$为系数的幂级数.

(9.1.2) 设$b=(b_1,\cdots,b_p)\in K^p$满足$b_i\neq 0$，$1\leqslant i\leqslant p$，而族$(c_\nu b^\nu)$在$E$中有界.那么对任意满足$0<r_i<|b_i|$，$1\leqslant i\leqslant p$，的半径组$(r_i)$，幂级数$(c_\nu z^\nu)$在中心为0半径为$r_i$的闭多圆柱内都是依范数可和的(7.1)("Abel" 引理).

如果对任意$\nu\in\mathbf{N}^p$有$\|c_\nu b^\nu\|\leqslant A$，则由$K^p$中范数的定义推得：若$|z_i|\leqslant r_i<|b_i|(1\leqslant i\leqslant p)$，则有$\|c_\nu z^\nu\|\leqslant Aq^\nu$，其中$q=(q_1,\cdots,q_p)$，$q_i=r_i/|b_i|<1$.由(5.5.3)推知：正数的族$(q^\nu)_{\nu\in\mathbf{N}^p}$是绝对可和的，于是结果由(5.3.1)得到.

(9.1.3) 在(9.1.2)的假设下，幂级数 $(c_\nu z^\nu)$ 的和在以 0 为中心以 $|b_i|$ 为半径的开多圆柱中是连续的.

因为这个多圆柱的每一点都是以 $r_i<|b_i|$ 为半径的闭多圆柱的内点，于是结果由(7.2.1)推出.

设 q 是满足 $1\leqslant q\leqslant p$ 的任一整数；对于任意 $\nu=(n_1,\cdots,n_p)$，记 $\nu'=(n_1,\cdots,n_q)$，$\nu''=(n_{q+1},\cdots,n_p)$；把 K^p 看成积 $K^q\times K^{p-q}$，并对 $z=(z_1,\cdots,z_p)\in K^p$，记 $z'=(z_1,\cdots,z_q)$，$z''=(z_{q+1},\cdots,z_p)$. 利用这些记号有

(9.1.4) 假设幂级数 $(c_\nu z^\nu)$ 在 K^p 的以 r_i 为半径以 0 为中心的多圆柱 P 中是绝对可和的. 那么，对于任意 $\nu''\in N^{p-q}$，级数 $(c_{(\nu',\nu'')}z'^{\nu'})$ 在多圆柱 P'——P 在 K^q 上的射影——中是绝对可和的；设 $g_{\nu''}(z')$ 是其和. 那么，对任意 $z'\in P'$，幂级数 $(g_{\nu''}(z')z''^{\nu''})$ 在多圆柱 P''——P 在 K^{p-q} 上的射影——中是绝对可和的，而且其和等于级数 $(c_\nu z^\nu)$ 的和.

因为 $z^\nu=z'^{\nu'}z''^{\nu''}$，故由(5.3.5)与绝对可和族的可结合性定理(5.3.6)推知：每个级数 $(c_{(\nu',\nu'')}z'^{\nu'}z''^{\nu''})$ (ν'' 固定) 都是绝对可和的，而且 $\sum_{\nu''}g_{\nu''}(z')z''^{\nu''}=\sum_{\nu}c_\nu z^\nu$. 如果我们取 $z''\in P''$ 使得对 $q+1\leqslant i\leqslant p$，有 $z_i\neq 0$，则 $(c_{(\nu',\nu'')}z'^{\nu'})$ 的绝对可和性便可得到.

(9.1.5) (“孤立零点原理”) 假设 $(c_n z^n)$ 是单变量的幂级数，并在半径为 r 的开球 P 中收敛，并设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$. 那么，除非所有的 c_n 都是 0，否则存在 $r'<r$ 使得对于 $0<|z|<r'$，有 $f(z)\neq 0$.

假设 h 是使得 $c_h\neq 0$ 的最小整数. 则可以写出 $f(z)=z^h(c_h+c_{h+1}z+\cdots+c_{h+m}z^m+\cdots)$，而且级数 $(c_{h+m}z^m)$ 在 P 中是收敛的. 如果 $g(z)=c_h+c_{h+1}z+\cdots+c_{h+m}z^m+\cdots$，则据(9.1.3) g 在 P 中连续. 又因 $g(0)=c_h\neq 0$，故存在 $r'>0$ 使得对 $|z|<r'$ 有 $g(z)\neq 0$，于是结果得证.

(9.1.6) 假设两个幂级数 $(a_\nu z^\nu)$ 与 $(b_\nu z^\nu)$ 在多圆柱 P 中绝对可和并有相同的和. 则对每个 $\nu \in N^p$ 都有 $a_\nu = b_\nu$.

对 P 应用归纳法：当 $p = 1$ 时，结果立可由(9.1.5)推出. 取这两个幂级数的差，我们可以假设对每个 ν 都有 $b_\nu = 0$. 应用(9.1.4)，取其中的 $q = p - 1$，便有 $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(z')z_p^n = 0$，因而对每个 n 以及对于 P 在 K^{p-1} 上的射影 P' 中的每个 z'，都有 $g_n(z') = 0$；对每个 g_n 应用归纳假设就得到对每个 ν 都有 $a_\nu = 0$.

问　　题

1) 设 $(c_\nu z^\nu)$ 是 p 个变量 $z_i(1 \leqslant i \leqslant p)$ 的幂级数；设 $a = (a_1, \cdots, a_p) \in K^p$. 为使实数 $r > 0$ 满足对任意 $t \in K$ 且 $|t| < r$，级数 $(c_\nu (ta_1)^{n_1} \cdots (ta_p)^{n_p})$ 绝对可和，必须且只须

$$\log r + \frac{1}{|\nu|}\left(\log\|c_\nu\| + \sum_{i=1}^{p} n_i \log|a_i|\right) \leqslant 0$$

对除有限个附标外的所有附标 $\nu = (n_1, \cdots, n_p)$ 成立(应用(9.1.2)).

特别地，对于 $p=1$，存在一个最大数 $R \geqslant 0$ ("收敛半径"，它可以是 $+\infty$) 使得级数 $(c_n z^n)$ 对于 $|z| < R$ 是收敛的，而且这个数由下式给定：$1/R = \lim_{n\to\infty} (\sup_{k\geqslant 0} (\|c_{n+k}\|^{1/(n+k)}))$，这个极限也写成 $\lim_{n\to\infty} \cdot \sup\|c_n\|^{1/n}$. 特别地，当 $\lim_{n\to\infty}\|c_n\|^{1/n}$ 存在时，它就等于 $1/R$.

2) 举出单复变数幂级数的例，其收敛半径 $R = 1$ (问题1)并满足：

1° 这个级数对于 $|z| = R$ 是依范数收敛的；

2° 对满足 $|z| = R$ 的某些 z，这级数是收敛的，而对这个圆周上其余的点它不收敛；

3° 这级数在 $|z| = R$ 的任意点上都是不收敛的.

3) 举出二个变量幂级数的一个例子，使得它在两点 (a_1, a_2)，(b_1, b_2) 是绝对可和的，但在点 $\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$ 不是绝对可和的. (把单变量幂级数中的 z 换为 $z_1 z_2$.)

4) 设 $(c_n z^n)$，$(d_n z^n)$ 是具有纯量系数的两个单变量幂级数；如果它们的收敛半径(问题 1)是 R 与 R'，并且 R 与 R' 都不为 0，则幂级数 $(c_n d_n z^n)$ 的

收敛半径 R'' 至少是 RR'（当 R 或 R' 为 $+\infty$ 时，取其等于 $+\infty$）。举出满足 $R''>RR'$ 的例子。

2. 幂级数代入幂级数

设 Q 是 K^q 中以 0 为中心的一多圆柱，并设以纯量为系数的 q 个变量的 p 个幂级数 $(b_\mu^{(k)}u^\mu)$ 在 Q 中是绝对可和的(其中 $\mu=(m_1,\cdots,m_q)$，$u=(u_1,\cdots,u_q)$，$u^\mu=u_1^{m_1}\cdots u_q^{m_q}$)。记 $g_k(u)=\sum_\mu b_\mu^{(k)}u^\mu$，$G_k(u)=\sum_\mu |b_\mu^{(k)}|u^\mu$。另一方面，设 $(a_\nu z^\nu)$ 是 p 个变量的幂级数，其系数在 E 中，而且它在 K^p 的一个以 0 为中心以 $r_k(1\leqslant k\leqslant p)$ 为半径的多圆柱 P 中是绝对可和的。如果在单项式 $z^\nu=z_1^{n_1}\cdots z_p^{n_p}$ 中，"形式上"把每个 z_k 都换为幂级数 $g_k(u)$，则使我们取 $n_1+n_2+\cdots+n_p$ 个级数的形式"积"，也就是在 $n_1+n_2+\cdots+n_p$ 个因子的每一个中都挑出一项，取它们的积，然后求这样得到的所有项的"和"。由此导致我们对每个 $\nu=(n_1,n_2,\cdots,n_p)$ 考虑所有有限族 $(\mu_{kj})=\rho$ 的集 A_ν，其中 $\mu_{kj}\in\boldsymbol{N}^q$，$k$ 取遍 1 到 p，而对每个 k，j 取遍 1 到 n_k；对于这样的 ρ，使之对应于元素

$$t_\rho(u)=a_\nu\prod_{k=1}^{p}\prod_{j=1}^{n_k}b_{\mu_{kj}}^{(k)}u^{\mu_{kj}}.$$

利用这些记号，我们有

(9.2.1) 假设 $s_1,\cdots,s_q$ 是 q 个大于 0 的数，对 $1\leqslant k\leqslant p$ 满足条件 $G_k(s_1,\cdots,s_q)<r_k$。那么，对于中心为 0、半径为 $s_i(1\leqslant i\leqslant q)$ 的开多圆柱 $S\subset K^q$ 中的每个 u，族 $(t_\rho(u))$ $\left(\text{其中 }\rho\text{ 取遍可数附标集 }A=\bigcup_{\nu\in N^p}A_\nu\right)$ 是绝对可和的，且当 $f(z)=\sum_\nu a_\nu z^\nu$ 时，这个族的和等于 $f(g_1(u),g_2(u),\cdots,g_p(u))$。

换句话说，在条件 $G_k(s_1,\cdots,s_q)<r_k(1\leqslant k\leqslant p)$ 下，用级

数 $g_k(u)$ "代换"级数 f 中的 $z_k(1 \leqslant k \leqslant p)$，则得一绝对可和族，甚至可首先把关于 $u_1, \cdots, u_q$ 具有相同次数的项 $t_\rho(u)$ 都合并起来.

为证明(9.2.1)，只要证明族$(t_\rho(u))$是绝对可和的.把可结合性定理(5.3.6)应用到A的子集 A_ν上，并利用(5.5.3)而推得族$(t_\rho(u))$的和为 $f(g_1(u), \cdots, g_p(u))$. 并且(5.5.3)表明 $\sum\limits_{\rho \in A_\nu} t_\rho(u)$ 等于 a_ν $(g_1(u))^{n_1} \cdots (g_p(u))^{n_p}$.要证明族 $(t_\rho(u))$ $(\rho \in A)$ 是绝对可和的，可应用(5.3.4). 对A的任意有限子集 B，据(5.3.5)与(5.5.3)我们有

$$\sum_{\rho \in B \cap A_\nu} \|t_\rho(u)\| \leqslant \|a_\nu\| \cdot (G_1(s_1, \cdots, s_q))^{n_1} \cdots (G_p(s_1, \cdots, s_q))^{n_p}.$$

这个不等式的右边，据假设，是绝对可和族的对应于附标 ν 的元素. 于是结果得证.

记 $t_\rho(u) = c_\rho u^\lambda$，其中 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_q), \lambda_i = \sum\limits_{k=1}^{p} \sum\limits_{j=1}^{m_k} m_{kji}$ (假如我们有 $\mu_{kj} = (m_{kj1}, \cdots, m_{kjq})$). 由(9.2.1)与(5.3.5)推知(取所有的 $u_i \neq 0$，$u \in S$)：对每个 λ，c_ρ的族，这里 ρ 取遍A中对应于同一个 λ 的所有元素，在 E 中是绝对可和的. 如果 d_λ 是它的和，则由可结合性定理(5.3.6)知道

(9.2.1.1) $$f(g_1(u), \cdots, g_p(u)) = \sum_\lambda d_\lambda u^\lambda,$$

右边这个级数在多圆柱 S 中是绝对可和的. 根据定义，这个幂级数就是用 $g_k(u)$ 代换幂级数 $(a_\nu z^\nu)$ 中的 $z_k(1 \leqslant k \leqslant p)$ 而得的幂级数.

(9.2.2) 如果 K^p 中的点 $(g_1(0), \cdots, g_p(0))$ 属于 P，则在 K^q 中存在一开多圆柱 S 使得对 $u \in S$，级数 $g_k(u)$ 可以用来代换幂级数 $(a_\nu z^\nu)$ 中的 $z_k(1 \leqslant k \leqslant p)$.

注意：由定义，对于 $1 \leqslant k \leqslant p$，有 $G_k(0) = |g_k(0)|$. 因为据(9.1.3)，G_k 在 0 是连续的，所以，使 $G_k(s_1, \cdots, s_q) < r_k$ 对 $1 \leqslant k \leqslant p$ 成立的数 $s_i > 0(1 \leqslant i \leqslant q)$ 的存在性可直接由假设推出。

3. 解 析 函 数

设D是K^p的一开子集。我们称D到K上 Banach 空间E的映射f**是解析的**，如果对每一点 $a \in D$，都存在以 a 为中心的一开多圆柱 $P \subset D$，使得在P中，$f(z)$ 等于关于 p 个变量 $z_k - a_k(1 \leqslant k \leqslant p)$ 的绝对可和幂级数的和(据(9.1.6)，这个级数必然是唯一的)。

假设 $K = \boldsymbol{C}$，设 b 是D的一个点，并设B是D在$\boldsymbol{R}^p$到$\boldsymbol{C}^p$的映射 $x \to b + x$ 下的逆象. 则由定义立即推知：$x \to f(b + x)$在$\boldsymbol{R}^p$的开子集B中是解析的.

(9.3.1) 设 $(a_\nu z^\nu)$ 是在开多圆柱 $P \subset K^p$ 中绝对可和的幂级数. 则$f(z) = \sum_\nu a_\nu z^\nu$ 在P中是解析的. 更确切地说，如果 $r_i(1 \leqslant i \leqslant p)$ 是P的半径，则对任意点 $b = (b_i) \in P$，$f(z)$ 在以b为中心 $r_i - |b_i|(1 \leqslant i \leqslant p)$ 为半径的开多圆柱中等于一个关于 $z_k - b_k$ 的绝对可和幂级数的和.

把(9.2.1)应用到 $q = p$，$g_k(u) = b_k + u_k$ 的情形立即推得(9.3.1). 这时，我们有 $G_k(u) = |b_k| + u_k$，并且条件 $G_k(s_1, \cdots, s_p) < r_k(1 \leqslant k \leqslant p)$ 简缩成 $s_k < r_k - |b_k|(1 \leqslant k \leqslant p)$.

p 个变量的**整函数**是指K^p到E的这样的映射f：它等于在整个空间K^p中都绝对可和的幂级数的和(参见(9.9.6)). 此外，对每个 $b \in K^p$，$f(z)$ 等于关于 $z_k - b_k$ 的幂级数的和，而且据(9.3.1)，这个幂级数在整个空间K^p中都是绝对可和的.

(9.3.2) 设A是K^p中一开子集，B是K^q中一开子集，$g_k(1 \leqslant k \leqslant p)$是在$B$中定义并解析的$p$个纯量函数，并假设$B$在$(g_1, \cdots, g_p)$下的象含于$A$中. 则对于$A$到$E$的任意解析映射$f$，$f(g_1, \cdots, g_p)$

在 B 中是解析的.

这立即可由定义与(9.2.2)推得. 特别地,如果 f 在 $A\subset K^p$ 中解析,则对于 $p-q$ 个纯量的任意组 $(a_{q+1},\cdots,a_p)$, $(z_1,\cdots,z_q)\to f(z_1,\cdots,z_q,\ a_{q+1},\cdots,q_p)$ 在 K^q 的开子集 $A(a_{q+1},\cdots,a_p)$ (3.20.12)中是解析的.

(9.3.3) 为要 $A\subset K^p$ 到 K^q 的映射 $f=(f_1,\cdots,f_q)$ 在 A 中是解析的, 必须且只须每个纯量函数 $f_i(1\leqslant i\leqslant q)$ 在 A 中都是解析的.

据定义,这是显然的.

(9.3.4) 设对 $1\leqslant k\leqslant p, z_k=x_k+iy_k$, 且 x_k 与 y_k 都是实数. 如果 f 在 $A\subset \boldsymbol{C}^p$ 中是解析的, 则 $(x_1,y_1,\cdots,x_p,y_p)\to f(x_1+iy_1,\cdots,x_p+iy_p)$ 在 A 中是解析的,这里 A 看作 $\boldsymbol{R}^{2p}$ 的一开集.

事实上, 据(9.3.2), 该函数在开子集 $B\subset\boldsymbol{C}^{2p}$ 中是解析的, B 是 A 在 $\boldsymbol{C}^{2p}$ 到 $\boldsymbol{C}^p$ 的映射 $(u_1,v_1,\cdots,u_p,v_p)\to(u_1+iv_1,\cdots,u_p+iv_p)$下的逆象. 因而当 A 看作 $\boldsymbol{R}^{2p}$ 的子集时 f 在 $A=B\cap\boldsymbol{R}^{2p}$ 中解析.

(9.3.5) 设 $(c_{n_1n_2\cdots n_p}z_1^{n_1}\cdots z_p^{n_p})$ 是在以 0 为中心的开多圆柱 P 中绝对可和的幂级数,并设 $f(z)$ 是它的和. 则幂级数 $(n_kc_{n_1n_2\cdots n_p}z_1^{n_1}\cdots z_k^{n_k-1}\cdots z_p^{n_p})$ 在 P 中是绝对可和的, 而且它的和就是偏导数 $D_kf(=\partial f/\partial z_k)$.

对任意 $z\in P$, 当 $i\neq k$ 时在级数中用 z_i 代换它自己, 而用 z_k+u_k 代换 z_k, 这样就得到关于 $p+1$ 个变量 $z_1,\cdots,z_p,u_k$ 的幂级数,据(9.2.1),这个级数对于 $|z_i|<r_i(i\neq k)$ 与 $|z_k|+|u_k|<r_k$ (如果 $r_1,\cdots,r_p$ 是 P 的半径)是绝对可和的. 因此据(9.1.4)我们可以写成

$$f(z_1,\cdots,z_k+u_k,\cdots,z_p)=f(z)+u_kf_1(z)+\cdots$$
$$+u_k^nf_n(z)+\cdots,$$

其中每个 f_n 都是在 P 中绝对可和的幂级数,而右边,对每个 $z\in P$, 是关于 u_k 的幂级数, 它在某个以 0 为中心的开球 B (由 z 决定)中是绝对可和的. 此外,由二项式定理推出:

$$f_1(z) = \sum_r n_k c_{n_1\cdots n_p} z_1^{n_1}\cdots z_k^{n_k-1}\cdots z_p^{n_p}.$$

又因为据(9.1.4)，$(f(z_1,\cdots,z_k+u_k,\cdots,z_p)-f(z))/u_k = f_1(z) + \cdots + u_k^{n-1}f_n(z)+\cdots$是$B$中绝对可和的(关于$u_k$的)幂级数(对固定的$z$)，故由(9.1.3)推得对任意$z\in P$，有$f_1(z)=D_kf(z)$.

由此结果与(9.1.3)我们得到用f的导数表示的c_ν的值：

(9.3.5.1) $$\nu!c_\nu = D^\nu f(0),$$

其中$D^\nu = D_1^{n_1}\cdots D_p^{n_p}$而$\nu! = n_1!n_2!\cdots n_p!$. 这可由对$|\nu| = n_1+\cdots+n_p$使用归纳法立即证得.

(9.3.6) **开集$A\subset K^p$中的解析函数是无限次可微的，并且它所有的导数在A中都是解析的.**

这是(9.3.5)与(8.12.8)的明显结果.

对于$p=1$，我们有(9.3.5)的"逆"：

(9.3.7) **设(c_nz^n)是K内的球P: $|z|<r$中收敛的一幂级数，并设在P中$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$. 则幂级数$((1/(n+1))c_nz^{n+1})$在$P$中是收敛的，并且它的和是$f$的原函数.**

由于(9.3.5)，我们只要验证级数$\left(\frac{1}{n+1}c_nz^{n+1}\right)$的收敛性，这一点立即可由不等式

$$\left|\frac{1}{n+1}c_nz^{n+1}\right| \leqslant \|c_n\|\cdot|z|^{n+1}$$

与(9.1.2)推出.

问　题

1) 设(a_nz^n)，(b_nz^n)是两个单变量的幂级数，b_n是实数且>0；又假设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n/b_n = s$.

a) 假设级数(b_nz^n)对$|z|<1$是收敛的，而对$|z|=1$不收敛(意即如果$c_k=\sum_{n=0}^{k}b_n$，则$\lim\limits_{k\to\infty}c_k=+\infty$). 试证：级数$(a_nz^n)$对$|z|<1$是绝

对收敛的，而且，如果 $I=[0,1[$，则

$$\lim_{z\to1,z\in I}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\right)\Big/\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n\right)=s.$$

（注意：对于任意给定的 k，$\lim\limits_{z\to1,z\in I}\sum\limits_{n\geq k}b_nz^n=+\infty$）。

b）假设级数 (b_nz^n) 对每个 z 都是收敛的．试证：级数 (a_nz^n) 对每个 z 都是绝对收敛的，而且如果 J 是 $\bar{R}$ 中的区间$[0,+\infty[$，则

$$\lim_{z\to+\infty,\ z\in J}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\right)\Big/\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n\right)=s$$

（证法同上.）

c）试证：如果级数 (a_n) 是收敛的并且 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n=s$，则级数 (a_nz^n) 对 $|z|<1$ 是绝对收敛的，而且 $\lim\limits_{z\to1,z\in I}\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n=s$。（以对每个 n 取 $b_n=1$ 而应用 a）；这是“Abel 定理”.）

d）幂级数 $((-1)^nz^n)$ 具有收敛半径 1，且它的和 $1/(1+z)$ 当 z 在 I 中趋于 1 时收敛于一极限，但级数 $((-1^n))$ 是不收敛的（参见问题 2）。

2）设 (a_nz^n) 是一单变量幂级数，其收敛半径等于 1．设 $f(z)$ 是它的和，并假设 $f(1-)$ 存在．又若 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$，试证：级数 (a_n) 是收敛的并且其和等于 $f(1-)$．（“Tauber 定理”：注意如果对 $n\geq k$，有 $\|na_n\|\leq\varepsilon$，则对任意 $N>k$ 与 $0\leq z<1$，有

$$\left\|\sum_{n=k}^{N}a_nz^n\right\|\leq\varepsilon N(1-z)$$

与

$$\left\|\sum_{n\geq N}a_nz^n\right\|\leq\varepsilon/N(1-z).）$$

3）设 (a_nz^n) 是一单变量幂级数，具有收敛半径 $r>0$，并设 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$，其中 $|z|<r$，又设 (b_n) 是一纯量 $\neq0$ 的序列，使得 $q=\lim\limits_{n\to\infty}(b_n/b_{n+1})$ 存在且 $|q|<r$．试证：如果

$$c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0,$$

则 $\lim_{n\to\infty}(c_n/b_n)$ 存在并且等于 $f(q)$。

4）设 $(p_n z^n)$，$(q_n z^n)$ 是两个复系数的幂级数，收敛半径$\neq 0$，并在 0 的使两个级数都绝对收敛的邻域U中，设$f(z)=\sum_n p_n z^n$，$g(z)=\sum_n q_n z^n$．假设 $q_0=g(0)\neq 0$；那么存在一个幂级数 $\sum_n c_n z^n$，在 0 的一邻域 $V\subset U$ 中绝对收敛，并且在V中有和 $f(z)/g(z)$（注意：级数 (z^n) 对于 $|z|<1$ 是收敛的，并利用(9.2.2)）．如果所有 $q_n>0$，序列 (q_{n+1}/q_n) 是递增的，p_n 是实的并使得序列 (p_n/q_n) 是递增的(递减的)，试证对每一个 $n\geqslant 1$ 都有 $c_n\geqslant 0$($c_n\leqslant 0$)．(把差 $\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ 写成用 q_k 与 c_k 表示的式子，并对n使用归纳法．)由此结果推证：对于 $0<x<1$，$x/\log(1-x)$ 的所有导数都大于零．

5）设 $g_k(1\leqslant k\leqslant p)$ 是在K中定义的 p 个纯量整函数．如果 f 是在K^p中定义的一整函数，则 $f(g_1,\cdots,g_p)$ 是 K^q 中的一整函数．

6）设P是 C 中的圆盘 $|z|\leqslant r$．试证 $\iint_P z^n dxdy=0$ 对于任意整数 $n\geqslant 1$成立．(利用 R^2 上的 Lebesgue 测度关于旋转的不变性(参看(14.3.9)) 由此关系推证，对每个包含P的开集 $A\subset C$ 中解析的函数f有

$$\iint_P f(z)dxdy=\pi r^2 f(0).$$

类似地证明

$$\iint_P z^n\bar{z}^m dxdy=0,\quad 若\ m\neq n,$$

$$\iint_P |z|^{2n}dxdy=\frac{\pi r^{2n+2}}{n+1}.$$

4. 解析开拓原理

(9.4.1) 在 K^p 中，设P，Q是以a，b为中心的两个开多圆柱，并且 $P\cap Q\neq\phi$．设 $(c_{n_1\cdots n_p}(x_1-a_1)^{n_1}\cdots(x_p-a_p)^{n_p})$ 是关于 x_i-a_i 的幂级数，在P中绝对可和，并设 $f(x)$ 是它的和．设 $(d_{n_1\cdots n_p}(x_1-b_1)^{n_1}\cdots(x_p-b_p)^{n_p})$ 是关于 x_i-b_i 的幂级数，在

Q 中绝对可和，并设 $g(x)$ 是它的和. 如果存在 $P\cap Q$ 的非空开子集 U 使得对任意 $x\in U$，有 $f(x)=g(x)$，那么对任意 $x\in P\cap Q$，也有 $f(x)=g(x)$.

设 $u\in U$，并设 v 是 $P\cap Q$ 的任意点；那么，据(9.1.1)，连接 u 与 v 的线段含于 $P\cap Q$ 中. 设 $h(t)=f(u+t(v-u))-g(u+t(v-u))$，其中 t 是实数. 据(9.3.2)，这是在包含[0,1]的开区间 I 中的 t 的解析函数. 设 A 是区间[0,1]的一闭子集，由这样的 t 组成：对 $0\leqslant s\leqslant t$，有 $h(s)=0$；据假设存在 0 在 [0,1] 中且含于 A 中的开邻域，因而 A 的上确界 ρ 必定 >0. 我们将证明 $\rho=1$，从而使(9.4.1)成立. 首先注意：对 $0\leqslant t<\rho$，有 $h(t)=0$，故由连续性得 $h(\rho)=0$. 因 h 在点 ρ 是解析的，所以存在关于 $t-\rho$ 的幂级数对 $|t-\rho|<\alpha$ 收敛，这里 $\alpha>0$，并且对 $|t-\rho|<\alpha$ 它的和等于 $h(t)$. 但是据假设对 $0\leqslant t\leqslant\rho$，$h(t)=0$；于是由孤立零点原理(9.1.5)推出对 $|t-\rho|<\alpha$ 有 $h(t)=0$. 假如是 $\rho<1$ 的话这就与 ρ 的定义矛盾.

(9.4.2) （"解析开拓原理"）. 设 $A\subset K^p$ 是一开连通集，f 与 g 是 A 中的两个解析函数，它们的值在 E 中. 如果存在 A 的非空开子集 U 使得对 $x\in U$，$f(x)=g(x)$，则对每个 $x\in A$，都有 $f(x)=g(x)$.

设 B 是使 $f(x)=g(x)$ 的点 $x\in A$ 的集的内部. 显然，据假设，B 是开的与非空的. 我们将证明 B 在 A 中也是闭的，于是它等于 A，因为 A 是连通的(见(3.19)). 设 $a\in A$ 是 B 的一个聚点. 因 f，g 是解析的，故存在以 a 为中心含于 A 中的开多圆柱 P，使得在 P 中，$f(x)$ 与 $g(x)$ 等于两个 x_i-a_i 的幂级数的和，它们在 P 中是绝对可和的. 但是，据定义，$P\cap B$ 包含一个非空开圆柱 U'，在它里面 $f(x)=g(x)$. 把(9.4.1)应用到 $P=Q$ 的情形，我们就得出：在 P 中 $f(x)=g(x)$，换句话说 $P\subset B$，因而特别有 $a\in B$. 证完.

对 $p=1$，可以改进(9.4.2)如下：

(9.4.3) 设 A 是 K 的一开连通子集，f 与 g 是 A 中的两个解析函

数，它们在E中取值．假设存在A的一个紧子集H使得那些使$f(x)=g(x)$的点$x\in H$的集M是无穷的．则对每个$x\in A$都有$f(x)=g(x)$．

设(z_n)是M中不同点的无穷序列．因为H是紧的，故序列(z_n)有一个聚点$b\in H$，因而以b为中心，含于A中的任意球P包含M的无穷多个点．但我们可以假设在以b为中心的球$P\subset A$中，f与g都等于$x-b$的收敛幂级数；则孤立零点原理(9.1.5)指出：在P中$f(x)=g(x)$，于是可以应用(9.4.2)．▼

对于$K=\boldsymbol{C}$也可以在下述方面改进(9.4.2)：

(9.4.4) 设$A\subset\boldsymbol{C}^p$是一开连通集，f与g是A中的两个解析函数，它们在复 Banach 空间E中取值．设U是A的一开子集，b是U中的一点，并假设在集$U\cap(b+\boldsymbol{R}^p)$中，$f(x)=g(x)$；则对每个$x\in A$，都有$f(x)=g(x)$．

由平移，我们可以假设$b=0$．设$h=f-g$，并设P是$\boldsymbol{C}^p$中的以0为中心、含于U中的一多圆柱，而在P中，$h(z)$等于一绝对可和幂级数$(c_\nu z^\nu)$的和．因为$P\cap\boldsymbol{R}^p$是$\boldsymbol{R}^p$中的一个多圆柱，并且在$P\cap\boldsymbol{R}^p$中$h(x)=0$；据(9.1.5)这表明对每一个ν都有$c_\nu=0$．于是在P中$h(z)=0$，并可应用(9.4.2)．

在一开连通集$A\subset K^p$中，我们称子集$M\subset A$是一个**唯一性集**，如果在A中定义并解析的任意两个函数一旦在M中重合，就在A中重合．(9.4.2)，(9.4.3)与(9.4.4)表明：A的一非空开子集U，或者交集$U\cap(b+\boldsymbol{R}^p)$(如果非空)，或者，对于$p=1$，$A$的紧无穷子集，都是唯一性集．我们在(9.9)中将看到当$K=\boldsymbol{C}$的另一个例子．

上述结果表明：如果一开连通子集$A\subset\boldsymbol{C}^p$使得$A\cap\boldsymbol{R}^p\neq\phi$，则$A$中任一解析函数$f$是由它在$A\cap\boldsymbol{R}^p$中的值完全确定的．$f$在$A\cap\boldsymbol{R}^p$上的限制是一个解析函数，但是一般地$A\cap\boldsymbol{R}^p$中一解析函数不能开拓成$A$中的一解析函数．但我们有下面较弱的结果：

(9.4.5) 设E是一复 Banach 空间，A是$\boldsymbol{R}^p$的开子集，f是A到

E的一解析映射．那么存在一开集 $B\subset \mathbf{C}^p$ 使得 $B\cap \mathbf{R}^p=A$，以及B到E的一个解析映射g，它是f的开拓．

事实上，对每个 $a=(a_1,\cdots,a_p)\in A$，存在$\mathbf{R}^p$中的含于A中且由 $|x_i-a_i|<r_i(1\leqslant i\leqslant p)$ 定义的开多圆柱P_a，使得在P_a中 $f(x)$ 等于绝对可和幂级数 $(c_{n_1\cdots n_p}(x_1-a_1)^{n_1}\cdots(x_p-a_p)^{n_p})$ 的和．设Q_a是$\mathbf{C}^p$内中心为a、半径为r_i的开多圆柱；那么，据(9.1.2)，幂级数 $(c_{n_1\cdots n_p}(z_1-a_1)^{n_1}\cdots(z_p-a_p)^{n_p})$ 在Q_a中是绝对可和的；设 $g_a(z)$ 是它的和．如果a，b是A的两个点并使得$Q_a\cap Q_b\neq\phi$，则 $P_a\cap P_b=(Q_a\cap Q_b)\cap\mathbf{R}^p$ 是非空的，且在$P_a\cap p_b$中有 $g_a(x)=g_b(x)=f(x)$．又由(9.1.1) $Q_a\cap Q_b$ 是连通的．于是由(9.4.4)推出：在 $Q_a\cap Q_b$ 中，$g_a(z)=g_b(z)$．现在我们取 $B=\bigcup\limits_{a\in A}Q_a$，并且在每个$Q_a$中定义$g$等于$g_a$；$g$的解析性可由(9.3.1)推出．

(9.4.5)的证明表明：**当f是定义在$\mathbf{R}^p$中的整函数时，它可以开拓成定义在$\mathbf{C}^p$中的整函数，而且，据(9.4.4)，这个函数是唯一的．**

问　　题

1) a) 设 $P(u_1,\cdots,u_{r+1})$ 是系数在K中的多项式，$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 是K中的元素，且当 $1\leqslant i\leqslant r$ 时 $|\alpha_i|<1$．假设存在K中的以0为中心的球B与在B中解析的纯量函数f，使得对每个 $z\in B$ 都有 $f(z)=P(z,f(\alpha_1 z),\cdots,f(\alpha_r z))$．试证：$f$可以开拓成在整个集$K$中解析的函数$g$，并且它在$K$中满足上述函数方程(利用(9.4.2))．

b) 假设 $K=\mathbf{C}$，再设存在实数β与对 $\mathscr{R}(z)>\beta$ 解析的纯量函数f，并且在该子集中满足方程 $f(z)=P(z,f(z+a_1),\cdots,f(z+a_r))$，其中$a_i$是复数且 $\mathscr{R}(a_i)>0$．试证：f可以开拓成在C中解析并满足相同函数方程的函数g．

c) 把上述结果推广到任意个变量的函数．

2) 设D是$\mathbf{C}^p$中一个连通的开集，D'是D在映射 $(z_1,\cdots,z_p)\to(\bar z_1,\cdots,\bar z_p)$ 下的象．设f是在D中解析的复函数，并假设 $D\cap\mathbf{R}^p$ 是非空的，且

f 在 $D\cap R^p$ 中取实值. 试证: f 可以开拓成在 $D\cup D'$ 中解析的函数 g. (在 D' 中考虑函数 $(z_1,\cdots,z_p)\to\overline{f(\bar{z}_1,\cdots,\bar{z}_p)}$, 并利用(9.4.4).)

5. 解析函数的例子;指数函数;数 π

(9.5.1) 设 $P(z)$, $Q(z)$ 是 K^p 中的两个多项式，而且 Q 不恒等于 0. 那么 $P(z)/Q(z)$ 在那些使 $Q(z)\neq 0$ 的点 z 的(开)集(亦即使函数有定义的点集)中是解析的.

显然任何多项式都是整函数. 据(9.3.2)，我们只要证明 $1/z$ 对于 $z\neq 0$ 是解析的;但是如果 $z_0\neq 0$，则可以写成

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{z_0\left(1+\frac{z-z_0}{z_0}\right)}$$
$$=\frac{1}{z_0}-\frac{z-z_0}{z_0^2}+\frac{(z-z_0)^2}{z_0^3}+\cdots$$
$$+(-1)^n\frac{(z-z_0)^n}{z_0^{n+1}}+\cdots.$$

这个幂级数对 $|z-z_0|<|z_0|$ 是绝对可和的，证完.

现在考虑实变量 x 的函数 e^x，我们证明它是一个整函数. 由 Taylor 公式(8.14.3)推得(使用(8.8)): 对任意 n,

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}e^t dt.$$

因为据(8.5.3) e^x 是递增的,故对 $|t|\leqslant|x|$ 有 $|e^t|\leqslant e^{|x|}$,于是 $\left|\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}e^t dt\right|\leqslant\frac{|x|^{n+1}e^{|x|}}{(n+1)!}$.但是,如果 n_0 是大于 $|x|$ 的整数,

则对 $n>n_0$, 有 $\left|\frac{x^n}{n!}\right|\leqslant\left|\frac{x}{n_0}\right|^{n-n_0}\cdot\frac{|x|^{n_0}}{n_0!}$, 于是对任意 $x\in \boldsymbol{R}$,

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots.$$

而据(9.1.2)这个级数在任意紧区间中是依范数收敛的. 我们可以

用(9.4.5)后的附注在 $\boldsymbol{C}$ 中定义一个整函数 e^z（也写作 $\exp z$）等于幂级数 $(z^n/n!)$ 的和．我们有

(9.5.2) $$e^{z+z'}=e^z e^{z'},$$

因为两边都是 $\boldsymbol{C}^2$ 中的整函数且它们在 $\boldsymbol{R}^2$ 中重合，因此可应用(9.4.4)．

对实数 x，因 $(-ix)^n$ 是 $(ix)^n$ 的共轭复数，故 e^{-ix} 是 e^{ix} 的共轭复数；由(9.5.2)推知 $|e^{ix}|=1$．对实数 x，定义 $\cos x=\mathscr{R}(e^{ix})$，$\sin x=\mathscr{I}(e^{ix})$；据(9.3.3)它们是实变量 x 的整函数．又关系 $|e^{ix}|=1$ 等价于 $\cos^2 x+\sin^2 x=1$，因而蕴含 $|\cos x|\leqslant 1$ 与 $|\sin x|\leqslant 1$ 对任意实数 x 成立．此外我们有

(9.5.3) $$D(e^z)=e^z,$$

因为两边都是 $\boldsymbol{C}$ 中的整函数(据(9.3.5))，并且它们在 $\boldsymbol{R}$ 中重合．特别地(见(8.4.1)后的附注)，对实数 x 有 $D(e^{ix})=ie^{ix}$，于是

(9.5.4) $$D(\cos x)=-\sin x,\quad D(\sin x)=\cos x.$$

对实数 x，$\cos x$ 与 $\sin x$ 的定义也可写成 $\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$，$\sin x=(e^{ix}-e^{-ix})/2i$．这两个公式可以用来对复数 z 定义 $\cos z$ 与 $\sin z$，只要在右边用 z 代替 x．使用这些定义，公式(9.5.4)对 x 的复数值仍然成立．

(9.5.5) 存在数 $\pi>0$ 使得方程 $e^z=1$ 的解是数 $2\pi ni$（n 是正或负整数）．

如果 $z=x+iy$，则有 $|e^z|=e^x|e^{iy}|=e^x$，于是 $e^z=1$ 蕴含 $x=0$，$z=iy$．我们首先证明

(9.5.5.1) 使 $\cos x=0$ 的点 $x\geqslant 0$ 的集是非空的．

事实上，我们有

$$1-\cos 2=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{4k+2}}{(4k+2)!}\left(1-\frac{4}{(4k+3)(4k+4)}\right),$$

显然，等式右边的收敛级数的所有的项都>0．因而我们有

$$1-\cos 2\geqslant\left(1-\frac{1}{3}\right)\frac{2^2}{2!}=\frac{4}{3}>1,$$

即 $\cos 2 < 0$；因而由(3.19.8)，连续函数 $\cos x$ 在区间$]0,2[$上等于零.

因 $\cos x$ 是连续的，故 $\cos x = 0$ 的根 $x \geqslant 0$ 的集 D 是闭的(3.15.1)，且它不包含 0，因此有一个最小元素，我们把它记为 $\pi/2$. 则有 $\sin^2\pi/2 = 1$，又因对 $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$，$\sin x$ 是递增的，故 $\sin\pi/2 = 1$，$e^{i\pi/2} = i$. 这就证明了 $e^{2\pi i} = 1$，于是对于每个整数 n，都有 $e^{2\pi ni} = 1$，又据(9.5.2)有

(9.5.6) $$e^{x+2n\pi i} = e^x.$$

因而要完成(9.5.5)的证明，必得证明方程 $e^{ix} = 1$ 在区间 $]0,2\pi[$ 中没有根，但是由(9.5.2)推得 $\cos(x + \pi/2) = -\sin x$，故对于 $\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi$，有 $\cos x \leqslant 0$，又因$\cos(x + \pi) = -\cos x$，于是对 $0 < x < 2\pi$，$\cos x < 1$. 证完.

(9.5.7) 映射 $x \to e^{ix}$ 是任意区间 $[a, a + 2\pi[$ 到 $\mathbf{C}$ 中"单位圆" $U: |z| = 1$ 上的连续双映射，并且是 $]a, a + 2\pi[$ 到 e^{ia} 在U中的余集上的同胚.

这映射显然是连续的，又由(9.5.2)与(9.5.5)知它是单射的.要证明它是 $[a, a + 2\pi[$ 上的满映射，显然可以假设 $a = 0$，因为如果 $\zeta \in U$，则 ζe^{-ia} 也在U中. 设 $\zeta = \alpha + i\beta$，则 $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. 因 $|\alpha| \leqslant 1$ 且在区间$[0, \pi]$中 $\cos x$ 连续并有 $\cos 0 = 1$，$\cos\pi = -1$，故据 Bolzano 定理 (3.19.8) 存在 $y \in [0,\pi]$ 使得 $\cos y = \alpha$. 因此 $\sin y = \pm\beta$. 如果 $\sin y = \beta$，定理就证完了. 如若 $\sin y = -\beta$，则有 $\cos(2\pi - y) = \cos y = \alpha$ 及 $\sin(2\pi - y) = -\sin y = \beta$. 设$V$是 e^{ia} 在U中的余，并设 $\zeta_0 = e^{ib} \in V$，其中 $a < b < a + 2\pi$. 若 $x \to e^{ix}$ 在 $]a, a + 2\pi[$ 上的限制的逆映射在 ζ_0 不连续，则在 $]a, a + 2\pi[$ 中存在一个序列(x_n)，它的元素属于 b 的某邻域的余，而且使得 $\lim\limits_{n\to\infty} e^{ix_n} = \zeta_0$. 但是，据(3.16.1)，有一个子序列$(x_{n_k})$趋向于在紧集$[a, a + 2\pi]$中的一极限 $c \neq b$，又因 $e^{ic} \neq e^{ib}$，就得到了矛盾.（另一种证明见(10.3.1).）

(9.5.8) 单位圆U是连通的.

这可由(9.5.7),(3.19.1)与(3.19.7)推出.

(9.5.9) ("极大值原理") 设 $(c_\nu z^\nu)$ 是具有复系数的幂级数，在以 0 为中心的开多圆柱 $P\subset \boldsymbol{C}^p$ 中绝对可和，并设 $f(z)$ 是其和. 假设存在以 0 为中心的开球 $B\subset P$ 使得对每个 $z\in B$ 都有 $|f(z)|\leqslant |f(0)|$. 那么对每个附标 $\nu\neq(0,\cdots,0)$ 都有 $c_\nu=0$. 换句话说，f 是一个常数.

我们首先证明：如果定理对 $p=1$ 为真,则它对任意 p 都真. 事实上,对于任意 $z=(z_1,\cdots,z_p)\in P$,考虑一个复变量的函数 $g(t)=f(tz_1,\cdots,tz_p)$，它对 $|t|<1+\varepsilon$ 是解析的,只要 ε 充分小. 因为对于很小的 t 值有 $|g(t)|\leqslant|g(0)|$，所以根据假设我们有 $g(t)=g(0)$. 于是特别地,有 $f(z_1,\cdots,z_p)=g(1)=f(0)$. 对于 $p=1$, 可假设 $c_0\neq 0$, 否则, 据(9.1.6)，结果是显然的. 假设存在一些附标 $n>0$ 使得 $c_n\neq 0$, 并设 m 是其中最小的. 可以写出

$$f(z)=c_0(1+b_mz^m+z^mh(z)),$$

其中 $b_m\neq 0$, h 在 P 中是解析的且 $h(0)=0$. 设 $r>0$ 是这样的：它使 $|z|\leqslant r$ 含于 B 中并且对于 $|z|\leqslant r$ 有 $|h(z)|\leqslant\frac{1}{2}|b_m|$(9.1.3). 记 $b_m=|b_m|\zeta$, 其中 $|\zeta|=1$. 据(9.5.7)存在实数 t 使得 $e^{mit}=\zeta^{-1}$. 因此,对 $z=re^{it}$, 有

$$|1+b_mz^m+z^mh(z)|=|1+|b_m|r^m+z^mh(z)|\geqslant 1+\frac{1}{2}|b_m|r^m.$$

这与在 B 中 $|f(z)|\leqslant c_0$ 的假设矛盾.

如果 $\boldsymbol{C}^p$ 换为 $\boldsymbol{R}^p$, 则 (9.5.9) 的结果不成立，这可以幂级数 $1/(1+z^2)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nz^{2n}$ (对于 $|z|<1$) 作为例证.

(9.5.10) 设 f 是在开子集 $A\subset\boldsymbol{C}^p$ 中定义的复值解析函数，并且它在 A 的任意连通分支都不是常数. 那么，对于任意紧子集 $H\subset A$，满足条件 $|f(z)|=\sup_{x\in H}|f(x)|$ 的点 $z\in H$ (据(3.17.10)

这样的点是存在的)都是H的边界点.

这立即可由(9.5.9)与解析开拓原理(9.4.2)推出.

问　　题

1) 试证：如果 $\mathscr{R}(z)\leqslant 0$，则对任意整数 $n>0$，有

$$\left| e^z-\left(1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}\right)\right|\leqslant\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\right|$$

(把 Taylor 公式(8.14.2)应用到 $t\to e^{zt}$).

2) 试证：对实数x有

$$\left|\cos x-\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)\right|\leqslant\frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

并且这个差的符号是 $(-1)^{n+1}$；类似地有

$$\left|\sin x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right)\right|\leqslant\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

且这个差的符号是 $(-1)^n x$.（对n使用归纳法.）

3) a) 设U是$\mathbf{C}^p$中一相对紧的开子集，f是U中的复值解析函数，它在U的任意连通分支中都不是常数. 假设存在这样的数 $M>0$：对U的每个边缘点x与任意 $\varepsilon>0$，总存在x的邻域V使得对任意 $z\in U\cap V$ 都有 $|f(z)|\leqslant M+\varepsilon$. 试证：对任意 $z\in U$，都有 $|f(z)|\leqslant M$，并且等式在U的任何点都不能达到(利用(9.5.10)与U的边缘的紧性).

b) 在$\mathbf{C}$中，设U是满足条件 $\mathscr{R}(z)>0$，$-\frac{\pi}{2}<\mathscr{I}(z)<\frac{\pi}{2}$ 的开集. 试证：整函数 $\exp(\exp(z))$ 在U的边界上是有界的，但在U中无界.

4) a) 设E是范数为 $\|(z_1,z_2)\|=\sup(|z_1|,|z_2|)$ 的 Banach 空间 $\mathbf{C}^2$，那么，函数 $z\to f(z)=(1,0)+(0,1)z$ 是$\mathbf{C}$到$\mathbf{C}^2$的一个解析映射，使得对 $|z|<1$，$\|f(z)\|$ 是常数.

b) 把(9.5.10)的结果推广到定义在开集 $A\subset\mathbf{C}^p$ 中而取值于复 Hilbert 空间的函数.（如果 $\|f(z)\|$ 在 $z_0\in A$ 达到最大值，则考虑复值函数 $z\to(f(z)|f(z_0))$；与a)比较.）

5) 设U是$\mathbf{C}^p$中一开集，P是含于U中的闭多圆柱，其中心为 $a=(a_1,\cdots,a_p)$，半径为 $r_k(1\leqslant k\leqslant p)$. 设$f$是$U$中的一复值解析函数，并假设在集 $S=\{(z_i)\,|\,|z_i-a_i|=r_i$ 对 $1\leqslant i\leqslant p\}$（即诸圆 $|z_i-a_i|=r_i$ 的积)上，$|f(z)|\leqslant M$. 试证：对任意 $z\in P$，$|f(z)|\leqslant M$.（对p使用归纳法，对 $|b_1-a_1|=$

r_1)考虑函数$(z_2,\cdots,z_p)\to f(b_1,z_2,\cdots,z_p)$.

6) 设 $P(x,y)$是二个复变量的复系数多项式,并且 x 的最高次数为 m, y 的为 n. 假设: 对满足 $-1\leqslant x\leqslant 1,-1\leqslant y\leqslant 1$ 的实数 x, y, 有 $|P(x,y)|\leqslant M$. 试证: 对使 $|x|\geqslant 1$, $|y|\geqslant 1$ 的实数 x, y, 有 $|P(x, y)|\leqslant M(|x| + \sqrt{x^2-1})^m(|y| + \sqrt{y^2-1})^n$. (对 $|s|<1$, $|t|<1$ 把问题 5 应用到函数 $s^m t^n P\left(s+\frac{1}{s},\ t+\frac{1}{t}\right)$.)把此结果推广到任意多个变量的多项式.

7) a)设 $f(z)$ 是圆盘 B:$|z|<1$ 中的一个复变量的复解析函数.假设在 B 中 $|f(z)|<M$ 以及 $f(0)=0$. 试证: 在 B 中 $|f(z)|\leqslant M|z|$ (考虑在 B 中是解析的函数 $f(z)/z$) ("Schwarz 引理"). 何时可能相等?

b) 在 $\mathbf{C}^p$ 上对 $z=(z_1,\cdots,z_p)$ 考虑范数 $\|z\|=(|z_1|^2+\cdots+|z_p|^2)^{1/2}$ (称为 "Hermite 范数"). 设 B 是关于该范数的球 $\|z\|<1$, 又设 f 是 B 中满足 $f(0)=0$ 并在 B 中有 $|f(z)|\leqslant M$ 的复值解析函数,试证: 在 B 中$|f(z)|\leqslant M\|z\|$ (考虑一个变量的复函数 $t\to f(z_1 t,\cdots,z_p t)$, 并使用 a)).

8) a) 在复域 $\mathbf{C}$ 中,设 $\mathbf{R}_-$ ("负半实直线")是由 $\mathscr{I}(z)=0$, $\mathscr{R}(z)\leqslant 0$ 定义的子集.设 F 是 $\mathbf{R}_-$ 在 $\mathbf{C}$ 中的余集.另一方面,设 S 是由 $-\pi<\mathscr{I}(z)<\pi$ 定义的集. 试证: 映射 $z\to e^z$ 是 S 到 F 上的同胚(利用(9.5.7));其逆映射记为 $z\to\log z$,并称为 "z 的对数的主值". 我们有 $\log z = \log|z| + \mathrm{Am}(z)i$, 其中 $\mathrm{Am}(z)$ 是满足 $-\pi<\theta<\pi$ 与 $z=|z|e^{i\theta}$ 的唯一的数 θ (z 的"幅角"). 如果 z, z' 与 zz' 都在 F 中, 试证: 差 $\log(zz')-\log z-\log z'$ 等于 0, $2\pi i$ 或者 $-2\pi i$.

b) 在球 B: $|z|<1$ 中,幂级数 $((-1)^n z^n/n)_{n\geqslant 1}$ 是绝对收敛的; 如果 $f(z)$ 是它的和,试证: $f(z)=\log(1+z)$. (注意: 如果 $z\in B$, $1+z\in F$; 证明 $f'(z)=1/(1+z)$, 由此结果推出, 当 z 是实数并当 $-1<z<1$ 时, 有 $f(z)=\log(1+z)$. 最后, 考虑解析函数 $e^{f(z)}$ 并使用(9.4.4).)由此得出: $\log z$ 在 F 中是解析的.

c) 对任意复数 t 与任意整数 $n>0$, 设$\binom{t}{n}=t(t-1)\cdots(t-n+1)/n!=\sum_{k=0}^{n}c_{kn}t^k$, 其中 c_{kn} 是有理数 $\left(我们令\binom{t}{0}=1\right)$.试证:幂级数$(c_{kn}z^n t^k)$ 在 $\mathring{B}\times\mathbf{C}$ 中是绝对可和的(注意: 对任意数 $r>0$, 有

$$\left(1+\frac{r}{1}\right)\left(1+\frac{r}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{r}{n}\right)\leqslant\exp\left(r\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right)$$

$\leqslant a \cdot (n+1)^t$

其中 a 是一常数)。再证明这个级数的和是 $\exp(t\log(1+z))$。(首先考虑 z 与 t 是实数的情形，并把 Taylor 公式(8.14.2) 应用到函数 $x \to (1+x)^t$ 上。然后利用(9.4.4)。)函数 $\exp(t\log(1+z))$ 也写成 $(1+z)^t$；试证：对实数值 t，有 $|(1+z)^t| = |1+z|^t$。

d) 如果 $t>0$，试证 $z\to(1+z)^t$ 可以连续开拓到闭圆盘 $|z|\leqslant 1$ 上。(利用$\left|\binom{t}{n}\right|$的类似于 c) 中所得的上界。并注意：对 $s>0$，有 $1-s<e^{-s}$。)

9) a) 设 $f_{jk}(1\leqslant j\leqslant m;\ 1\leqslant k\leqslant n)$ 是定义在 C^p 的开连通子集 A 上的纯量解析函数，又设 α_{jk} 是 $\geqslant 0$ 的实数。试证：连续函数

$$u(z) = \sum_{k=1}^{n} |f_{1k}(z)|^{\alpha_{1k}}|f_{2k}(z)|^{\alpha_{2k}}\cdots|f_{mk}(z)|^{\alpha_{mk}}$$

在 A 的任一点上都不能达到极大值，除非每个积 $|f_{1k}(z)|^{\alpha_{1k}}\cdots|f_{mk}(z)|^{\alpha_{mk}}$ $(1\leqslant k\leqslant n)$ 在 A 中都是常数。(注意：如果 $f(z)$ 在 A 中解析且 $f(z_0)\neq 0$，那么，对每个实数 λ，都存在一函数 $g_\lambda(z)$，它在 z_0 的某邻域中解析且在该邻域中有 $|g_\lambda(z)| = |f(z)|^\lambda$；应用问题 8c) 于该结果。)把此结果推广到 α_{jk} 是任意实数的情形，如果任一个 f_{jk} 在 A 中均不为 0。

b) 把问题 3a) 的结果推广到 $u(z)$。

10) 设 $f(z)$ 是复变量的复值函数，在由 $R_1<|z|<R_2$ 定义的开集 A 上解析(其中 $0\leqslant R_1<R_2$)。对任意满足 $R_1<r<R_2$的 r，设 $M(r) = \sup\limits_{|z|=r}|f(z)|$。试证：如果 $R_1<r_1<r_2<r_3<R_2$，则

$$\log M(r_2)\leqslant\frac{\log r_3-\log r_2}{\log r_3-\log r_1}\log M(r_1)+\frac{\log r_2-\log r_1}{\log r_3-\log r_1}\log M(r_3)$$

("Hadamard 三圆定理")。(把问题 9 应用到 $|z|^\alpha|f(z)|$上，其中实数 α 适当地选择，并在集 $r_1<|z|<r_3$ 中考虑函数 $|z|^\alpha\cdot|f(z)|$。)什么时候等式成立?

11) 在 C^p 与 C^q 上赋予 Hermite 范数(问题 7)。设 f 是由 C^p 中的球 B: $\|z\|<1$ 到 C^q 的解析映射，我们有 $f=(f_1,\cdots,f_q)$，其中 f_k 是 B 中的复值解析函数。假设 $f(0)=0$；试证：如果对 $z\in B$ 均有 $\|f(z)\|\leqslant M$，则对 $z\in B$ 也有 $\|f(z)\|\leqslant M\cdot\|z\|$ (对每个 $z\in B$，考虑函数 $t\to f_k(tz)/t$ 并应用问题 9 与 3)。等式何时成立?

12) 在 C^p 上赋予 Hermite 范数(问题 7)。设 F，G 是 B：$\|z\|<1$ 到 C^p 中的两个解析映射，它们分别是 B 到开集 $U=F(B)$ 与 $V=G(B)$ 上的

同胚，而且它们的逆映射分别在 $F(B)$ 与 $G(B)$ 上解析（这最后的条件实际上可由其他的条件推出；见 10.3 节，问题 2）．对任意满足 $0<r<1$ 的 r，设 B_r 是球 $\|z\|<r$，并设 $U_r=F(B_r)$，$V_r=G(B_r)$，它们分别是 U 与 V 的开子集．试证：如果 U 到 V 的解析映射 u 满足 $u(F(0))=G(0)$，则对每个满足 $0<r<1$ 的 r，都有 $u(U_r)\subset V_r$（利用问题 11）．

13）设 f 是球 B: $|z|<R$ 中的一个复变量的复值解析函数．对任意满足 $0<r<R$ 的 r，设 $A(r)=\sup\limits_{|z|\leqslant r}\mathscr{R}(f(z))$．

a）试证：$r\to A(r)$ 是严格递增的，除非 f 是常数（考虑 $\exp(f(z))$）．

b）试证：当 $A(R_-)<+\infty$ 时，有

$$A(r)\leqslant\frac{R-r}{R+r}A(0)+\frac{2r}{R+r}A(R_-)$$

（应用问题 12，其中 $F(z)=Rz$，而 $G(z)$ 是 $(az+b)/(cz+d)$ 形的，这里常数 a, b, c, d 选得使 $G(B)$ 是由 $\mathscr{R}(z)<A(R_-)$ 定义的半平面）．

14）a）设 A 是 $\mathbf{C}^p$ 的相对紧开子集，E 是 A 的边缘的一个闭子集．假设存在一复值函数 g，它在 $\bar{A}$ 的某邻域中是解析的，在 E 中等于 0 而在 A 中任何连通部分都不恒等于 0．设 f 是 A 中的复值解析函数，而且在 A 中是有界的．又假设存在这样的数 M：对 A 的每个边缘点 $x\notin E$ 与每个 $\varepsilon>0$，总存在 x 在 $\mathbf{C}^p$ 中的邻域 V，使得对 $z\in A\cap V$ 有 $|f(z)|\leqslant M+\varepsilon$．试证对每个 $z\in A$ 都有 $|f(z)|\leqslant M$．（可以假设对 $z\in A$ 有 $|g(z)|\leqslant 1$．考虑函数 $|f(z)|\cdot|g(z)|^{\alpha}$，其中 $\alpha>0$ 是任意的，并把问题 9b）的结果应用到这个函数上．）

b）试证：当删去 f 在 A 中有界的假设时，a）中的结果不成立．（考虑函数 $\exp(\exp((1-z)/z))$ 并利用问题 3b））．

15）设 $\omega(x)$ 是在 $[0,+\infty[$ 上定义并且满足 $\omega(x)>0$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}\omega(x)=+\infty$ 的函数．验证：如果复值函数 f 在闭半平面 A: $\mathscr{R}(z)\geqslant 0$ 上解析，则至少存在一点 $\zeta\in A$ 使得 $|f(\zeta)|<|\exp(\omega(|\zeta|)\zeta)|$．（用反证法：如果结论不真，应用问题 9a）证明：对每个 $\varepsilon>0$ 的值，函数 $|e^z|\cdot|f(z)|^{-\varepsilon}$ 在 A 中都是 $\leqslant 1$ 的．）

16）设 A 是 $\mathbf{C}^p$ 的相对紧开子集，f 是在 A 中解析的复值函数．假设存在数 $M>0$ 与对任意 $z\in A$，$g(z)\neq 0$ 的在 A 中解析的复值函数 g，并具有下述性质：对 A 的每个边缘点 x，与每个 $\varepsilon>0$，存在 x 的邻域 V，使得对 $z\in A\cap V$，有 $|f(z)|\leqslant M|g(z)|^{\varepsilon}$．试证：在 A 中 $|f(z)|\leqslant M$（"Phragmén-

Lindelöf 原理";利用问题 9b))。

17) 设 U 是问题 3b) 中定义的那个开集，又设 f 是 $\bar{U}$ 的某邻域 A 中的复值解析函数，具有下述性质：1° 在 U 的边缘上 $|f(z)|\leqslant 1$；2° 存在满足 $0<a<1$ 的常数 a 且对 $z\in U$，有 $|f(z)|\leqslant \exp(\exp(a\mathscr{R}(z)))$。试证在 U 中 $|f(z)|\leqslant 1$。(注意：$z\to\frac{1}{z+1}$ 把 U 变换成一个相对紧集，并使用 Phragmén-Lindelöf 原理(问题 16)，其中 $g(z)$ 取成 $\exp(\exp(bz))$。)

6. 沿路径的积分

$\boldsymbol{C}$ 中的一条**线路**是指不退缩为一点的紧区间 $I=[a,b]\subset\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{C}$ 的一个连续映射 γ。如果 $\gamma(I)\subset A\subset\boldsymbol{C}$，则我们称 γ 是 A **中的一条线路**。$\gamma(a)(\gamma(b))$ 称为线路的**始点(终点)**，这两点也统称为 γ 的**端点**。当 $\gamma(a)=\gamma(b)$ 时，称 γ 为**闭路**。当 γ 在 I 中是常数时，我们也说线路 γ 退缩为一点。I 到 $\boldsymbol{C}$ 的满足 $\gamma^{\circ}(t)=\gamma(a+b-t)$ 的映射 γ° 是一条线路，称为 γ 的**反向**。设 $I_1=[b,c]$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的一紧区间，其始点是 I 的终点，并设 $I_2=I\cup I_1=[a,c]$。若 γ_1 是在 I_1 上定义的一条线路，并满足 $\gamma_1(b)=\gamma(b)$，又若定义 γ_2 在 I 中等于 γ，在 I_1 中等于 γ_1，则 γ_2 是一条线路，记为 $\gamma\vee\gamma_1$，并称为 γ 与 γ_1 的**毗连**。

我们称定义在 $I=[a,b]\subset\boldsymbol{R}$ 上的线路 γ 是一条**路径**，如果 γ 是正则函数的原函数(8.7.2)。如果又有 $\gamma(a)=\gamma(b)$，我们就说 γ 是**回路**。显然路径的反向是路径，两条路径的毗连也是路径。设 γ，γ_1 是两个路径，分别在 I，I_1 上定义。我们称 γ 与 γ_1 是**等价的**，如果存在 I 到 I_1 上的递增双射 φ，使得 φ 与 φ^{-1} 都是正则函数的原函数，并且 $\gamma=\gamma_1\circ\varphi$ (从而 $\gamma_1=\gamma\circ\varphi^{-1}$)。立即可以推知(据(8.4.1))，这实际上是路径之间的一种等价关系。

如果路径 γ 是在 $I=[a,b]$ 上定义的，则存在与 γ 等价的路径 γ_1 并且它定义在任一另外的区间 $J=[c,d]$ 上，因为存在 J 到 I 上的线性双射 $t\to\varphi(t)=\alpha t+\beta$，并且 $\gamma_1=\gamma\circ\varphi$ 具有所需

要的性质.

设 γ 是一条定义在 $I=[a,b]$ 上的路径,又设 f 是紧集 $\gamma(I)$ 到复 Banach 空间 E 中的一个连续映射; 那么函数 $t\to f(\gamma(t))$ 在 I 中连续, 从而 $t\to f(\gamma(t))\gamma'(t)$ 是一个正则函数. 积分 $\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$ 称为 **f 沿路径 γ 的积分**,并记为 $\int_\gamma f(z)dz$. 由 (8.7.4)可立即推知: 如果 γ_1 是与 γ 等价的路径,则 $\int_{\gamma_1} f(z)dz=\int_\gamma f(z)dz$. 此外,由定义可直接推得:

(9.6.1) $\int_{\gamma^0} f(z)dz=-\int_\gamma f(z)dz.$

(9.6.2) $\int_{\gamma_1\vee\gamma_2} f(z)\,dz=\int_{\gamma_1} f(z)\,dz+\int_{\gamma_2} f(z)dz,$

当毗连 $\gamma_1\vee\gamma_2$ 有定义时.

设 γ 是一个定义在 $I=[a,b]$ 上的回路. 对任意 $c\in I$, 考虑 $J=[c,c+b-a]$ 上的映射 γ_1,其定义如下: 当 $c\leqslant t\leqslant b$ 时, $\gamma_1(t)=\gamma(t)$; 当 $b\leqslant t\leqslant c+b-a$ 时 $\gamma_1(t)=\gamma(t-b+a)$. 立即可以验证: γ_1 是使 $\gamma_1(J)=\gamma(I)$ 的回路, 而且对于 $\gamma(I)$ 到 E 的任意连续映射 f, 有 $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz=\int_\gamma f(z)dz$. 换句话说, f 沿回路的积分与回路的始点无关.

设 γ_0, γ_1 是在同一个区间 I 上定义的两条线路, 并设 A 是 $\mathbf{C}$ 中满足 $\gamma_0(I)\subset A$ 与 $\gamma_1(I)\subset A$ 的一开集. **A 中 γ_0 到 γ_1 的同伦是指 $I\times[\alpha,\beta]$ ($\alpha<\beta$ 在 $\mathbf{R}$ 中) 到 A 的这样的连续映射 φ: 在 I 中有 $\varphi(t,\alpha)=\gamma_0(t)$ 与 $\varphi(t,\beta)=\gamma_1(t)$.** 我们说 γ_1 在 A 中同伦于 γ_0,如果存在 A 中 γ_0 到 γ_1 的同伦. 很清楚,对任意 $\xi\in[\alpha,\beta]$, $t\to\varphi(t,\xi)$ 是 A 中的一条线路. 当 γ_0 与 γ_1 都是闭路时, 我们称 φ 是 A 中的闭路同伦, 如果存在 A 中 γ_0 到 γ_1 的同伦 φ,使得对任意 $\xi\in[\alpha,\beta]$, $t\to\varphi(t,\xi)$ 是 A 中的一条闭路. 当我们说两个闭路 γ_0, γ_1 同伦时, 总是指存在一个闭路同伦(而不只是一个同伦).

如果φ是A中γ_0到γ_1的定义在$I\times[\alpha,\beta]$中的同伦，则映射$(t,\xi)\to\varphi(t,\alpha+\beta-\xi)$是$A$中$\gamma_1$到$\gamma_0$的同伦．另一方面，如果$\psi$是$A$中定义在$I\times[\alpha',\beta']$中的$\gamma_1$到$\gamma_2$的同伦，那么，我们可以用下面的方法定义$A$中$\gamma_0$到$\gamma_2$的同伦$\theta$：在$I\times[\alpha,\beta]$中我们取$\theta=\varphi$；令$\beta''=\beta'+\beta-\alpha'$，在$I\times[\beta,\beta'']$中取$\theta(t,\xi)=\psi(t,\xi+\alpha'-\beta)$．这是有意义的，因为据假设两个定义都给出$\theta(t,\beta)=\gamma_1(t)$，并可以直接验证：$\theta$在$I\times[\alpha,\beta'']$中连续，在$A$中取其值，而且满足$\theta(t,\alpha)=\gamma_0(t)$，$\theta(t,\beta'')=\gamma_2(t)$．这表明：$A$中线路之间的关系"$\gamma_1$在$A$中同伦于$\gamma_0$"是一种等价关系；它也是$A$中闭路之间的等价关系，因为，当$\gamma_0$与$\gamma_1$的一部分以及$\gamma_1$与$\gamma_2$的另一部分都是闭路同伦时，上述定义给出$\gamma_0$与$\gamma_2$是闭路同伦．

(9.6.3)（Cauchy 定理） 设$A\subset\mathbf{C}$是开集，f是A到复 Banach 空间E的解析映射．如果Γ_1,Γ_2是A中的两个回路，并且它们在A中是同伦的，则$\int_{\Gamma_1}f(z)dz=\int_{\Gamma_2}f(z)dz$．

假设Γ_1,Γ_2是在$I=[a,b]$中定义的，并设φ是A中Γ_1到Γ_2的定义在$I\times[\alpha,\beta]$中的同伦（注意：并不假设：对$\xi\neq\alpha,\beta$，闭路$t\to\varphi(t,\xi)$是回路）．因为φ是连续的，故$L=\varphi(I\times[\alpha,\beta])$是含于$A$中的紧集．据定义与 Borel-Lebesgue 公理，在L中存在有限个点$a_k(1\leqslant k\leqslant m)$以及对每个$k$，都存在以$a_k$为中心的开球$P_k\subset A$，使得：1° 这些$P_k$构成$L$的开覆盖；2° 在每个$P_k$中，$f(z)$等于一个在$P_k$中收敛的关于$z-a_k$的幂级数的和．存在一个数$\rho>0$使得对于每个$x\in L$，以$x$为中心以$\rho$为半径的开球都至少包含在一个$P_k$中(3.16.6)．由(9.3.1)推出，对于每个$x\in L$，$f(z)$在球$B(x;\rho)$中都等于关于$z-x$的收敛幂级数．

因φ在$I\times[\alpha,\beta]$中是一致连续的(3.16.5)，故存在$\varepsilon>0$使得$|t-t'|\leqslant\varepsilon$，$|\xi-\xi'|\leqslant\varepsilon$蕴含$|\varphi(t,\xi)-\varphi(t,\xi')|\leqslant\rho/4$．设$(t_i)_{0\leqslant i\leqslant r}$是$I$中这样一个递增序列：即$t_0=a$，

$t_r = b$ 以及对于 $0 \leqslant i \leqslant r-1$ 有 $t_{i+1} - t_i \leqslant \varepsilon$；$(\xi_j)_{0 \leqslant j \leqslant s}$ 是 $[\alpha, \beta]$ 中满足 $\xi_0 = \alpha$, $\xi_s = \beta$ 的递增序列，以及对 $0 \leqslant j \leqslant s-1$ 有 $\xi_{j+1} - \xi_j \leqslant \varepsilon$. 对 $t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}$, $0 \leqslant i \leqslant r-1$ 及 $1 \leqslant j \leqslant s-1$，定义 γ_j 如下.

$$\gamma_j(t) = \varphi(t_i, \xi_j) + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}(\varphi(t_{i+1}, \xi_j) - \varphi(t_i, \xi_j)).$$

此外设 $\gamma_0 = \Gamma_1$, $\gamma_s = \Gamma_2$. 那么对于 $0 \leqslant j \leqslant s$, γ_j 是 A 中的回路. 我们只要证明：对于 $0 \leqslant j \leqslant s-1$ 有 $\int_{\gamma_j} f(z)dz = \int_{\gamma_{j+1}} f(z)dz$. 现在注意：据 t_i 与 ξ_j 的选取，所有的点 $\gamma_j(t)$ 与 $\gamma_{j+1}(t)$，其中 $t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}$，都属于以 $\varphi(t_i, \xi_j)$ 为中心以 ρ 为半径的开球 Q_{ij}. 据(9.3.7) 与 (9.3.1)，存在一个在 Q_{ij} 中解析的函数 g_{ij} 使得在 Q_{ij} 中，$g_{ij}(z) = f(z)$. 因为 $Q_{i-1,j} \cap Q_{ij}$ 是非空的与连通的 (9.1.1)，故据 (8.6.1) 差 $g_{i-1,j} - g_{ij}$ 在 $Q_{i-1,j} \cap Q_{ij}$ 中是一常数. 因为根据定义，

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_j} f(z)\,dz &= \sum_{i=0}^{r-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\gamma_j(t))\gamma_j'(t)\,dt \\ &= \sum_{i=0}^{r-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} g_{ij}'(\gamma_j(t))\gamma_j'(t)\,dt \\ &= \sum_{i=0}^{r-1}(g_{ij}(\gamma_j(t_{i+1})) - g_{ij}(\gamma_j(t_i))).\end{aligned}$$

因此我们的问题化为证明关系式

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{r-1}(g_{ij}(\gamma_j(t_{i+1})) - g_{ij}(\gamma_j(t_i))) \\ &\quad = \sum_{i=0}^{r-1}(g_{ij}(\gamma_{j+1}(t_{i+1})) - g_{ij}(\gamma_{j+1}(t_i))),\end{aligned}$$

这式也可以写成

(9.6.3.1) $\quad \sum_{i=0}^{r-1}(g_{ij}(\gamma_j(t_{i+1})) - g_{ij}(\gamma_{j+1}(t_{i+1})) - g_{ij}(\gamma_j(t_i))$

$$+\ g_{ij}(\gamma_{j+1}(t_i)))=0.$$

但是对于 $1\leqslant i\leqslant r-1$，$\gamma_j(t_i)$ 与 $\gamma_{j+1}(t_i)$ 都属于 $Q_{i-1,j}\cap Q_{ij}$，于是根据上面已得知的，我们有

$$g_{ij}(\gamma_j(t_i))-g_{ij}(\gamma_{j+1}(t_i))=g_{i-1,j}(\gamma_j(t_i))-g_{i-1,j}(\gamma_{j+1}(t_i)).$$

因而(9.6.3.1)的左边化为

$$g_{r-1,j}(\gamma_j(t_r))-g_{r-1,j}(\gamma_{j+1}(t_r))-g_{0j}(\gamma_j(t_0))+g_{0j}(\gamma_{j+1}(t_0)).$$

但因 γ_j 与 γ_{j+1} 都是回路，故我们有 $\gamma_j(t_0)=\gamma_j(t_r)$ 与 $\gamma_{j+1}(t_0)=\gamma_{j+1}(t_r)$. 又，这两点都属于 $Q_{0j}\cap Q_{r-1,j}$，而此集是连通的. 因而据(8.6.1)差 $g_{r-1,j}-g_{0j}$ 在这个集中是一个常数，证完.

(9.6.4) 设 γ_1，γ_2 是开集 $A\subset\mathbf{C}$ 中的两条路径，具有相同的始点 u 与相同的终点 v，而且存在 A 中 γ_1 到 γ_2 的同伦 φ，它保持 u 与 v 不动(即对于每个 $\xi\in[\alpha,\beta]$，都有 $\varphi(a,\xi)=u$ 与 $\varphi(b,\xi)=v$，如果 φ 是在 $[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上定义的). 那么，对于 A 中的每个解析函数 f，都有 $\int_{\gamma_1}f(z)\,dz=\int_{\gamma_2}f(z)dz$.

设 γ_1^0 是 γ_1 的反向路径，并设 $\gamma_3(t)=\gamma_1^0(t-b+a)$ 对于 $b\leqslant t\leqslant 2b-a$ 成立；则 γ_3 是一条等价于 γ_1^0 的路径. 按定义，$\gamma_1\vee\gamma_3$ 与 $\gamma_2\vee\gamma_3$ 都是回路，并且这两个回路在 A 中是同伦的，因为，如果我们定义 $\psi(t,\xi)$，当 $a\leqslant t\leqslant b$ 时等于 $\varphi(t,\xi)$，当 $b\leqslant t\leqslant 2b-a$ 时等于 $\gamma_3(t)$，则 ψ 是 A 中一闭路同伦. 应用(9.6.3)得到 $\int_{\gamma_1}f(z)\,dz+\int_{\gamma_3}f(z)\,dz=\int_{\gamma_2}f(z)\,dz+\int_{\gamma_3}f(z)dz$，证完.

7. 单连通域中解析函数的原函数

单连通域 $A\subset\mathbf{C}$ 是这样的开连通集：A 中的任意闭路都在 A 中同伦于一个退缩为单点的闭路. 显然，$\mathbf{C}$ 中任意一个同胚于 A 的开子集都是单连通域.

(9.7.1) **例.** 关于点 $a\in A$ 的**星形域** $A\subset C$ 是这样的开集：对任意 $z\in A$，连结 a 与 z 的线段都含于 A 中. 这样的集显然是连

通的((3.19.1)与(3.19.3)). 如果 γ 是 A 中的任意一条闭路，那么 γ 是 γ 到那个退缩为 a 的闭路的同伦并且对 $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, $\varphi(t, \xi) = a + (1-\xi)(\gamma(t) - a)$; 一个开球是关于它的任意一点的星形域.

(9.7.2) 如果 $A \subset \mathbf{C}$ 是一开连通集，则对 A 中任意两点 u, v，都有一条以 u 为始点 v 为终点的路径存在.

我们只要证明: A 中以 u 为始点的所有路径的终点的子集 $B \subset A$ 是 A 中既开又闭的(3.19). 如果 $x \in A \cap \bar{B}$，则存在以 x 为中心含于 A 中的球 S，并且据假设，S 包含以 u 为始点的路径 γ 的终点 v. 以 v, x 为端点的线段含于 S 中，假如 γ 定义在 $[a, b]$ 上，那么在 $[a,b]$ 上等于 γ 而在 $[b, b+1]$ 上等于 $\gamma_1(t) = v + (t-b)(x-v)$ 的路径 γ，是含于 A 中的，并且始点为 u，终点为 x. 因而 $x \in B$. 另一方面，如果 $y \in B$，则存在以 y 为中心含于 A 中的球 S. 对任意 $v \in S$，以 y, v 为端点的线段含于 S 中. 同样地定义一条始点为 u 终点为 v 的路径，它含于 A 中，故 $S \subset B$，证完.

(9.7.3) 如果 $A \subset \mathbf{C}$ 是一个单连通域，则任意在 A 中解析的函数 f 都有在 A 中解析的原函数.

设 a, z 是 A 中任意两点，γ_1, γ_2 是 A 中以 a 为始点以 z 为终点的两条路径. 则 $\int_{\gamma_1} f(x)\,dx = \int_{\gamma_2} f(x)\,dx$. 事实上，通过用等价路径代换 γ_2，我们可以假设 γ_1 在 $[b, c]$ 上定义，而 γ_2 在 $[c, d]$ 上定义. 那么 $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2^\circ$ 是 A 中的回路，因而它同伦于 A 中一点，故由 Cauchy 定理，$\int_\gamma f(x)dx = 0$，这就证明了我们的断言. 由此可以定义 $g(z)$ 是 $\int_\gamma f(x)dx$ 对于 A 中任意一条以 a 为始点以 z 为终点的路径 γ 的值，由(9.7.2)，g 是在 A 中定义的. 既然对任意 $z_0 \in A$，存在一个以 z_0 为中心的开球 $B \subset A$，使得在其中 $f(z)$ 等于关于 $z - z_0$ 的收敛幂级数，因而，据(9.3.7)存在 f 在 B 中的原函数 h，它是解析的，并且满足 $h(z_0) = g(z_0)$. 于是，对 $z \in B$, $h(z) - h(z_0) = \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))(z - z_0)dt$. 但是;

据定义，右边就是 $\int_\sigma f(x)dx$，其中 σ 是在 $[0, 1]$ 上定义的路径 $t \to z_0 + t(z - z_0)$. 因为这个路径在 $B \subset A$ 中，故由 g 的定义我们有 $g(z) - g(z_0) = \int_\sigma f(x)dx$，因而得出在 B 中 $g(z) = h(z)$，证完。

8. 点对于回路的指数

(9.8.1) 定义在 $\mathbf{R}$ 的区间 $I = [a, b]$ 上并含于单位圆 $U = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$ 中的任一条线路 $\gamma(I)$，都具有形式 $t \to e^{i\psi(t)}$，其中 ψ 是 I 到 $\mathbf{R}$ 中的连续映射. 如果 γ 是路径，则 ψ 是正则函数的原函数.

因为 γ 在 I 上是一致连续的，所以在 I 中存在满足 $t_0 = a$, $t_p = b$ 的一递增点列 $t_k (0 \leqslant k \leqslant p)$，而且 γ 在每个区间 $I_k = [t_k, t_{k+1}]$ $(0 \leqslant k \leqslant p-1)$ 上的振幅(3.14)都是 $\leqslant 1$ 的，这蕴含 $\gamma(I_k) \neq U$. 如果 $\theta_k \in \mathbf{R}$ 使得 $e^{i\theta_k} \notin \gamma(I_k)$ (9.5.7)，则 $x \to e^{i(x+\theta_k)}$ 是区间 $]0, 2\pi[$ 到 $e^{i\theta_k}$ 在 U 中的余集上的一个同胚(9.5.7)。如果 φ_k 是其逆同胚，则对于 $t \in I_k$，我们可以写成 $\gamma(t) = e^{i\psi_k(t)}$，其中 $\psi_k(t) = \varphi_k(\gamma(t)) + \theta_k$ 在 I_k 中连续. 由(9.5.5)有 $\psi_{k+1}(t_{k+1}) = \psi_k(t_{k+1}) + 2n_k\pi$，其中 n_k 是整数 $(0 \leqslant k \leqslant p-2)$. 现在用下面的方法在 I 上定义 ψ：对 $t \in I_0$, $\psi(t) = \psi_0(t)$；关于 k 使用归纳法，对 $t_k < t \leqslant t_{k+1}$ 我们令 $\psi(t) = \psi_k(t) + \psi(t_k) - \psi_k(t_k)$. 对 k 使用归纳法立即可知，对 $0 \leqslant k \leqslant p-1$，$\psi(t_k) - \psi_k(t_k)$ 是 2π 的整数倍；因此，对 $t \in I$，有 $\gamma(t) = e^{i\psi(t)}$，而 ψ 在 I 上显然是连续的. 其次，若 $\gamma(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$，则有 $\alpha(t) = \cos\psi(t)$, $\beta(t) = \sin\psi(t)$，并且数 $\cos\psi(t)$, $\sin\psi(t)$ 中有一个不为 0. 据(9.5.4)并对函数 $\cos x$, $\sin x$ 之一在其导数 $\neq 0$ 的点上应用(8.2.3)，我们推出：如果 γ 在点 t 有导数，则 ψ 亦然，并且 $i\psi'(t) = \gamma'(t)/\gamma(t)$. 证完.

(9.8.2) 对任意点 $a \in \mathbf{C}$ 与任意含于 $\mathbf{C} - \{a\}$ 中的回路 γ，

$\int dz/(z-a)$ 具有形式 $2n\pi i$，其中 n 是正或负整数.

通过平移，我们可以假设 $a=0$. 设 γ 定义在 $I=[b,c]$ 上，那么函数 $\varphi(t,\xi)=\xi\dfrac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|}+(1-\xi)\gamma(t)$ 在 $I\times[0,1]$ 上是连续的，并且是回路 γ 到回路 $\gamma_1(t)=\dfrac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|}$ 的一个闭路同伦(在 $\boldsymbol{C}^*=\boldsymbol{C}-\{0\}$ 中)，而且 $\gamma_1(I)\subset U$. 因为 $1/z$ 在 $\boldsymbol{C}^*$ 中是解析的，所以 Cauchy 定理(9.6.3)指出 $\int_\gamma dz/z=\int_{\gamma_1}dz/z$. 但据(9.8.1)，$\gamma_1(t)=e^{i\psi(t)}$，其中 ψ 是一正则函数的原函数，故由定义 $\int_{\gamma_1}dz/z=i\int_b^c\psi'(t)dt=i(\psi(c)-\psi(b))$. 按假设 $\gamma_1(b)=\gamma_1(c)$，因而结论由(9.5.5)推出.

附注. (9.8.2) 的不利用 (9.8.1) 的一个更简单的证明可以给出如下 (Ahlfors)：设 $h(t)=\int_b^t\dfrac{\gamma'(s)ds}{\gamma(s)-a}$；它有导数等于 $h'(t)=\dfrac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-a}$，除在 I 的一个至多可数子集的点上例外. 故若 $g(t)=e^{-h(t)}(\gamma(t)-a)$，则我们有 $g'(t)=0$，除去 I 的一个至多可数子集. 因而(据(8.6.1)) g 是常数，于是 $e^{h(t)}=\dfrac{\gamma(t)-a}{\gamma(t)-a}$. 但由于 $\gamma(c)=\gamma(b)$，因而 $e^{h(c)}=1$，据 (9.5.5)，这蕴含 $h(c)=2n\pi i$ 对某个整数 n 成立.

我们称数 n 是 a **关于 γ 的指数**(或者 **γ 关于 a 的指数**)，并记为 $n=j(a;\gamma)$. 由 Cauchy 定理推知：如果 γ_1, γ_2 是 $\boldsymbol{C}-\{a\}$ 中的二个同伦回路，则它们对于 a 有相同的指数.

(9.8.3) 指数 $j(x,\gamma)$ 在紧集 $\gamma(I)$ 的余集 A 的每个连通分支上都是常数.

事实上，我们注意：$x\to j(x;\gamma)$ 在开集 A 中是连续的，因为按定义，$x+h$ 关于 γ 的指数(若 $x+h\notin\gamma(I)$)等于 x 关于回路

$\gamma_1: t \to \gamma(t) - h$ 的指数. 但是，如果 B 是一个以 x 为中心 r 为半径的含于 A 中的球，那么，只要 $|h| < \gamma$，则 $\varphi(t,\xi) = \gamma(t) - \xi h$（在 $I \times [0, 1]$ 定义）就是 $\mathbf{C} - \{x\}$ 中 γ 到 γ_1 的闭路同伦，因此，据 Cauchy 定理，$j(x + h; \gamma) = j(x; \gamma)$. 因为整数集 $\mathbf{z}$ 是一个离散空间，故结论由(3.19.7)推得.

(9.8.4) **例**. 设 ε_n 是在 $I = [0, 2\pi]$ 上定义的回路 $t \to e^{nit}$，其中 n 是正或负整数. 我们有 $\varepsilon_n(I) = U$. ε_n 称为"**取 n 次的单位圆**". 注意：开集 $\mathbf{C} - U$ 有两个连通分支，即球 B：$|z| < 1$ 与由 $|z| > 1$ 定义的 B 的外部 E. 事实上，B 是连通的，因为它是一个星形域(9.7.1)；又由(4.4)与(9.5.7)，E 是 $]1, +\infty[\times [0, 2\pi]$ 在连续映射 $(x, t) \to xe^{it}$ 下的象，于是由 (3.19.1), (3.20.16) 与 (3.19.7) 得到结果(类似的论证也可证明 B 与 $B - \{0\}$ 的连通性)；最后，在 $\mathbf{C} - U$ 中，B 与 E 是既开又闭的，因为 B 在 $\mathbf{C}$ 中是开的，且 $B = (\mathbf{C} - U) \cap \bar{B}$，故我们有 $\bar{B} \cap E = \phi$. 由定义与(9.5.3)推得 $j(0, \varepsilon_n) = n$，于是对 B 中任一点 z，$j(z; \varepsilon_n) = n$. 让我们来证明对于 E 中任一点，有 $j(z; \varepsilon_n) = 0$. 更一般地：

(9.8.5) 如果回路 γ 含于闭球 D：$|z - a| \leqslant \gamma$ 中，则对于 D 的任一个外点 z，有 $j(z; \gamma) = 0$.

事实上，假设 γ 在区间 $I = [b, c]$ 上定义，且在这个区间上 $|\gamma'(t)| \leqslant M$. 由定义，对 $|z - a| > r$ 有 $2\pi i j(z; \gamma) = \int_\gamma \frac{dx}{x - z} = \int_b^c \frac{\gamma'(t)\,dt}{\gamma(t) - z}$. 但因 $|\gamma(t) - a| \leqslant \gamma$，故对任意 $t \in I$ 有 $|\gamma(t) - z| \geqslant |z - a| - r$. 因此，据中值定理，$2\pi |j(z; \gamma)| \leqslant \frac{M(c - b)}{|z - a| - r}$；当 $|z - a|$ 充分大时，右边 $< 2\pi$，又因 $j(z; \gamma)$ 是一个整数，这就蕴含 $j(z, \gamma) = 0$. 但如上已知 D 的外部是连通的，于是结论由(9.8.3)得出.

(9.8.6) 对定义在 I 上的 $\mathbf{C}$ 中任意回路 γ，使 $j(x; \gamma) \neq 0$ 的点 $x \in \mathbf{C} - \gamma(I)$ 的集在 $\mathbf{C}$ 中是相对紧的.

因为据(9.8.5)该集含于任一个包含 $\gamma(I)$ 的闭球中.

(9.8.7) 设 $A\subset \mathbf{C}$ 是一单连通域，γ 是 A 中的一条回路，则对 $\mathbf{C}-A$ 中的任一点 x，$j(x;\gamma)=0$.

据假设，存在定义于 $I\times J$ 上的 A 中的 φ，它是 γ 到退缩为单点的回路上的同伦. 因为 $x\notin\varphi(I\times J)$ 故 Cauchy 定理给出

$$\int_\gamma dz/(z-x)=0.$$

9. Cauchy 公式

(9.9.1) 设 $A\subset \mathbf{C}$ 是单连通域(9.7)，f 是 A 到复 Banach 空间 E 上的解析映射. 那么，对定义在 I 上的 A 中任意一条回路 γ 与任意 $x\in A-\gamma(I)$，我们有 (Cauchy 公式)

$$j(x;\gamma)f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)dz}{z-x}.$$

考虑在 A 中定义的函数 $g(z)$：当 $z\neq x$ 时，它等于 $(f(z)-f(x))/(z-x)$，在点 x 它等于 $f'(x)$. g 在 A 中是解析的，因为由(9.3.2)与(9.5.1)在 $A-\{x\}$ 中它显然解析；另一方面，存在以 x 为中心的球 $B\subset A$ 使得对于 $z\in B$，有 $f(z)=f(x)+(z-x)\cdot f'(x)+\cdots+(z-x)^n f^{(n)}(x)/n!+\cdots$，这个级数在 B 中是收敛的. 这表明：对任意 $z\in B$，$g(z)$ 等于下述收敛级数的和：

$$f'(x)+\frac{1}{2}(z-x)f''(x)+\cdots$$
$$+(z-x)^{n-1}f^{(n)}(x)/n!+\cdots,$$

于是它在点 x 是解析的.由 Cauchy 定理(9.6.3)，我们有 $\int_\gamma g(z)dz=0$. 令 $g(z)=\dfrac{f(z)}{z-x}-f(x)\cdot\dfrac{1}{z-x}$. 据指数的定义，便得出(9.9.1).

反之：

(9.9.2) 设 γ 是定义在区间 $I=[b,c]$ 上的 $\mathbf{C}$ 中的路径，而 g 是

$\gamma(I)$ 到复 Banach 空间 E 中的连续映射. 那么 $f(z)=\int_\gamma \frac{g(x)dx}{x-z}$ 在$\gamma(I)$的余集上有定义并且解析. 更确切地说,对任意点$a\in \mathbf{C}-\gamma(I)$,如果设 $c_k=\int_\gamma \frac{g(x)dx}{(x-a)^{k+1}}$,则幂级数 $(c_n(z-a)^n)$ 在以 a 为中心的含于 $\mathbf{C}-\gamma(z)$ 的任意开球B中是收敛的,并且在B中它的和等于 $f(z)$.

事实上,假设 $|z-a|\leqslant q\cdot d(a, \gamma(I))$, 其中 $0<q<1$. 则对任意 $x\in\gamma(I)$, 我们有 $\frac{1}{x-z}=\frac{1}{(x-a)\left(1-\frac{z-a}{x-a}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(x-a)^{n+1}}$, 其中$\left|\frac{(z-a)^n}{(x-a)^{n+1}}\right|\leqslant\frac{1}{\delta}q^n$,若 $\delta=d(a,\gamma(I))$. 如果在 $\gamma(I)$ 中有 $\|g(x)\|\leqslant M$, 在 I 中有 $|\gamma'(t)|\leqslant m$, 则对任意 $t\in I$, 有 $\left\|\frac{\gamma'(t)g(\gamma(t))(z-a)^n}{(\gamma(t)-a)^{n+1}}\right\|\leqslant\frac{Mm}{\delta}q^n$, 于是一般项为 $\frac{\gamma'(t)g(\gamma(t))(z-a)^n}{(\gamma(t)-a)^{n+1}}$ 的级数在 I 上是依范数收敛的. 由 (8.7.9) 推知,级数 $(c_n(z-a)^n)$ 在球 $|z-a|\leqslant q\cdot\delta$ 中收敛, 并且在这个球中有和 $f(z)$.

(9.9.3) 在(9.9.1)的假设下, 对每个 $x\in A-\gamma(I)$ 与每一整数 $k>0$,我们有

$$j(x;\gamma)f^{(k)}(x)=\frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(z)dz}{(z-x)^{k+1}}.$$

这直接由Cauchy公式、具有给定和的幂级数系数的唯一性(9.1.6)、这些系数与导数之间的关系(9.3.5)以及最后由(9.9.2)推出.

(9.9.4) 设 $A\subset\mathbf{C}^p$ 是一开集, f 是A到复 Banach 空间E的这样的连续映射: 对 $1\leqslant k\leqslant p$ 与任一点 $(a_j)\in\mathbf{C}^p$, 映射 $z_k\to f(a_1,\cdots,a_{k-1},z_k,a_{k+1},\cdots,a_p)$ 在开集 $A(a_1,\cdots,a_{k-1},a_{k+1},\cdots,a_p)\subset\mathbf{C}$ 中是解析的,如果该集非空((13.20.12)中的记号).那

么 f 在 A 中是解析的. 更确切地说,设 $a=(a_k)$ 是 A 中的点,P 是含于 A 中的以 a 为中心 $r_k(1\leqslant k\leqslant p)$ 为半径的闭多圆柱,对每个 k,设 γ_k 是 $\mathbf{C}$ 中的回路 $t\to a_k+r_k e^{it}(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$,并设

$$c_{n_1n_2\cdots n_p}=\frac{1}{(2\pi i)^p}\int_{\gamma_1}dx_1\int_{\gamma_2}dx_2\cdots$$

$$\int_{\gamma_p}\frac{f(x_1,\cdots,x_p)dx_p}{(x_1-a_1)^{n_1+1}\cdots(x_p-a_p)^{n_p+1}}.$$

则幂级数 $(c_\nu(z-a^\nu))$ 在 $\mathring{P}$ 中是绝对可和的;而且它的和等于 $f(z)$.

利用 Cauchy 公式与 $j(0;\varepsilon_1)=1$ (见(9.8.4)),由假设并对 $p-k$ 使用归纳法,对 $|x_j-a_j|=r_j(1\leqslant j\leqslant k)$ 与 $|z_j-a_j|<r_j(k+1\leqslant j\leqslant p)$ 我们得出

(9.9.4.1)
$$f(x_1,\cdots,x_k,z_{k+1},\cdots,z_p)$$
$$=\frac{1}{(2\pi i)^{p-k}}\int_{\gamma_{k+1}}dx_{k+1}\int_{\gamma_{k+2}}dx_{k+2}\cdots$$
$$\int_{\gamma_p}\frac{f(x_1,\cdots,x_p)dx_p}{(x_{k+1}-z_{k+1})\cdots(x_p-z_p)}.$$

另一方面,当 $|z_k-a_k|<r_k(1\leqslant k\leqslant p)$ 时,可对 $|x_k-a_k|=r_k(1\leqslant k\leqslant p)$ 写出

$$\frac{1}{(x_1-z_1)\cdots(x_p-z_p)}=\sum\frac{(z_1-a_1)^{n_1}\cdots(z_p-a_p)^{n_p}}{(x_1-a_1)^{n_1+1}\cdots(x_p-a_p)^{n_p+1}},$$

据 (5.5.3),右边的幂级数在集 F 上是依范数可和的. F 是由 $|x_k-a_k|=r_k(1\leqslant k\leqslant p)$ 定义的集. 对 $p-k$ 利用归纳法.如果设

$$g_{n_{k+1}\cdots n_p}(x_1,\cdots,x_k)=\frac{1}{(2\pi i)^{p-k}}\int_{\gamma_{k+1}}dx_{k+1}\cdots$$

$$\int_{\gamma_p}\frac{f(x_1,\cdots,x_p)dx_p}{(x_{k+1}-a_{k+1})^{n_{k+1}+1}\cdots(x_p-a_p)^{n_p+1}},$$

那么,由中值定理,我们有

(9.9.4.2) $\|g_{n_{k+1}\cdots n_p}(x_1, \cdots, x_k)\| \leqslant \dfrac{M}{r_{k+1}^{n_{k+1}} \cdots r_p^{n_p}}$,

假如在 F 上，$\|f(x_1, \cdots, x_p)\| \leqslant M$. 因此推出：关于 $z_j - a_j$ 的幂级数 $(g_{n_{k+1}\cdots n_p}(x_1, \cdots, x_k)(z_{k+1} - a_{k+1})^{n_{k+1}} \cdots (z_p - a_p)^{n_p})$ 在 $\mathring{P}$ 中是绝对可和的；利用对 $p-k$ 的归纳法，并应用(5.3.5)与(8.7.9)，我们推知该级数的和就是 $f(x_1, \cdots, x_k, z_{k+1}, \cdots, z_p)$. 结论便由取 $k=0$ 推得. 另外，使用(9.9.4)中同样的假设与记号，由在(9.9.4.2)中取 $k=0$，就证得

(9.9.5) (Cauchy 不等式) $\|c_{n_1 n_2 \cdots n_p}\| \leqslant M / r_1^{n_1} \cdots r_p^{n_p}$,
如果在诸圆 $|x_k - a_k| = r_k (1 \leqslant k \leqslant p)$ 的积上，$\|f(x)\| \leqslant M$.

如果我们在(9.9.4)中取 $A = \boldsymbol{C}^p$，则可看到：

(9.9.6) $\boldsymbol{C}^p$ 到复 Banach 空间中的任一解析映射都是一个整函数.

注意，上面这个结果对实变量解析函数是不成立的 ($1/(1+x^2)$ 就是一个反例). 同样，两个实变量的连续函数 $f(x, y)$ 可以对每一个变量是解析的，但并不是在 $\boldsymbol{R}^2$ 中解析的. 这种例子由 $f(x, y) = xy^2/(x^2+y^2)$ 当 $(x, y) \neq (0,0)$ 及 $f(0,0) = 0$ 给出.

附注. 由(9.9.4)推知：集 F，即圆 $|x_k - a_k| = r_k (1 \leqslant k \leqslant p)$ 的积是 A 中的唯一性集(当 A 连通时). 因为幂级数 $(c_\nu (z-a)^\nu)$ 完全由 f 在 F 中的值确定，于是如果 A 中的两个解析函数在 F 中重合，则它们就在 P 中重合，从而结果由(9.4.2)推得.

问　　题

1) 设 A 是 $\boldsymbol{C}$ 中的一个相对紧的开连通集. 设 φ 是 $[a, b] \times [0, 1]$ 到 $\bar{A}$ 中的这样一个连续映射：对 $0 < \xi \leqslant 1$, $t \to \varphi(t, \xi) = \gamma_\xi(t)$ 是含于 A 中的回路，而 $t \to \gamma_0(t) = \varphi(t, 0)$ 是含于 $\bar{A}$ 中的回路(它可以包含 A 的边界点). 而且假设：对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得关系 $|\lambda - \mu| \leqslant \delta$ 蕴含 $|\gamma'_\lambda(t) - \gamma'_\mu(t)| \leqslant \varepsilon$，其中 $t \in [a, b] - D$；而 D 是一可数子集.

现在设 f 是 $\bar{A}$ 到 Banach 空间 E 中的这样的连续映射：它到 A 上的限制是解析的. 试证 Cauchy 定理 $\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz$ 仍然成立 (利用

(8.7.8)).

2) 设A是$\mathbf{C}$的一开子集，f是A到复 Banach 空间E的一连续映射：而且使f在$A\cap D_+$和$A\cap D_-$中都是解析的，其中D_+(相应地，D_-)是由$\mathscr{I}(z)>0$(相应地，$\mathscr{I}(z)<0$)定义的. 试证：f在A中是解析的.（假设圆盘$|z|\leqslant r$含于A中. 设γ_+(相应地，γ_-)是在$[-1,+1]$中由下式定义的回路：对$-1\leqslant t\leqslant 0$，$\gamma_+(t)=(2t+1)r$；对$0\leqslant t\leqslant 1$，$\gamma_+(t)=re^{\pi i t}$(相应地，对$-1\leqslant t\leqslant 0$，$\gamma_-(t)=re^{\pi i t}$；对$0\leqslant t\leqslant 1$，$\gamma_-(t)=(1-2t)r$). 利用问题1证明：如果$|z|<r$及$\mathscr{I}(z)>0$，则

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_+}\frac{f(x)dx}{x-z},\quad 0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_-}\frac{f(x)dx}{x-z}.$$

于是，如果γ是$[-1,+1]$上的回路$t\to re^{\pi i t}$，则

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(x)dx}{x-z}.$$

然后利用(9.9.2)。)

3) 试证，当只假设f在每个含于A的有界多圆柱中有界，而不必连续时，(9.9.4)的结论仍然成立.（利用8.9节问题6，实际上，Hartogs 的一个较深定理证明了甚至这个减弱的假设也不是必要的；换句话说，一个函数，只要对于它的p个复变量z_i的每一个都分别是解析的，它就在A中是解析的.）

4) 设$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$是圆$|z|<R$中的一复值解析函数. 试证：对$0\leqslant r<R$，

$$M_2^2(r;f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{it})|^2dt=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2r^{2n}.$$

由此结果推出 Cauchy 不等式的另一个证明.

5) 设$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$是$|z|<R$中的一解析函数，并设

$$M_1(r;f)=\sum_{n=0}^{\infty}\|a_n\|r^n.$$

又设$M(r;f)=\sup\limits_{|z|=r}\|f(z)\|$.

a) 试证：对$0\leqslant r<r+\delta<R$，

$$M(r;f)\leqslant M_1(r;f)\leqslant \frac{r+\delta}{\delta}M(r+\delta;f).$$

(利用 Cauchy 不等式).

b) 如果再加上 f 是复值的,试证(使用问题 4 中的记号):

$$\frac{\sqrt{\delta(2r+\delta)}}{r+\delta}M_1(r;f)\leqslant M_2(r+\delta;f)\leqslant M(r+\delta;f).$$

(利用 Cauchy-Schwarz 不等式(6.2.1).)

c) 在上述假设下,试证:

$$\lim_{n\to\infty}(M_1(r;f^n))^{1/n}=\lim_{n\to\infty}(M_2(r;f^n))^{1/n}=M(r;f).$$

(利用 a) 和 b) 中已证明的不等式与 $M(r;f^n)=(M(r;f))^n$ 这一事实以及 $r\to M(r;f)$ 的连续性.)

6) 假设一个复变量的复系数幂级数 (c_nz^n) 对 $|z|<R$ 收敛;并设 $f(z)=\sum\limits_n c_nz^n$. 对于任意满足 $0<r<R$ 的 r,设 $A(r)=\sup\limits_{|z|=r}\mathscr{R}(f(z))$. 试证:对每个 $n>0$,都有 $|c_n|r^n+2\mathscr{R}(f(0))\leqslant 2A(r)$. (证明:对于 $n>0$ 有 $|c_n|r^n=\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi}(\mathscr{R}(f(re^{i\theta})))e^{-ni\theta}d\theta\right|$.)

7) a) 设 A 是 K^p 的一开子集,f 是 A 到 Banach 空间 E 的无限次可微映射. 要 f 在 A 中解析,其充要条件是:对 A 的每个紧子集 L,存在数 $r\geqslant 0$ 与数 $a>0$ 使得对任意附标 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_p)$,都有 $\sup\limits_{x\in L}\|D^\alpha f(x)\|\leqslant a(|\boldsymbol{\alpha}|+r)!$ (要证明条件是必要的,当 $K=\boldsymbol{C}$ 时,可把 Cauchy 不等式应用到球心在 L 中、半径固定且含于 A 中的球上,当 $K=\boldsymbol{R}$ 时,可利用(9.4.5). 要证明条件是充分的,可利用 Taylor 公式(8.14.3),并证明:这个公式的末项在任一个以 x 为中心且含于 A 的闭球中一致趋于 0.)

b) 举出一个 $\boldsymbol{R}$ 中函数的例,它是无限次可微的,但不是解析的(参看 8.12 节,问题 2).

c) 假设 f 在开区间 $I\subset\boldsymbol{R}$ 上是实值的与无限次可微的;再假设存在整数 $p\geqslant 0$ 使得对任意 $n>0$,$f^{(n)}$ 最多在 I 的 p 个点不为 0. 试证:f 在 I 中是解析的. (利用 a) 与 8.12 节问题 3b).)

10. 复变数解析函数的表征

(9.10.1) $\boldsymbol{C}^p$ 的一开子集 A 到一复 Banach 空间的连续可微映射 f 是解析的.

应用(9.9.4)，可以立即化为 $p=1$ 的情形. 要证明 f 在点 $a\in A$ 是解析的，借助平移与位似映射，可以假设 $a=0$ 并且 A 包含单位球 B: $|z|\leqslant 1$. 对于任意 $z\in \mathring{B}$ 与任意 λ: $0\leqslant\lambda\leqslant 1$，注意 $|(1-\lambda)z+\lambda e^{it}|\leqslant 1-\lambda+\lambda=1$，考虑积分.

(9.10.1.1) $$g(\lambda)=\int_0^{2\pi}\frac{f(z+\lambda(e^{it}-z))-f(z)}{e^{it}-z}e^{it}dt.$$

据(8.11.1)与 Leibniz 法则(8.11.2)，g 在 $[0,1]$ 中连续，并且在 $]0,1[$ 的每一点有导数，等于

$$g'(\lambda)=\int_0^{2\pi}f'(z+\lambda(e^{it}-z))e^{it}dt$$

(参见(8.4.1)后的附注). 但 $\lambda i f'(z+\lambda(e^{it}-z))e^{it}$ 是 $t\to f(z+\lambda(e^{it}-z))$ 的导数，于是，对 $\lambda\neq 0$，有 $g'(\lambda)=0$，因此(据(8.6.1)后的附注)，g 在 $[0,1]$ 中是常值的. 但因 $g(0)=0$，故对 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$，$g(\lambda)=0$. 特别，当 $\lambda=1$ 时我们推得对任意 $z\in\mathring{B}$ 有 $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\varepsilon_1}\frac{f(x)dx}{x-z}$ (据(9.8.4))，于是结论由(9.9.2)推得.

(9.10.2) 设 f 是开集 $A\subset\boldsymbol{R}^{2p}$ 到复 Banach 空间的连续可微映射. g 是在 A (把它看作 $\boldsymbol{C}^p$ 的子集)中由 $f(x_1,\cdots,x_p,y_1,\cdots,y_p)=g(x+iy_1,\cdots,x_p+iy_p)$ 定义的函数. 为使 g 在 A 中解析，其充要条件是：在 A 中，对 $1\leqslant k\leqslant p$ 有 $\frac{\partial f}{\partial x_k}+i\frac{\partial f}{\partial y_k}=0$ (Cauchy 条件).

据(8.9.1)，立即又化为 $p=1$ 的情形. 设 (x,y) 是 A 中一点，并令 $a=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$，$b=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$；由于极限 $\lim_{h\to 0}(g(x+iy+h)-g(x+iy))/h$ 与 $\lim_{h\to 0}(g(x+iy+ih)-g(x+iy))/ih$

(h 是实数且$\neq 0$)是相同的，我们便得出 $a+ib=0$. 反之，如果条件满足，则据(8.9.11)，对任意 $\varepsilon>0$，都存在 $r>0$ 使得只要 $\sqrt{h^2+k^2}\leqslant r$ 就有

$$\|g(x+iy+h+ik)-g(x+iy)-a(h+ik)\|\leqslant\varepsilon\sqrt{h^2+k^2},$$

这表明 $z\to g(z)$ 在点 $z=x+iy$ 有导数且等于 a. 于是结果由(9.10.1)推出.

问　　题

1) 设 A 是 $\mathbf{C}$ 的单连通开子集. 如果 f 是 A 到复 Banach 空间 E 的且对 A 中任意回路 γ，都有 $\int_\gamma f(z)dz=0$ 的连续映射，试证：f 在 A 中是解析的.（"Morera 定理"；证明 f 在 A 中有原函数.）

2) 试证：$\mathbf{C}^p$ 的开子集 A 到复 Banach 空间 E 的可微映射 f 在 A 中解析（"Goursat定理"；并不假设 f' 连续）.（化为 $p=1$ 的情形，并证明在 A 中，f 有一原函数，考虑沿回路 γ 的积分 $\alpha(R)=\int_\gamma f(z)dz$，其象是含于 A 中的矩形 R 的周界，我们将相继地证明：1)如果 R 含于中心为 $a\in A$ 的圆盘 D 中，在 D 中有关系式 $|f(z)-f(a)-f'(a)(z-a)|\leqslant\varepsilon|z-a|$ 且 a 在 R 的内部，则我们有 $|\alpha(R)|\leqslant\varepsilon\delta(R)p(R)$，其中 $\delta(R)$ 是 R 的对角线，$p(R)$ 是 R 的周长；2) 存在含于 R 中的矩形的递减序列 (R_n) 使得 R_n 与 R 按比例 2^{-n} 位似，并且 $|\alpha(R_n)|\geqslant 4^{-n}|\alpha(R)|$. 因而推出 $\alpha(R)=0$.）

3) 设 A 是 $\mathbf{C}^p$ 的开子集，γ 是一条在 $I=[a,b]$ 上定义的路径，f 是 $\gamma(I)\times A$ 到复 Banach 空间 E 的一连续映射. 假设对每个 $x\in\gamma(I)$，函数 $(z_1,\cdots,z_p)\to f(x,z_1,\cdots,z_p)$ 在 A 中解析，而且每个函数 $\frac{\partial f}{\partial z_k}(x,z_1,\cdots,z_p)$ 在 $\gamma(I)\times A$ 中都是连续的 $(1\leqslant k\leqslant p)$. 试证：在这些条件下，函数 $g(z_1,\cdots,z_p)=\int_\gamma f(x,z_1,\cdots,z_p)dx$ 在 A 中是解析的.（利用(9.10.2). 因为 $\gamma'(t)$ 只是一个正则函数，它可以是不连续的. 所以 Leibniz 法则(8.11.2)是不能直接应用的，但是(8.11.2)的证明稍加修改就仍适用.）

4) 设 A 是 $\mathbf{R}^p$ $(p\geqslant 2)$ 的一开连通子集，f 是 A 到复 Banach 空间 E 的一解析映射. 假设存在以 $b=(b_k),1\leqslant k\leqslant p$，为中心 r_k $(1\leqslant k\leqslant p)$ 为半径的开多圆柱 $P\subset A$，使得对 P 的每一点 (c_k)，存在一个数 $\rho<\inf(r_1,r_2)$，使

函数 $x_1 + ix_2 \to f(x_1, x_2, c_3, \cdots, c_p)$ 在 $\mathbf{C}$（恒同于 $\mathbf{R}^2$）的开子集 $|x_1 + ix_2 - (c_1 + ic_2)| < \rho$ 中是解析的. 证明这种性质对于每一点 $(c_k) \in A$ 成立（利用 (9.10.2) 与 (9.4.2)）.

5）设 S 是 $\mathbf{R}^p (p \geqslant 3)$ 中的"球壳"，由

$$(R - \varepsilon)^2 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_p^2 < (R + \varepsilon)^2 \quad (0 < \varepsilon < R)$$

定义. 假设 f 是 S 到复 Banach 空间 E 的解析映射，并设对任意 $u = (x_3, \cdots, x_p)$，映射 $x_1 + ix_2 \to f(x_1, x_2, u)$ 在 $S(u)$（如果 $S(u)$ 不空）的每一点的邻域（在 $\mathbf{C}$ 中）中是解析的.

a）对任意满足 $\|u\|^2 = x_3^2 + \cdots + x_p^2 < R^2$ 的 $u = (x_3, \cdots, x_p)$，设 $r(u)$ 是 $\mathbf{C}$ 中的由 $t \to (R^2 - \|u\|^2)^{1/2} e^{it}$，$-\pi \leqslant t \leqslant \pi$，定义的路径. 设

$$g(z, u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{r(u)} \frac{f(y, u)dy}{y - z},$$

其中 $y = x_1 + ix_2$ 而 $f(y, u) = f(x_1, x_2, u)$；则 g 对 $|z|^2 + \|u\|^2 < R^2$ 有定义，并且当 $|z| < (R^2 - \|u\|^2)^{1/2}$ 时 $z \to g(z, u)$ 是解析的. 另一方面，对任意满足 $\|v\| < R$ 的 $v = (x_3', \cdots, x_p')$，设

$$h_v(z, u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{r(v)} \frac{f(y, u)dy}{y - z}.$$

试证：对于 $\|v\| < \|u\| < \|v\| + \varepsilon$ 与 $|z| < (R^2 - \|v\|^2)^{1/2}$ 有 $h_v(z, u) = g(z, u)$（应用 Cauchy 定理(9.6.3)）. 另一方面，证明对 $R - \varepsilon < \|u\| < R$ 与 $|z| < (R^2 - \|u\|^2)^{1/2}$ 有 $g(z,u) = f(z, u)$. 由此推出结论：f 能开拓成整个球 B: $x_1^2 + \cdots + x_p^2 < (R + \varepsilon)^2$ 中解析的函数 $\bar{f}$（应用 (9.4.2) 与问题 3）. 这个定理对 $p = 2$ 仍成立吗?

b）当 $E = \mathbf{C}$ 时，试证 $\bar{f}(B) \subset f(S)$.（把 a）中的结果应用到函数 $1/(f - c)$，其中 $c \notin f(S)$.）特别地，如果 f 在 S 中是有界的，则 $\bar{f}$ 在 B 中是有界的，把上面这个性质推广到 E 是复 Hilbert 空间的情形（利用 8.5 节问题 6 的方法）.

11. Liouville 定理

(9.11.1)（Liouville 定理） 设 f 是 $\mathbf{C}^p$ 中的整函数，在复 Banach 空间 E 中取值. 假设存在一整数 N 与数 $a > 0$，使得在 $\mathbf{C}^p$ 中有

$$\|f(z)\| \leqslant a(1 + \sup_j |z_j|)^N.$$

那么，$f(z)$ 是一"系数在 E 中、总次数 $\leqslant N$ 的多项式"，即"单项式" $c_{n_1\cdots n_p}z_1^{n_1}\cdots z_p^{n_p}$ 的有限和，其中 $c_{n_1\cdots n_p}\in E$ 并且 $n_1+n_2+\cdots+n_p\leqslant N$.

设在 $\mathbf{C}^p$ 中 $f(z)=\sum_\nu c_\nu z^\nu$，这幂级数是处处绝对可和的.

把 Cauchy 不等式(9.9.5)应用到以 0 为中心、半径都等于 r 的多圆柱上，便推出：对任意 $\nu=(n_1,\cdots,n_p)$ 有 $\|C_{n_1\cdots n_p}\|\leqslant a\cdot(r+1)^N r^{-(n_1+\cdots+n_p)}$. 由于 r_k 是任意的，这就证明了：除非 $n_1+n_2+\cdots+n_p\leqslant N$，否则 $C_{n_1\cdots n_p}=0$.

(9.11.2) (代数基本定理) 任意复系数多项式 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n(a_0\neq 0, n\geqslant 1)$ 在 $\mathbf{C}$ 中至少有一个根.

若不然，则 $1/f$ 在 $\mathbf{C}$ 中是解析的(9.3.2)，因而它是一个整函数(9.9.6). 设 r 是一实数，满足当 $1\leqslant k\leqslant n$ 时有 $r^k\geqslant(n+1)|a_k/a_0|$；那么，对 $|z|\geqslant r$ 有

$$|f(z)|=|a_0z^n|\cdot\left|1+\frac{a_1}{a_0z}+\cdots+\frac{a_n}{a_0z^n}\right|$$

$$\geqslant|a_0z^n|\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\geqslant|a_0|r^n/(n+1).$$

换句话说，$1/f$ 对于 $|z|\geqslant r$ 是有界的. 另一方面，因 $1/f$ 在紧集 $|z|\leqslant r$ 中是连续的，所以它在该集中也是有界的(3.17.10)，因而 $1/f$ 在 $\mathbf{C}$ 中是有界的. 那么，由 Liouville 定理推出 $1/f$ 是一个常数，故 f 也是个常数，这与假设矛盾，因为对于 $|z|\geqslant r$ 有

$$|f(z)|\geqslant|a_0|\cdot|z|^n/(n+1).$$

问　　题

1) 若 $p\geqslant 2$. 试证：在 $\mathbf{C}^p$ 的一紧子集的余集中解析的函数是整函数；因此若再加上它在 $\mathbf{C}^p$ 的一紧子集的余集中有界，则它是一个常数(利用(9.11.1)以及 9.10 节问题 4 与 5). 这个结果对 $p=1$ 真确吗?

2) 设 f 是 $\mathbf{C}^p$ 中的复值整函数. 试证：(9.11.1)的结论当假设对任意 $z\in\mathbf{C}^p$ 都有

$$\mathscr{R}(f(z))\leqslant a(1+\sup_j|z_j|)^N$$

时，仍然成立(利用 9.9 节问题 6)。

3) 设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 是一非常数复变数的整函数. 对任意 $r>0$ 设 $\mu(r)=\sup_n\|a_n\|r^n$, $M(r)=\sup_{|z|=r}\|f(z)\|$, 则有 $\mu(r)\leqslant M(r)$; 据 Liouville 定理, $\lim_{r\to\infty}\mu(r)=+\infty$. 假设存在两个常数 $a>0$ 与 $\alpha>0$ 使 $\mu(r)\leqslant a\cdot\exp(r^\alpha)$; 试证: 存在正的常数 b, c 使 $M(r)\leqslant br^\alpha\mu(r)+c$ (注意 $\|a_n\|\leqslant a(e\alpha/n)^{n/\alpha}$).

12. 解析函数的收敛序列

(9.12.1) 设 (f_n) 是开集 $A\subset\boldsymbol{C}^p$ 到复 Banach 空间 E 的解析映射序列. 假设对每个 $z\in A$, 序列 $(f_n(z))$ 都趋向一极限 $g(z)$, 并且收敛在 A 的每个紧子集中是一致的. 那么 g 在 A 中是解析的, 并且对每个 $\nu=(n_1,\cdots,n_p)\in\boldsymbol{N}^p$ 与每个 $z\in A$, 序列 $(D^\nu f_n(z))$ 收敛到 $D^\nu g(z)$, 而且收敛在 A 的每个紧子集中是一致的.

因为 g 在 A 中连续(7.2.1),要证 g 在 A 中是解析的,据(9.9.4), 只须证明每个映射 $z_k\to g(a_1,\cdots,z_k,\cdots,a_p)$ 在 $A(a_1,\cdots,a_{k-1},a_{k+1},\cdots,a_p)$ 中是解析的. 换句话说, 问题化为 $p=1$ 的情形. 对每个 $a\in A\subset\boldsymbol{C}$, 设 B 是以 a 为中心 r 为半径的含于 A 中的闭球,并设 γ 是回路 $t\to a+re^{it}(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.那么据 Cauchy 公式 (9.9.1), 对每个 $z\in\mathring{B}$ 与每个 n,都有 $f_n(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma\frac{f_n(x)}{x-z}dx$.

但据假设,对 $|x-a|=r$, 序列 $(f_n(x))$ 一致收敛到 $g(x)$, 又因 $|z-x|\geqslant r-|z|$, 故对 $|x-a|=r$, 序列 $(f_n(x)/(x-z))$, (z 固定)也一致收敛到 $g(x)/(x-z)$. 于是,由(8.7.8), $g(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma\frac{g(x)dx}{x-z}$. 据(9.9.2), 这表明 g 在 $\mathring{B}$ 中是解析的. 此外, 因为由(9.9.3), $f_n'(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma\frac{f_n(x)dx}{(x-z)^2}$, 故用与上相同的论证(把(9.9.3)应用到 g 上) 可得对每个 $z\in\mathring{B}$, $f_n'(z)$ 都趋于 $g'(z)$. 此

外，据中值定理有

$$(9.12.1.1)\quad \|g'(a)-f'_n(a)\| \leqslant \frac{1}{r}\sup_{|x-a|=r}\|g(x)-f_n(x)\|.$$

现在回到一般情形（p 任意），让我们证明在任意紧集 $M\subset A$ 中序列 $(D_k f_n(x))$ 一致收敛到 $D_k g(x)$。存在数 $r>0$ 与M的含于A中的紧邻域 V，并且它包含 A 中所有到M的距离 $\leqslant r$ 的点(3.18.2)。对任给的 $\varepsilon>0$，设 n_0 使 $\|g(x)-f_n(x)\|\leqslant\varepsilon$ 对每个 $n\geqslant n_0$ 与每个 $x\in V$ 都成立．那么把(9.12.1.1)应用到函数序列 $z_k\to f_n(a_1,\cdots,a_{k-1},z_k,a_{k+1},\cdots,a_p)$ 便得到，对每个点 $x\in M$，只要 $n\geqslant n_0$ 就有$\|D_k g(x)-D_k f_n(x)\|\leqslant\varepsilon/r$。这就完成了当$n_1+\cdots+n_p=1$时定理的证明．一般情形则可对 $n_1+\cdots+n_p$ 使用归纳法来证明.

这里还要注意：上述定理对实变量解析函数不再成立，因为据 Weierstrass 逼近定理(7.4.1)，多项式序列可以紧集中的任意(例如不可微的)连续函数作为极限.

问　　题

1) a) 设 $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ 是一有限复数序列，满足 $\sum_{k=1}^{p}|a_k|=\alpha<1$. 试证

$$\left|\prod_{k=1}^{p}(1+a_k)-1-\sum_{k=1}^{p}a_k\right|\leqslant\frac{\alpha^2}{1-\alpha}.$$

b) 整函数

$$E(z,0)=1-z,\ E(z,p)=(1-z)\exp\left(z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^p}{p}\right)$$

称为准素因子．试证对 $|z|\leqslant1/2$

$$|E(z,p)-1|\leqslant4|z|^{p+1}.$$

(注意：对 $|z|\leqslant1/2$ 有

$$\left|\log(1-z)+z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^p}{p}\right|\leqslant2|z|^{p+1}/(p+1).$$

又对 $|z|\leqslant1$ 有 $|e^z-1|\leqslant2|z|$.)

c) 设 (a_n) 是$\neq0$ 的复数的无穷序列，而序列 $(|a_n|)$ 是递增的，且

$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=+\infty$. 试证：对任意 $z\in\mathbf{C}$，一般项为 $(z/a_n)^n$ 的级数是绝对收敛的。

d) 由 a), b) 与 c) 推证：整函数序列

$$p_n(z)=\prod_{k=1}^{n}E\left(\frac{z}{a_k},k-1\right)$$

在 $\mathbf{C}$ 的每个紧子集中都是一致收敛的（应用 Cauchy 准则，并利用 a) 与 b) 对 $m>n$ 估计差 $1-(p_m(z)/p_n(z))$；然后应用 c)）. 因此序列 $(p_n(z))$ 的极限 $f(z)$ 是一整函数，把它记为 $f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}E\left(\frac{z}{a_n},\ n-1\right)$；证明：使 $f(z)=0$ 的点只是那些点 a_n（利用上述估计）.

e) 假设存在整数 $p>0$ 使一般项为 $|a_n|^{-p}$ 的级数收敛. 类似地证明：整函数序列

$$q_n(z)=\prod_{k=1}^{n}E\left(\frac{z}{a_k},\ p-1\right)$$

在 $\mathbf{C}$ 的每个紧子集中都是一致收敛的；我们仍把它记为 $g(z)=\prod_{n=1}^{\infty}E\left(\frac{z}{a_n},\ p-1\right)$. 证明：存在常数 $c>0$ 使

$$|g(z)|\leqslant\exp(c|z|^p).$$

（对任给的 z，分别考虑使 $|a_n|\geqslant2|z|$ 的那些因子的积与其余因子的积：利用 b) 控制第一个积；另一方面，证明存在常数 b，使对任意 $z\in\mathbf{C}$，有 $|E(z,p-1)|\leqslant\exp(b|z|^{p-1})$.）

2) 试证整函数

$$f_n(z)=z(z+1)\cdots(z+n)/n^z n! \tag{1}$$

（这里，据定义，$n^z=\exp(z\log n)$）的序列在 $\mathbf{C}$ 的每个紧子集中都一致地收敛到整函数

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}, \tag{2}$$

其中 $\gamma=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)$（Euler 常数）.（利用问题 1e) 的结果，记 $\log n=\sum\limits_{k=2}^{n}\log(k/(k-1))$ 并比较(1)与(2). 利用中值定理控

制 $\left(\left|\frac{1}{k}-\log\frac{k}{k-1}\right|\right)$.

试证：当 z 不是整数 $-n\leqslant 0$ 时，$\Gamma(z)$ 满足函数方程 $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$，而且对整数 $n>0$，有 $\Gamma(n)=(n-1)!$

3）开子集 $A\subset\mathbf{C}$ 中的**无端点路径**是 $\mathbf{R}$ 到 A 的这样的连续映射 γ：在每个紧区间 $I\subset\mathbf{R}$ 中，γ 都是正则函数的原函数．若 f 是 $\gamma(\mathbf{R})$ 到复 Banach 空间 E 的一连续映射，那么当广义积分 $\int_{-\infty}^{\infty}f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$ 存在时（即当两极限 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$ 与 $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^0 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$ 在 E 中都存在时），我们就称 f 沿 γ 是广义可积的；而且积分的值称为 f 沿 γ 的积分，并记为 $\int_\gamma f(z)dz$.

设 B 是 $\mathbf{C}^p$ 的一开子集，g 是 $\gamma(\mathbf{R})\times B$ 到 E 的一连续映射．假设对每个 $x\in\gamma(\mathbf{R})$，函数 $(z_1,\cdots,z_p)\to g(x,z_1,\cdots,z_p)$ 在 B 中是解析的，而且每个函数 $\partial g/\partial z_k(x,z_1,\cdots,z_p)$ 在 $\gamma(\mathbf{R})\times B$ 中是连续的．最后，设对每个 $(z_1,\cdots,z_p)\in B$，$x\to g(x,z_1,\cdots,z_p)$ 是沿 γ 广义可积的，而且 $\int_{-n}^{n}g(\gamma(t),z_1,\cdots,z_p)\gamma'(t)dt$，当 $(z_1,\cdots,z_p)$ 在 B 的任一紧子集中变动，而 n 趋于 $+\infty$ 时，一致地趋于 $\int_\gamma g(x,z_1,\cdots,z_p)dx$．在这些假设下，试证函数 $(z_1,\cdots,z_p)\to\int_\gamma g(x,z_1,\cdots,z_p)dx$ 在 B 中是解析的．（参看 13.8.6.）

4）把 9.9 节问题 2 的结果推广到 p 个复变量的函数，其中 D_+（相应地，D_-）由 $\mathscr{I}(z_p)>0$（相应地，$\mathscr{I}(z_p)<0$）定义．（注意据(9.12.1)对每个这样的 z_p：使 $\mathscr{I}(z_p)=0$ 以及 A 与集合 $\mathbf{C}^{p-1}\times\{z_p\}$ 的交集 B 不空，函数 $(z_1,\cdots,z_{p-1})\to f(z_1,\cdots,z_{p-1},z_p)$ 都在 B 中解析.）

5）在平面 $\mathbf{C}$ 中，设 Q 是由 $|\mathscr{R}(z)|<1$，$|\mathscr{I}(z)|<1$ 定义的以 0 为中心的正方形．设 Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 是 Q 在映射 $z\to\frac{1+i}{2}+\frac{z}{2}$，$z\to\frac{-1+i}{2}+\frac{z}{2}$，$z\to\frac{-1-i}{2}+\frac{z}{2}$，$z\to\frac{1-i}{2}+\frac{z}{2}$ 下的象．又设 $m_0=0$，而对任意 $h\geqslant 1$，令 $m_h=4+4^2+\cdots+4^h$．若 $n=m_h+4k+j$，其中 $h\geqslant 1$，$0\leqslant k\leqslant 4^h-1$，$0\leqslant j\leqslant 3$，则归纳地定义 Q_n 如下：设 $n_1=m_{h-1}+k$，并设 z_{n_1} 是 Q_{n_1} 的中心；令 $\varphi_{n_1}(z)=z_{n_1}+z/2^h$ 并取 $Q_n=\varphi_{n_1}(Q_j)$.

a）设 B 是单位圆盘 $|z|\leqslant 1$，U 是单位圆 $|z|=1$．对 n 使用归纳法证明：存在对 $n\geqslant 4$ 定义的三个数列 (α_n)，(c_n)，(t_n)，具有下列性质：1° $0<$

$\alpha_n<1$, $|t_n|=1$, $c_n\in\mathbf{C}$; 2° 若对 $z\in B$, $g_n(z)=c_n\left(1-\left(1-\frac{z}{t_n}\right)^{\alpha_n}\right)$(定义在 9.5 节问题 8) 与 $f_n(z)=z+\sum_{q=4}^{n} g_q(z)$, 则 $f_n(B)\subset\bar{Q}$ 以及对 $k\leqslant n$ 有 $f_n(t_k)\in Q_k$; 3° 级数 $\sum_n |g_n|$ 在 U 中一致收敛. (注意: $g_n(t_n)=c_n$, 但是，给定 t_n 在 B 中的任一邻域 V_n 后，可以把 α_n 取得充分小使 $g_n(z)$ 在 $B-V_n$ 中任意小. 选取 t_n 靠近 t_{n_1} (仍用上面引入的记号)，并且 t_n 全都互异，又取 V_n 使它不包含任何 t_k, $k<n$.)

b) 在上述条件下，对任意 $z\in B$, $(f_n(z))$ 的极限 $f(z)$ 存在，f 在 B 中连续，并且在 $\mathring{B}$ 中解析，还满足 $f(U)=Q$ ("Peano 曲线"，参看 4.2 节问题 5).

13. 解析函数的等度连续集

(9.13.1) 设 A 是 $\mathbf{C}^p$ 的开集，Φ 是 A 到复 Banach 空间 E 的解析映射的集，假设对 A 的每个紧子集 L，都存在常数 $m_L>0$ 使 $\|f(z)\|\leqslant m_L$ 对所有的 $f\in\Phi$ 与每个 $z\in L$ 都成立. 则 Φ 在 A 中是等度连续的(7.5). 此外若 E 是有限维的，则对 A 的每个紧子集 L，诸函数 $f\in\Phi$ 在 L 上的限制的集 Φ_L 在空间 $\mathscr{C}_E(L)$ (7.2)中是相对紧的.

设 $a\in A$，则存在以 a 为中心，r 为半径的闭球 $P\subset A$，因 P 是紧的，故 $\|f(z)\|\leqslant m_P$ 对每一个 $z\in P$ 与 $f\in\Phi$ 成立. 设 Q 是以 a 为中心 $r/2$ 为半径的闭球. 对任意 $z\in Q$ 与 $f\in\Phi$ 我们可以写出

$$f(z)-f(a)=\sum_{k=1}^{p}\left(f(z_1,\cdots,z_k,a_{k+1},\cdots,a_p)\right.$$
$$\left.-f(z_1,\cdots,z_{k-1},a_k,a_{k+1},\cdots,a_p)\right).$$

又

$$f(z_1,\cdots,z_{k-1},z_k,a_{k+1},\cdots,a_p)$$
$$-f(z_1,\cdots,z_{k-1},a_k,a_{k+1},\cdots,a_p)$$
$$=\int_0^1 D_k f(z_1,\cdots,z_{k-1},a_k+t(z_k-a_k),a_{k+1},\cdots,a_p)$$

$\cdot(z_k - a_k)dt.$

记 $g_k(u) = f(z_1, \cdots, z_{k-1}, u, a_{k+1}, \cdots, a_p)$；则在 $\mathbf{C}$ 的包含球 $|u - a_k| \leqslant r$ 的开集中 g_k 是解析的. 而且在该球中 $\|g_k(u)\| \leqslant m_p$. 把(9.9.3)应用到 g_k 与在 $[0, 2\pi]$ 上定义的回路 $t \to a_k + re^{it}$ 上，我们得到

$$\|g'_k(u)\| \leqslant 4m_p/r$$

对于 $|u - a_k| \leqslant r/2$ 成立. 因此，对任意 $z \in Q$ 与任意 $f \in \Phi$ 有

$$\|f(z) - f(a)\| \leqslant \frac{4pm_p}{r}|z - a|;$$

这表明 Φ 在点 a 是等度连续的. (9.13.1)末尾的论断可由有限维空间中的任意有界集是相对紧的((3.17.6)与(3.20.17))这一事实以及 Ascoli 定理(7.5.7.)推出.

(9.13.2) 设 A 是 $\mathbf{C}^p$ 中的一连通开集，Φ 是 A 到复 Bandch 空间 E 的解析映射的集. 假设对 A 的每个紧子集 L，函数 $f \in \Phi$ 在 L 上的限制的集 Φ_L 在 $\mathscr{C}_E(L)$ 中是相对紧的. 若 M 是 A 中的唯一性集(9.4)，又设 Φ 中的函数序列 (f_n) 在 M 中简单收敛，则 (f_n) 在 A 的任何紧子集中都一致收敛(收敛到一解析函数).

由(3. 16. 4)，我们只须证明对每个紧集 $L \subset A$，f_n 在 L 上的限制序列在 $\mathscr{C}_E(L)$ 中只有一个触值. 假设相反，并设 (g_n) 与 (h_n) 是 (f_n) 的两个子序列，每一个在 L 中都一致收敛，而且它们的极限是不同的. 因 A 是局部紧的(3. 18. 4)与可分的，故存在 A 的开子集的递增序列 (U_n)，使得 $\overline{U}_n$ (U_n 在 $\mathbf{C}^p$ 中的闭包)是紧的并含于 U_{n+1} 中，而且 $A = \bigcup\limits_n U_n$ (3.18.3). 对 k 使用归纳法，定义这样的序列 $(g_{kn})_{n=1,2\cdots}$，使得 (g_{kn}) 是 $(g_{k-1,n})$ 的子序列，而 $g_{0n} = g_n$，并且 (g_{kn}) 在 $\overline{U}_k$ 中一致收敛，根据对 Φ 的假设，这是能办到的. 因此"对角线"子序列 (g_{nn}) 在每个 U_n 中都一致收敛，因此，据(9. 12. 1)它的极限 g 在 A 中是解析的. 用同样

的方法可以从 (h_n) 中选出子序列 (h_{nn})，它在 A 中收敛到一个解析函数 h. 因为据假设对 $z \in M$ 有 $g(z) = h(z)$，故由定义，必定有 $g = h$，但这与子序列 (g_n)，(h_n) 的定义矛盾，证完.

问　　题

设 A 是 $\mathbf{C}$ 中开集，E 是 A 中解析的所有复函数 f 的集，使 $\iint_A |f(z)|^2 dxdy$ 是有限的.

a) 试证，E 是一复向量空间，对 E 中任一对函数 f, g，积分 $\iint_A f(z)\overline{g(z)} dxdy$ 是有限的，并且映射 $(f, g) \to \iint_A f(z)\overline{g(z)} dxdy$ 定义 E 上的准 Hilbert 空间结构，它的范数记为 $\|f\|$.

b) 试证，对任意紧子集 $L \subset A$，存在一个数 a_L 使得对每个函数 $f \in E$ 与每个 $t \in L$ 有 $|f(t)| \leqslant a_L \|f\|$（利用 9.3 问题 6)）. 由此推出 E 是 Hilbert 空间.

c) 由 b) 与 6.3 问题 5 推证：存在 E 中的再生核，称为 A 的 Bergman 核. 证明若 A 是单位圆盘 $|z| < 1$，则 A 的 Bergman 核是 $K_B(s, t) = \frac{1}{\pi(1 - s\bar{t})^2}$（利用 9.3 问题 6)）. 类似地计算环 $r < |z| < 1$ 的 Bergman 核.

d) 推广到 $\mathbf{C}^n$ 的开子集 A 上去.

14. Laurent 级数

(9.14.1) 设 A 是 $\mathbf{C}$ 的开子集，r_0, r_1 是满足 $0 < r_0 < r_1$ 的两个数，并假设 S 是由 $r_0 < |z| < r_1$ 定义的“开环”，而且它在 $\mathbf{C}$ 中的闭包 $\bar{S}$（即“闭环” $r_0 \leqslant |z| \leqslant r_1$）含于 A 中. 对于 A 到复 Banach 空间 E 的任意解析映射 f 与任意 $x \in S$，我们有

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(z)dz}{z - x} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0} \frac{f(z)dz}{z - x},$$

其中 $\gamma_0(\gamma_1)$ 是回路 $t \to r_0 e^{it}$ $(t \to r_1 e^{it})$，$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

象在(9.9.1)的证明中那样，我们首先看出函数 $g(z)$——在点 x 它等于 $f'(x)$ 而对 $z\neq x, z\in A$，它等于 $(f(z)-f(x))/(z-x)$——在 A 中是解析的. 又 $\varphi(t,\xi)=\xi r_0e^{it}+(1-\xi)\cdot r_1e^{it}(0\leqslant t\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\xi\leqslant 1)$ 是 A 中 γ_1 到 γ_0 的一个闭路同伦. 故由 Cauchy 定理 (9.6.3)有 $\int_{\gamma_0} g(z)dz=\int_{\gamma_1} g(z)dz$. 但对 $r_0<|x|<r_1$，我们有 $j(x;\gamma_0)=0$ 与 $j(x;\gamma_1)=1$((9.8.4) 与 (9.8.5))，于是得到结果.

(9.14.2) 在(9.14.1)相同的假设下，存在一个对 $|z|<r_1$ 收敛的幂级数 $g_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$，与一个对 $|z|>r_0$ 收敛的无常数项的 $\frac{1}{z}$ 的幂级数 $g_2(z)=\sum_{n=1}^{\infty}d_nz^{-n}$，使得在 S 中有 $f(z)=g_1(z)+g_2(z)$ (f 的 "Laurent 级数"). 此外，具有这样性质的幂级数 g_1，g_2 是唯一的，并且对 $\bar{S}$ 中的每个回路 γ，有

$$j(0;\gamma)c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(x)dx}{x^{n+1}},\quad j(0;\gamma)d_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}x^{n-1}f(x)dx.$$

据(9.9.2)对于 $|z|<r_1$，我们有 $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(x)dx}{x-z}=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$，其中 $c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(x)dx}{x^{n+1}}$，并且这个级数对 $|z|<r_1$ 收敛. 另一方面，对 $|z|>r_0$，有

$$\frac{1}{z-x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{z^n},$$

右边的级数对于 $|x|=r_0$ (z 固定)是依范数收敛的. 由(8.7.9)得到 $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0}\frac{f(x)dx}{z-x}=\sum_{n=1}^{\infty}d_nz^{-n}$，其中 $d_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0}x^{n-1}f(x)dx$，并且这个级数对 $|z|>r_0$ 是收敛的. 这就证明了(9.14.2)的第一部分. 其次假设在 S 中有

$$(9.14.2.1)\qquad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n+\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^{-n},$$

并且这两个级数在 S 中都是收敛的. 先设 γ 是 S 中定义在 I 上的回路, 则在 I 中存在点 t, t', 使得 $|\gamma(t)| = \inf_{s\in I}|\gamma(s)| = r$ 与 $|\gamma(t')| = \sup_{s\in I}|\gamma(s)| = r'$ (3.17.10), 故对任意 $s\in I$ 有 $r_0 < r \leqslant |\gamma(s)| \leqslant r' < r_1$. 但对 $r \leqslant |z| \leqslant r'$,(9.14.2.1) 中的两个级数是依范数收敛的(9.1.2). 因此由(8.7.9),对任意正或负整数 m, 都有

$$\int_\gamma z^{m-1}f(z)\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_\gamma z^{n+m-1}dz + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_\gamma z^{m-n-1}dz.$$

因为对 $k \neq -1$, $z^{k+1}/(k+1)$ 是 z^k 的原函数,所以对任意回路 σ 都有 $\int_\sigma z^k dz = 0$. 于是(9.14.2)由指数的定义推出. 若现在 γ 在 $\bar{S}$ 中, 那么只要注意, 存在一开环 S_1: $(1-\varepsilon)r_0 < |z| < (1+\varepsilon)r_1$ 含于 A 中(3.17.11), 于是我们又回到了上述情形.

15. 孤立奇点;极点;零点;残数

(9.15.1) 设 A 是 $\mathbf{C}$ 的开子集, a 是 $\mathbf{C}-A$ 的一孤立点(3.10.10), r 是 >0 的数,它使球 $|z-a| \leqslant r$ 中所有的点,除 a 外,都属于 A. 若 f 是 A 到复 Banach 空间 E 的一解析映射,那么对 $0<|z-a|<r$ 我们有

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n(z-a)^{-n},$$

其中两个级数对 $0<|z-a|<r$ 都是收敛的,而且

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(x)dx}{(x-a)^{n+1}},\quad d_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (x-a)^{n-1}f(x)dx,$$

这里 γ 是回路 $t \to a + re^{it}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

这立即可把(9.14.2)应用到环: $\rho \leqslant |z-a| \leqslant r$ 上而推得,其中 ρ 是任意小的正数.

注意级数 $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n x^n$ 是一个整函数而且 $u(0) = 0$; 我

们说函数 $u(1/(z-a))$ 是 f 在 a 的邻域中（或在 a）的**奇异部分**．当 $u=0$ 时，f 在开集 U：$0<|z-a|<r$ 中与函数 $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ 重合，后者对于 $|z-a|<r$ 是解析的．反之，若 f 是对 $|z-a|<r$ 有定义的解析函数 f_1 在 U 上的限制，则由(9.9.4)与(9.15.1)知 $f_1=g$，于是 $u=0$．当 $u\neq 0$ 时，我们称 a 是 f 的**孤立奇点**．若 u 是 $n\geqslant 1$ 次多项式，则称 a 是 f 的 **n 阶极点**；若不然（即若 $d_m\neq 0$ 对 m 的无穷多个值成立）则我们称 a 是 f 的**本性奇点**．一般地，定义 f 在点 a 的**阶** $\omega(a;f)$（或 $\omega(a)$）如下：若 a 是本性奇点，则 $\omega(a)=-\infty$；若 a 是 $n\geqslant 1$ 阶极点，则 $\omega(a)=-n$；若 $f\neq 0$，$u=0$ 并且在幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$——对 $0<|z-a|<r$ 它等于 $f(z)$——中，m 是使 $c_m\neq 0$ 的最小整数，则 $\omega(a)=m$；最后 $\omega(a,0)=+\infty$．当 $\omega(a;f)=m>0$ 时，也说 a 是 f 的 m 阶零点．注意，若 f，g 在开集 U：$0<|z-a|<r$ 中都是解析的，并在同一空间中取值，则 $\omega(a;f+g)\geqslant\min(\omega(a;f),\ \omega(a;g))$；若函数 f，g 有一个是复值的，那么只要数 $\omega(a;f)$，$\omega(a;g)$ 是有限的，就有 $\omega(a;fg)=\omega(a;f)+\omega(a;g)$．在 U 中解析并具有限阶数 n（正或负）的任意函数 f 都可以唯一地写成 $(z-a)^n f_1$，其中 f_1 在 U 中是解析的，并且在点 a 是 0 阶的．最后，若 f 在 U 中解析且取复值，并在点 a 有有限阶数 m，则由孤立零点原理与(9.3.2)推知，存在满足 $0<r'<r$ 的数 r'，使 $1/f$ 在开集 $0<|z-a|<r'$ 中是解析的；而且还有 $\omega(a;1/f)=-\omega(a;f)$．

(9.15.2) 设 f 在开集 U：$0<|z-a|<r$ 中解析．为要 $\omega(a;f)\geqslant n$，这里 n 是正或负整数，必须且只须存在 a 在 C 中的一邻域 V 使得 $(z-a)^{-n}f(z)$ 在 $V\cap U$ 中有界．

条件显然是必要的，因为在 a 点的阶数 $\geqslant 0$ 的函数是某个在球 $|z-a|<r$ 中解析的函数的限制．反之，通过考虑函数 $(z-a)^{-n}f(z)$，可以假设 $n=0$．然后由(9.15.1)与中值定理推出：

若在U中 $\|f(z)\| \leqslant M$，则对任意满足 $0 < \rho < r$ 的ρ，都有 $\|d_m\| \leqslant M\rho^m$ 对任意 $m \geqslant 1$ 成立. 因ρ是任意的，这就蕴含 $d_m = 0$ 对每个 $m \geqslant 1$ 成立，证完.

(9.15.1)中的系数 d_1 称为 f 在 a 点的**残数**.

问　　题

1) 试证：对于 $p \geqslant 2$ 个复变数的解析函数不存在孤立奇点(换句话说，若A是$\mathbf{C}^p$的开子集，$a \in A$ 以及 $A - \{a\}$ 到复 Banach 空间E的映射f是解析的，则f是A到E的一解析映射的限制. 利用 9.10 节问题 5).

2) 设f是一个复变量的复值解析函数，在点 $a \in \mathbf{C}$ 有一本性奇点. 试证：对任意复数λ，函数 $1/(f-\lambda)$ 要在形如 $V - \{a\}$ 的开集中有定义并有界是不可能的，这里V是一个开邻域(利用(9.15.2)). 由此推出结论：对于a的任一邻域V，只要f在 $V - \{a\}$ 中是解析的，$f(V - \{a\})$ 在$\mathbf{C}$中就是稠密的("Weierstrass 定理". 参见 10.3 节，问题 8).

3) 不是多项式的整函数叫做**超越整函数**. 设f是一个复变量的复值超越整函数.

a) 试证：对任意整数 $n > 0$，由使 $|f(z)| > n$ 的点 $z \in \mathbf{C}$ 组成的$\mathbf{C}$的开子集 $D(n)$ 是非空的并且它不能包含任何球的外部(把问题 2 应用到函数$f(1/z)$).

b) 设 $K(n)$ 是 $D(n)$ 的一个连通分支(3.19.5). 试证：$K(n)$ 是无界的而且 $|f(z)|$ 在 $K(n)$ 中也是无界的(若 $a \notin K(n)$，考虑函数 $f(1/(z-a))$ 并利用 9.5 节问题 14).

c) 试证：存在$[0, +\infty]$到$\mathbf{C}$的连续映射γ，使得在每个区间 $[0, \alpha]$ 上，γ是某正则函数的原函数，而且使 $\lim\limits_{t \to +\infty} |\gamma(t)| = +\infty$ 与 $\lim\limits_{t \to +\infty} |f(\gamma(t))| = +\infty$. (考虑这样的开子集 $L_n \subset \mathbf{C}$ 的序列：L_n 是 $D(n)$ 的一连通分支，而且对每个 n 有 $L_{n+1} \subset L_n$；这样的序列的存在性可由 b) 推出. 然后利用 (9.7.2).)

d) 把上述结果推广到任意多个复变量的复值超越整函数.(若 $f(z_1, \cdots, z_p) = \sum a_{n_1 \cdots n_p} z_1^{n_1} \cdots z_p^{n_p}$，则至少存在一个附标$k$，使得有无穷多个具有非零系数 $a_{n_1 \cdots n_p}$ 的单项式与任意大的 n_k. 另一方面，证明：若 (g_m) 是p个复变量的复值整函数的可数族，且其中任一个不恒等于 0，则存在点 $(c_1, \cdots, c_p)$，使对每个m都有 $g_m(c_1, \cdots, c_p) \neq 0$. 要做到这一点，可对$p$使用归纳法以及

利用下述事实：对于单复变量函数 $h(z)$，只要它在 $A\subset C$ 中是解析的且不恒等于 0 的，则 $h(z)=0$ 的解 z 的集至多是可数的（参看(9.1.5)）.）

4）设 $\phi(x)$ 是定义在 $[0,+\infty[$ 上的任一个递增的正实函数．设 (k_n) 是一严格递增整数序列，满足 $k_1=1$，并使 $(n/(n-1))^{k_n}>\varphi(n+1)$ 对 $n>1$ 成立．试证：幂级数

$$(z)=1+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{z}{n-1}\right)^{k_n}$$

对所有 $z\in \boldsymbol{C}$ 都是收敛的，而且对每个实数 $x\geqslant 2$，都有 $f(x)\geqslant\varphi(x)$（换句话说，存在比任意给定的实函数"更快地"趋于无穷的整函数.）

5）对任意实数 α,β，满足 $\beta>0$，设 $L_{\alpha,\beta}$ 是无端点路径(9.12 节，问题 3)，其定义如下：对 $t\leqslant -1$，$L_{\alpha,\beta}(t)=\alpha-i\beta-t-1$；对 $-1\leqslant t\leqslant 1$，$L_{\alpha,\beta}(t)=\alpha+i\beta t$；对 $t\geqslant 1$，$L_{\alpha,\beta}(t)=\alpha+i\beta+t-1$．设 $G_{\alpha,\beta}=L_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{R})$．

a）试证：若 $\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{3\pi}{2}$，又若 $x\notin G_{\alpha,\beta}$，则函数 $z\to(\exp(\exp z))/(z-x)$ 沿 $L_{\alpha,\beta}$ 是广义可积的．而且，若 β_1,β_2 使 $|\mathscr{I}(x)|<\beta_1<\beta_2$ 或使 $|\mathscr{I}(x)|>\beta_2>\beta_1$，或者 $\mathscr{R}(x)<\alpha$，则沿 L_{α,β_1} 与 L_{α,β_2} 的积分是相同的；同样地，若 $\mathscr{R}(x)<\alpha_1<\alpha_2$ 或 $\alpha_1<\alpha_2<\mathscr{R}(x)$，或者 $|\mathscr{I}(x)|>\beta$，则沿 $L_{\alpha_1,\beta}$ 与 $L_{\alpha_2,\beta}$ 的积分是相同的（利用 Canchy 定理）.

b）由 a）推出：若 $L=L_{0,\pi}$，则

$$E(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\exp(\exp z)}{z-x}dz$$

可以开拓成一个整函数.

c）试证：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\exp(\exp z)dz=1$$

$\left(\text{证明 }\exp(\exp z)\text{ 沿 }L_{\alpha,\beta}\text{ 的积分与 }\alpha,\beta\text{ 无关}\left(\text{只要}\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{3\pi}{2}\right)\right)$.

d）试证：若 x 属于由 $\mathscr{R}(x)<0$ 或 $\mathscr{I}(x)>\pi$ 定义的开集 A，则

$$E(x)=-\frac{1}{x}+\frac{F(x)}{x^2},$$

其中 $F(x)$ 在 A 中有界（利用 a）与 c），将 $F(x)$ 用沿 $L_{0,\beta}$，$\beta<\pi$，的积分表示）.

e) 试证：若 x 属于由 $\mathscr{R}(x)>0$ 与 $|\mathscr{I}(x)|<\pi$ 定义的开集 B，则

$$E(x)=\exp(\exp x)-\frac{1}{x}+\frac{G(x)}{x^2},$$

其中 $G(x)$ 在 B 中有界(首先用 Cauchy 公式证明：若 $-1<\mathscr{R}(x)<0$ 与 $|\mathscr{I}(x)|<\pi$，则

$$E(x)=\exp(\exp x)+\frac{1}{2\pi i}\int_{L'}\frac{\exp(\exp z)}{z-x}dz,$$

其中 $L'=L_{-1,\pi}$. 其次利用(9.4.2)证明：这个公式对 $x\in B$ 仍然成立，并用沿 $L_{-1,\beta}$，$\beta>\pi$，的积分表示 $G(x)$)。

f) 设 $H(x)=E(x)e^{-E(x)}$. 试证：H 是一超越整函数使得对每个实数 θ，都满足 $\lim\limits_{r\to+\infty}H(re^{i\theta})=0$ (利用 d) 与 e)；并与问题 3 的结果比较)。

6) 设 f 是 $p\geqslant2$ 个复变量的复值整函数. 试证：若 $f(a_1,\cdots,a_p)=b$，则对每个 $r>0$，恒存在 $z=(z_1,\cdots,z_p)$ 使 $\sum\limits_k|z_k-a_k|^2=r^2$ 与 $f(z_1,\cdots,z_p)=b$ (利用 9.10 节问题 5b))。

7) 设 f 是开子集 $A\subset\mathbf{C}^p$ 到复 Banach 空间 E 的一解析映射. A 的边缘点 z_0 叫做 f 的**正则点**，如果存在 z_0 的一开邻域 V 与 $A\cup V$ 到 E 的在 A 中与 f 重合的解析映射. 如果 A 的边缘点不是正则的，我们就说它是 f 的**奇点**.

a) 设 $R<+\infty$ 是一个复变量幂级数 $f(z)=\sum\limits_n a_nz^n$ 的收敛半径(9.1 节，问题 1)．则至少存在一个使 $|z_0|=R$ 的点 z_0 是 f 的奇点．(若不然，则可以用有限个开球 B_k 覆盖圆 $|z|=R$，这些球的中心都在该圆上，并使得在每个开集 $B(0;R)\cup B_k$ 中存在与 f 在 $B(0;R)$ 中重合的解析函数 f_k 利用 (9.4.2) 证明：对任意两个附标 h，k，只要 $B_h\cap B_k\neq\phi$，f_h 与 f_k 就在 $B_h\cap B_k$ 中重合，于是由(9.9.1)与(9.9.2)得出结论：$\sum\limits_n a_nz^n$ 的收敛半径 $>R$.)

b) 使用 a) 中的记号，假设对每个 n 都有 $a_n\geqslant0$. 试证：点 $z=R$ 是 f 的奇点．(可以假设 $R=1$. 设 $e^{i\alpha}$ 是 f 的一个奇点．那么对 $0<r<1$，幂级数 $\sum\limits_n f^{(n)}(re^{i\alpha})z^n/n!$ 的收敛半径恰好是 $1-r$ (9.9.1). 注意 $|f^{(n)}(re^{i\alpha})|\leqslant f^{(n)}(r)$，并利用(9.1.2).)

c) 使用 a) 中的记号，假设 $R=1$. 设 b, c 是两个实数且 $0<b<1$, $c=1-b$, 又设 p 是 $\geqslant 1$ 的整数. 要使点 $z=1$ 是 f 的奇点，必须且只须函数 $g(u)=f(bu^p+cu^{p+1})$ 的 Taylor 级数 $\sum_n g^{(n)}(0)u^n/n!$ 有等于 1 的收敛半径. (注意：若 $|u|\leqslant 1$，则 $|bu^p+cu^{p+1}|\leqslant 1$，而且后一不等式的两边只在 $u=1$ 时才能相等. 为了证明条件的必要性必得利用(10.2.5)证明在 $z=1$ 的邻域中存在解析函数 $h(z)$ 使得在此邻域中有 $z=g(h(z))$.)

d) 假设(使用 a) 中的记号) $a_n=0$，除对整数的这样的子序列 (n_k) 例外：对每个 k，(n_k) 满足 $n_{k+1}>(1+\theta)n_k$，其中 $\theta>0$ 是一个固定的数. 试证：圆 $|z|=R$ 上的每一点 z_0 都是 f 的奇点 ("Hadamard 间断定理"；圆 $|z|=R$ 叫做 f 的**自然边界**). (可以假设 $R=1$. 利用 c) 中的判别准则，取 $p>1/\theta$，并设 $g(u)=\sum_{n=0}^{\infty}d_nu^n$ 是 g 在 $u=0$ 处的 Taylor 展开式. 据假设，对任给的 $\varepsilon>0$，存在整数的子序列 (m_j) 使得 $\|a_{m_j}\|\geqslant(1-\varepsilon)^{m_j}$ (9.1 节，问题 1). 另一方面，据 b)，函数 $F(u)=\sum_j(bu^p+cu^{p+1})^{m_j}=\sum_n l_nu^n$ 有一个奇点 $u=1$，因而存在整数的子序列 (q_l) 使 $|e_{q_l}|\geqslant(1-\varepsilon)^{q_l}$. 证明 $\|d_{q_l}\|\geqslant(1-\varepsilon)2q_l$).

8) 设 f, g 是开集 $0<|z-a|<r$ 中的两个解析函数，其中有一个取复值. 试证：如果在点 a 函数 f, g 中有一个是有限阶的，而另一个是 $-\infty$ 阶的，则 fg 在点 a 是 $-\infty$ 阶的.

16. 残数定理

我们先回顾：任何子集 $S\subset C$，只要它的点全是孤立的，它就是至多是可数的，因为这时 C 的子空间 S 是离散的与可分的 (据 (3.9.2), (3.20.6) 与 (3.10.9))，因而 S 是 S 自己的唯一的稠密子集 (3.8.4).

(9.16.1) 设 $A\subset \mathbf{C}$ 是一单连通域，(a_n) 是 A 中不同孤立点的序列(有限的或无穷的)，在 A 中没有触值，S 是这序列中点的集合. 设 f 是 $A-S$ 到复 Banach 空间 E 上的一解析映射，并设 γ 是

$A-S$ 中的一回路. 那么我们有

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_n j(a_n;\gamma)R(a_n),$$

其中 $R(a_n)$ 是 f 在点 a_n 的残数，并且右边只有有限项 $\neq 0$（残数定理）.

显然可以假设每个 a_n 都是 f 的奇点，因为可以把 f 连续开拓到所有的非奇点 a_n，公式的两边并不改变（因为若 a_n 不是奇异的，则 $R(a_n)=0$）. 在这个假设下，对任意紧集 $L\subset A$，$L\cap S$ 是有限的，原因是：由定义 $A-S$ 在 $\mathbf{C}$ 中是开的，故 $L\cap S$ 在 L 中是闭的. 因而由 $L\cap S$ 是紧的与离散的，得出它是有限的(3.16.3). 设 γ 定义在区间 I 上，并设 P 是使 $j(x;\gamma)\neq 0$ 的点 $x\in A$ 的集. 我们知道 P 在 $\mathbf{C}$ 中的闭包 $\bar{P}$ 是紧的(9.8.6)；又 $\bar{P}$ 不包含 A 的任何边缘点，因为这种点不能在 $\gamma(I)$ 上，也不能有关于 γ 的 $\neq 0$ 的指数(据(9.8.7))；因为 $\mathbf{C}-\gamma(I)$ 中使指数 $j(x;\gamma)$ 取给定值的点 x 的集是开的(9.8.3)，故 $\bar{P}$ 中任何不属于 $\gamma(I)$ 的点都在 P 中，于是 $\bar{P}\subset A$. 另一方面，设 $\varphi(t,\xi)$ 是 A 中 γ 到单点的回路的一个闭路同伦（$t\in I$，$\xi\in J$，J 是一紧区间）. 那么 $M=\varphi(I\times J)$ 是 A 的一紧子集. 设 $H\subset N$ 是使 $a_n\in M\cup\bar{P}$ 的整数 n 的有限集；对每个 $n\in H$，设 $u_n(1/(z-a_n))$ 是 f 在点 a_n 的奇异部分. 设 B 是使 $n\notin H$ 的点 a_n 的集在 A 中的余集，则 B 是开的，因为 B 中一点的含于 A 的紧邻域与 S 有有限交集. 据奇异部分的定义，存在 B 中解析的函数 g，并且在每个 $z\neq a_n(n\in H)$ 上等于 $f(z)-\sum_{n\in H}u_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$. 因由定义 $M\subset B$，故 γ 在 B 中同伦于一单点回路；于是，根据 Cauchy 定理，$\int_\gamma g(z)dz=0$. 换句话说 $\int_\gamma f(z)dz=\sum_{n\in H}\int_\gamma u_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)dz$. 于是结果由(9.14.2)推出，只要把(9.14.2)应用到每个在以 a_n 为中心并包含 $\gamma(I)$ 的开"环"中的函数 $u_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$上.

17. 亚纯函数

设A是 $\mathbf{C}$ 的开子集，S是A的闭子集，它所有的点都是孤立的. 我们称 $A-S$ 到复 Banach 空间E的映射f(由于滥用术语)在A中是**亚纯的**，如果它在 $A-S$ 中是解析的，并且在S的每一点上有$>-\infty$的阶.由于用词含糊，我们总是把f等同于它到S中所有非f极点的那些点上的连续开拓；于是(9.16.1)中用过的论证表明：总可以假定：对A的任意紧子集 L，$L\cap S$ 是有限的. 若f，g 是A中的两个亚纯函数，在同一空间中取其值，并且它们在A中极点的集分别是S，S'，那么根据上述附注，$S\cup S'$ 使其全部的点都是孤立的；$f+g$ 在 $A-(S\cup S')$ 上有定义并解析，而且在$S\cup S'$的每一点上有$>-\infty$ 的阶，从而它在A中是亚纯的(附注：$S\cup S'$中的某些点对于$f+g$ 可以不是奇异的). 类似地，若f与g在A中是亚纯的，并且g是复值的，则fg 在A中是亚纯的. 若$f\neq 0$ 在A中是亚纯的，S是其极点的集，T是其零点的集，则$S\cup T$ 的所有点都是孤立的，因为若 $a\in A$ 且 $\omega(a)=h$，则在集 $0<|z-a|<r$ 中，$f(z)=(z-a)^h f_1(z)$，而f_1在 $|z-a|<r$ 中是解析的，并且 $f_1(a)\neq 0$；孤立零点原理(9.1.5)表明：存在满足 $0<r'<r$ 的数 r'，并使对 $0<|z-a|<r'$ 有 $f(z)\neq 0$. 这不仅证明了我们的断言，而且还表明：对A的任意紧子集L，$L\cap(S\cup T)$ 是有限的(与(9.16.1)中的证明一样). 特别，若f是复值的，则 $1/f$ 在A中是亚纯的，并且S是其零点的集，T是其极点的集. 此外，仍用上述记号，对于 $0<|z-a|<r$，有 $f'(z)=h(z-a)^{h-1}f_1(z)+(z-a)^h f_1'(z)$，于是 f'/f——当 $0<|z-a|<r'$ 时是解析的——当 $h=0$ 时，在a点阶数为 0，当 $h\neq 0$ 时，在a点阶数为 -1，残数为h.

(9.17.1) 设A是 $\mathbf{C}$ 中的单连通域，$f\neq 0$ 是A中的复值亚纯函数，S(相应地，T)是它的极点(相应地，零点)的集，g是A中的解析函数. 那么，对 $A-(S\cup T)$ 中的任一回路 γ，我们有

$$\int_{\gamma} g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \sum_{a \in S \cup T} j(a;\gamma) g(a) \omega(a;f),$$

并且右边只有有限项$\neq 0$.

这可直接由残数定理推出，因为 gf'/f 在点 $a \in S \cup T$ 的残数就是 $g(a)$ 与 f'/f 在点 a 的残数的乘积.

(9.17.2) 仍在(9.17.1)的假设下，设 $t \to \gamma(t)(t \in I)$ 是 $A-(S \cup T)$ 中的回路. 若 Γ 是回路 $t \to f(\gamma(t))$，则

$$j(0;\Gamma) = \sum_{a \in S \cup T} j(a;\gamma) \omega(a;f).$$

因由(8.7.4)直接推得$\int_{\Gamma} \frac{du}{u} = \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$，故结果是(9.17.1)当 $g=1$ 时的特殊情形.

(9.17.3) (Rouché 定理) 设 $A \subset \mathbf{C}$ 是单连通域，f, g 是A中的两个复值解析函数. 设T是A中 f 零点的(至多可数)集，T' 是A中 $f+g$ 的零点的集，γ 是定义在区间 I 上的 $A-T$ 中的回路. 那么，若 $\gamma(I)$ 上有 $|g(z)| < |f(z)|$，则函数 $f+g$ 在 $\gamma(I)$ 上没有零点，并且

$$\sum_{a \in T} j(a;\gamma) \omega(a;f) = \sum_{b \in T'} j(b;\gamma) \omega(b;f+g).$$

第一点是显然的，因为 $f(z)+g(z)=0$ 蕴含 $|f(z)| = |g(z)|$. 函数 $h=(f+g)/f$ 在 $A-T$ 中有定义并在A中亚纯；在 $A-(T \cup T')$ 中我们有 $\frac{(f+g)'}{f+g} = \frac{f'}{f} + \frac{h'}{h}$. 利用(9.17.2)，我们只须证明 0 关于回路 Γ: $t \to h(\gamma(t))$ 的指数是 0. 因g/f在紧集 $\gamma(I)$ 上是连续的并且有限的，故由(3.17.10)与假设推得 $r = \sup_{z \in \gamma(I)} |g(z)/f(z)| < 1$. 换句话说，$\Gamma$ 在球 $|z-1| \leqslant r$ 中，又因为 0 是这个球的外点，于是结果由(9.8.5)推出.

(9.17.4) (含参数的函数方程的根的连续性) 设A是 $\mathbf{C}$ 中连通的开集，F 是距离空间，f 是 $A \times F$ 中的连续复值函数，使得对每

个 $\alpha \in F$，$z \to f(z,\alpha)$ 在 A 中都是解析的．设 B 是 A 的非空开子集，它在 $\mathbf{C}$ 中的闭包 $\bar{B}$ 是紧的且含于 A 中，并设 $\alpha_0 \in F$ 使 $f(z,\alpha_0)$ 的零点没有一个在 B 的边界上．那么存在 α_0 在 F 中的邻域 W 使得：1° 对任意 $\alpha \in W$，$f(z, \alpha)$ 在 B 的边界上没有零点；2° 对任意 $\alpha \in \omega$，$f(z, \alpha)$ 属于 B 的零点阶数的和与 α 无关．

$f(z, \alpha_0)$ 在 B 中的不同零点的个数是有限的；设 $a_1, \cdots, a_n$ 是这些点．对 B 的每个边界点 x，存在 x 的含于 A 中紧邻域 U_x，并使 $f(z, \alpha_0)$ 在 U_x 中没有零点(9.1.5)；如果我们用有限个集 U_{x_j} 覆盖 B 的(紧)边缘，那么 $\bar{B}$ 与这些 U_{x_j} 的并集 U 是 $\bar{B}$ 的一个紧邻域，它含于 A 中并使 $f(z,\alpha_0)$ 在 $U \cap (A - \bar{B})$ 中没有零点．设 r 是数 $|a_i - a_j|(i \neq j)$ 中最小的一个，对每个 $i(1 \leqslant i \leqslant n)$，设 D_i 是开球 $|z - a_i| < r_i$，它的半径 $r_i < r/2$，并且它含于 B 中；那么，当 $i \neq j$ 时，$D_i \cap D_j = \phi$．设 $H = U - \left(\bigcup_i D_i\right)$；这是个紧集；设 m 是 $|f(z, \alpha_0)|$ 在 H 中的最小值；据(3.17.10)有 $m > 0$．又对每个 $x \in H$，存在 x 的含于 A 中的邻域 V_x 与 α_0 在 F 中的邻域 W_x，使得对于 $y \in V_x$ 与 $\alpha \in W_x$ 有 $|f(y,\alpha) - f(x, \alpha_0)| < m/2$．因 H 是紧的，故可用有限个集 $V_{x_k}(1 \leqslant k \leqslant p)$ 覆盖它；设 $W = \bigcap_k W_{x_k}$，这是 α_0 在 F 中的一邻域；由定义，对任意 $\alpha \in W$ 与任意 $y \in \bar{B}$，我们有 $|f(y,\alpha) - f(y,\alpha_0)| < m$，于是推得与第一条结论相似的结果：对 $y \in H$ 与 $\alpha \in W$，有 $f(y, \alpha) \neq 0$；另一方面，因为在 H 中 $|f(z, \alpha) - f(z, \alpha_0)| < |f(z, \alpha_0)|$，故把 Rouché 定理应用到每个回路 $t \to a_i + r_i e^{it}(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 上，就可证明：$f(z, \alpha)$ 在各 D_i 中零点阶数的和与 $\alpha \in W$ 无关，于是定理得证．

问　　题

1)设 $A \subset \mathbf{C}$ 是一单连通开集，f 是 A 中的亚纯复值函数，它使 f 的每个极点都是单极点并使 f 在每个极点上的残数都是正或负整数．试证：在 A 中

存在亚纯函数 g，使得 $f=g'/g$。(若 z_0 不是 f 的极点，证明：对于不是 f 极点的任一点 $z_1\in A$，与 A 中任一条定义在 $I\subset \mathbf{R}$ 上，始点为 z_0 终点为 z_1 的回路 γ，而且 $\gamma(I)$ 不包含 f 的任何极点，数 $\exp\left(\int_\gamma f(x)dx\right)$ 只取决于 z_0 与 z_1，而与满足上述条件的回路 γ 无关(利用残数定理).)

2) 设 f 是一个复变数的整函数，使得对实数 x, y，有 $\|f(x+iy)\|\leqslant e^{|y|}$。试证，对任意 z，只要它异于 π 的整数倍 $n\pi$，就有

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{f(z)}{\sin z}\right)=-\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n f(n\pi)}{(z-n\pi)^2},$$

这里右边的级数在 C 的任何紧子集中是依范数收敛的，只要它不包含任一个点 $n\pi$ (n 为整数)。(考虑积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{f(x)}{\sin x}\,\frac{dx}{(x-z)^2},$$

其中 γ_n 是回路 $t\to\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi e^{it}$，对 $-\pi\leqslant t\leqslant\pi$。注意：对任意 $\varepsilon>0$，存在数 $c(\varepsilon)>0$ 使得由 $|z-n\pi|\geqslant\varepsilon$ 对每个整数 $n\in Z$ 成立这种关系可推出 $|\sin z|\geqslant c(\varepsilon)e^{|\mathscr{I}(z)|}$；并利用残数定理.)

3) a) 试证：对 $z\neq n\pi$ (n 是整数)

$$\mathrm{ctg}z=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2\pi^2},$$

这里右边在 C 的任意紧子集中是依范数收敛的，只要它不包含任何一个点 $n\pi$。(使用问题 2 及关系式 $\lim\limits_{z\to 0}(\mathrm{ctg}z-1/z)=0$。)

b) 由 a) 推证：

$$\sin z=z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right),$$

其中乘积定义为 $\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$的极限，而收敛在 C 的每个紧子集中是一致的。(考虑整函数 $f(z)=\prod\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{n\pi}\right)e^{-z/n\pi}$ (9.12 节，问题 1)，并利用 a) 证明函数 $(\sin z)/zf(z)$ 是一个常数.)

c) 由 b) 推证恒等式

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)}=\frac{1}{\pi}\sin\pi z$$

(见 9.12 节问题 2)。

4) 设 f 是复值函数，在C^p 中 0 点的一开邻域 A 中解析；为方便起见，我们把 z_p 写成 w，把 $(z_1, \cdots, z_{p-1})$ 写成 z. 假设 $f(0, 0)=0$ 而函数 $f(0, w)$——它在 $w=0$ 在 $\mathbf{C}$ 中的一邻域中是解析的——不恒等于 0 . 那么存在一整数 $r>0$，及 r 个函数 $h_j(z)$，它们在 C^{p-1} 中 0 点的一邻域中解析，还存在函数 $g(z,w)$，它在 C^p 中 0 点的一邻域 $B\subset A$ 中解析，且在该邻域中 $\neq 0$，使得在 C^p 中 0 点的一邻域内有

$$f(z,w)=(w^r+h_1(z)w^{r-1}+\cdots+h_r(z))g(z,w)$$

("Weierstrass 预备定理"). (若 $w=0$ 是 $f(0, w)$ 的 r 阶零点，那么利用 (9.17.4)就可证明：存在数 $\varepsilon>0$ 与在 C^{p-1} 中 0 点的一邻域 V，使得对任意 $z\in V$，函数 $w\to f(z, w)$ 在圆盘 $|w|<\varepsilon$ 中正好有 r 个零点而在圆周 $|w|=\varepsilon$ 上没有零点. 设 γ 是回路 $t\to\varepsilon e^{it}$，$-\pi\leqslant t\leqslant\pi$；(借助于残数定理)证明：存在函数 $h_j(z)(1\leqslant j\leqslant r)$ 在 V 中解析并且使多项式 $F(z,w)=w^r+h_1(z)w^{r-1}+\cdots+h_r(z)$ 满足下面的恒等式

$$\frac{F'_w(z,w)}{F(z,w)}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'_u(z,u)}{f(z,u)}\,\frac{1}{w-u}\,du$$

其中 $z\in V$ 与 $|w|>\varepsilon$.)

5) 设 (f_n) 是 $\mathbf{C}$ 的开连通子集 A 中的复值解析函数序列. 假设对每个 $z\in A$，序列 $(f_n(z))$ 趋向一极限 $g(z)$，并且在 A 的每个紧子集中是一致收敛的. 再设 A 到 $\mathbf{C}$ 的每个映射 $z\to f_n(z)$ 是单射的. 试证：或者 g 在 A 中是常值的或者 g 是单射的(对任意 $z_0\in A$，考虑序列 $(f_n(z)-f_n(z_0))$ 并应用(9.17.4)与孤立零点原理).

6) 设 φ 是区间$[0,1]$上的二次可微实值函数. 假设 $|\varphi(0)|<|\varphi(1)|$，并设 x_0 是 $\varphi(0)-\varphi(1)\cos x=0$在 $]-\pi, \pi[$ 中的一个零点. 试证：整函数

$$F(z)=\int_0^1\varphi(t)\sin zt\,dt$$

有可数的零点集；而且能够定义 Z 到 $zF(z)$ 的零点集上的满映射 $n\to z_n$，使得每个零点都对应于一个与它的阶数相等的附标数，并且 $\lim\limits_{n\to\pm\infty}(z_{2n}-x_0-2n\pi)=\lim\limits_{n\to\pm\infty}(z_{2n+1}+x_0-2n\pi)=0$. (实行两次分部积分，就可证明：$zF(z)=\varphi(0)-\varphi(1)\cos z+G(z)$，其中 $|G(z)|\leqslant ae^{|\mathscr{I}(z)|}/|z|$；象问题 2 中使 $|\sin z|$ 受控制那样，使$|\varphi(0)-\varphi(1)\cos z|$ 在那些以该函数的零点为中心的圆外受控制；再适当地利用 Rouché 定理.) 对 $|\varphi(0)|>|\varphi(1)|$ 或 $|\varphi(0)|=|\varphi(1)|$ 的情形作同样的讨论.

附录 解析函数在平面拓扑学上的应用

(Eilenberg 方法)

1. 点对闭路的指数

(附录 1.1) 若 $t\to\gamma(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$ 是 $\mathbf{C}$ 的开子集 A 中的一线路，则 A 中存在一个 γ 到路径 γ_1 的同伦 φ，使得 φ 在 $[a,b]\times[0,1]$ 上定义并且对每个 $\xi\in[0,1]$ 都有 $\varphi(a,\xi)=\gamma(a)$ 与 $\varphi(b,\xi)=\gamma(b)$.

设 $I=[a,b]$；因 $\gamma(I)$ 是紧的，故 $d(\gamma(I),\mathbf{C}-A)=\rho>0$ (3.17.11). 又因 γ 在 I 中是一致连续的 (3.16.5)，所以存在 I 中点的严格递增序列 $(t_k)_{0\leqslant k\leqslant m}$，且 $t_0=a$，$t_m=b$，并使 γ 在每个区间 $[t_k,t_{k+1}]$ $(0\leqslant k\leqslant m-1)$ 上的振幅(3.14)$<\rho$. 在 I 上定义 γ_1 如下：对于 $t_k\leqslant t\leqslant t_{k+1}$，$\gamma_1(t)=\gamma(t_k)+\dfrac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k}\times(\gamma(t_{k+1})-\gamma(t_k))$ $(0\leqslant k\leqslant m-1)$；显然，$\gamma_1$ 是一条路径，满足 $\gamma_1(a)=\gamma(a)$，$\gamma_1(b)=\gamma(b)$，又因 $\gamma_1([t_k,t_{k+1}])$ 含于以 $\gamma(t_k)$ 为中心 ρ 为半径的开球中，故 $\gamma_1(I)$ 含于 A 中. 然后定义 $\varphi(t,\xi)=\xi\gamma_1(t)+(1-\xi)\gamma(t)$；容易验证：对 $t_k\leqslant t\leqslant t_{k+1}$ 与 $0\leqslant\xi\leqslant 1$ $(0\leqslant k\leqslant m-1)$，$\varphi(t,\xi)$ 在以 $\gamma(t_k)$ 为中心、ρ 为半径的开球中；于是 φ 满足所要求的条件.

特别地，若 γ 是一闭路，则我们看到 φ 是 A 中 γ 到回路 γ_1 的闭路同伦.

现在考虑 $\mathbf{C}$ 中定义在 I 上的任意闭路 γ 与任意点 $a\notin\gamma(I)$. 因由(附录 1.1)，存在回路 γ_1，在 $\mathbf{C}-\{a\}$ 中同伦于 γ，所以可以定义指数 $j(a;\gamma)$ 等于 $j(a;\gamma_1)$，对任一条 $\mathbf{C}-\{a\}$ 中同伦于 γ

的回路 γ_1; 据 Cauchy 定理(9.6.3)，这与在 $\boldsymbol{C}-\{a\}$ 中同伦于 γ 的特殊的回路 γ_1 无关.

利用 (附录 1.1) 容易验证: 点关于闭路的指数与闭路的始点(9.6)无关，并且性质 (9.8.3), (9.8.5), (9.8.6) 与 (9.8.7) 当在它们的叙述中用"闭路"代换"回路"时仍然成立.

2. 单位圆中的本质映射

设 E 是距离空间. 我们称 E 到单位圆 U: $|z|=1$ 的连续映射 f 是**非本质的**，如果存在 E 到 $\boldsymbol{R}$ 的连续映射 g 使得对每个 $x\in E$ 都有 $f(x)=e^{ig(x)}$. E 到 U 的一连续映射 f 称为**本质的**，如果它不是非本质的.

(附录 2.1) 若 f_1, f_2 都是 E 到 U 的非本质映射，则 f_1f_2 与 $1/f_1=\bar{f}_1$ 也是非本质的: 若 f_1 是本质的而 f_2 是非本质的，则 f_1f_2 与 f_1/f_2 都是本质的.

(附录 2.2) 若 f 是 E 到 U 的非本质映射，g 是距离空间 F 到 E 的连续映射，则 $f\circ g$ 是非本质的.

这些性质都是定义的直接的结果.

(附录 2.3) 距离空间 E 到 U 的任意连续映射 f，只要 $f(E)\neq U$，就是非本质的.

设 $\zeta_0\in U-f(E)$. 存在 $\alpha\in\boldsymbol{R}$，使 $\zeta_0=e^{i\alpha}$，并且 $t\to e^{it}$ 在开区间 $]\alpha,\alpha+2\pi[$ 上的限制是该区间到 $U-\{\zeta_0\}$ 上的一个同胚(9.5.7); 若 ψ 是其逆同胚，则对每个 $x\in E$ 都有 $f(x)=e^{i\psi(f(x))}$，证完.

(附录 2.4) 若 f_1, f_2 是距离空间 E 到 U 的两个连续映射并使得对任意 $x\in E$ 都有 $f_1(x)\neq -f_2(x)$，又若 f_1 是本质的(相应地，非本质的)，则 f_2 也是本质的(相应地，非本质的).

因为 $f=f_1/f_2$ 是 E 到 U 的连续映射且不取 -1，于是据 (附录 2.3) 它是非本质的.

(附录 2.5) 设 E 是一紧距离空间，$I=[0,1]$，f 是 $E\times I$ 到 U

的连续映射．若映射 $x\to f(x,0)$ 是本质的(相应地，非本质的)，则映射$x\to f(x,1)$ 也是本质的(相应地，非本质的)．

因 f 在 $E\times I$ 上是一致连续的 (3.16.5)，故存在整数 $n\geqslant 1$ 使得只要 $|s-t|\leqslant 1/n$ 就有 $|f(x,s)-f(x,t)|\leqslant 1$ 对任意 $x\in E$ 成立．设对 $0\leqslant k\leqslant n$, $f_k(x)=f\left(x,\frac{k}{n}\right)$；因而对于任意 $x\in E$ 与 $0\leqslant k\leqslant n-1$ 有 $|f_k(x)-f_{k+1}(x)|\leqslant 1$，又因对 $x\in E$ 有 $|f_k(x)|=|f_{k+1}(x)|=1$，故对 $x\in E$ 得 $f_k(x)\neq -f_{k+1}(x)$．于是由(附录 2.4)得到结果．

(附录 2.6) ($\boldsymbol{R}^n$ 中)一闭球到 U 的任何连续映射 f 都是非本质的．

设 E 是球 $d(x,a)\leqslant r$，并定义 $g(x,t)=f(a+t(x-a))$；则 g 在 $E\times[0,1]$ 中是连续的，并且 $g(x,1)=f(x)$, $g(x,0)=f(a)$；因为 $x\to g(x,0)$ 是非本质的(附录 2.3)，所以据(附录 2.5) f 也是非本质的．

(附录 2.7) 设 A,B 是距离空间 E 的两个闭子集，并且 $E=A\cup B$ 与 $A\cap B$ 是连通的．设 f 是 E 到 U 的连续映射；若 f 到 A 与 B 上的限制都是非本质的，则 f 也是非本质的．

据假设，存在 A 与 B 到 $\boldsymbol{R}$ 的连续映射 g,h 使得在 A 中 $f(x)=e^{ig(x)}$，在 B 中 $f(x)=e^{ih(x)}$．因此对 $x\in A\cap B$，有 $e^{ig(x)}=e^{ih(x)}$，于是据 (9.5.5)，$(g(x)-h(x))/2\pi$ 是一整数；但因 $g-h$ 在连通集 $A\cap B$ 中是连续的，故由(3.19.7)，这蕴含 $g-h$ 在 $A\cap B$ 中是常数 $2n\pi$．设在 A 中 $u(x)=g(x)$，在 B 中 $u(x)=h(x)+2n\pi$，那么显然在 E 中 $f(x)=e^{iu(x)}$，又因 g 与 $h+2n\pi$ 在 $A\cap B$ 中重合，故 u 在 E 中是连续的，证完．

(附录 2.8) 要 U 到它自身的连续映射 f 为本质的，其充要条件是：对于闭路 γ: $t\to f(e^{it})(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 有 $j(0;\gamma)\neq 0$．

据 (9.8.1)，可令 $f(e^{it})=e^{i\psi(t)}$，其中 ψ 在 $[0,2\pi]$ 上是连续的，并且，由 (9.5.5)，$\psi(2\pi)-\psi(0)=2n\pi$，n 是指数 $j(0;\gamma)$．设 $\omega(t,\xi)=\psi(t)+\xi(nt+\psi(0)-\psi(t))$；若对于 $\zeta=e^{it}(0<$

$t < 2\pi$) 与 $0 \leqslant \xi \leqslant 1$ 设 $g(\zeta, \xi) = e^{i\omega(t,\xi)}$，则：据 (9.5.7)，$g$ 在 $(U - \{1\}) \times [0, 1]$ 中是连续的，又因对任意 ξ 有 $e^{i\omega(2\pi,\xi)} = e^{i\omega(0,\xi)} = f(1)$，故 g 可连续开拓到 $U \times [0,1]$ 上．因此，据(附录 2.5)，只要对映射 $f: \zeta \to \zeta^n$ 证明该定理就行了．显然，对 $n = 0$，f 是非本质的．假设 $n \neq 0$，用反证法证明：f 不能是非本质的．若不然，则存在 U 到 $\boldsymbol{R}$ 的非常数连续映射 h 使得在 U 中 $\zeta^n = e^{ih(\zeta)}$．因 $h(U)$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的紧的(3.17.9)与连通的((9.5.8) 以及 (3.19.7))子集，所以 $h(U)$ 是一紧区间 $[a,b]$，其中 $a<b$(3.19.1)．设 $\zeta_0 \in U$ 使得 $h(\zeta_0) = a$．因此有 $\zeta_0^n = e^{ia}$；存在 ζ_0 在 U 中的邻域 V 使得 h 在 V 中的振幅(3.14)$<\pi$；另一方面，把 (9.5.7) 应用到区间 $]a - \pi/n, a + \pi/n[$ 上，就可证明：存在点 $\zeta \in V$ 使得 $\zeta^n = e^{i(a-\varepsilon)}$，其中 $\varepsilon > 0$ 充分小．据 (9.5.5)，$h(\zeta) - (a - \varepsilon)$ 是 2π 的一个整倍数，V 的选取蕴含这个倍数，在 $\varepsilon < \pi$ 时，只能是 0．但这与 a 的定义矛盾．

(附录 2.9) U 到它自身的恒等映射 $\zeta \to \zeta$ 是本质的．

3. 平面的分割

在距离空间 E 中，我们称 E 的子集 A **隔离** $E-A$ 的两点 x, y，如果 x 与 y 在 $E - A$ 中的连通分支 (3.19)互不相同．我们说 A **分割** E(或者是 E 的一个分割线)，如果 $E - A$ 是不连通的．

对 $\boldsymbol{C}$ 中满足 $a \neq b$ 的任意两点 a, b，设 $s_{a,b}(z)$ 是定义在 $\boldsymbol{C} - \{b\}$ 中的函数 $z \to (z - a)/(z - b)$；容易验证 $s_{a,b}$ 是 $\boldsymbol{C} - \{b\}$ 到 $\boldsymbol{C} - \{1\}$ 上的一个同胚．

(附录 3.1) (Eilenberg 判别准则) 设 H 是 $\boldsymbol{C}$ 的紧子集；要 H 隔离 $\boldsymbol{C} - H$ 的两个不同点 a, b，其充要条件是：H 到 U 的映射 $z \to s_{a,b}(z)/|s_{a,b}(z)|$ 是本质的．

a) 充分性．假设 a 与 b 在 $\boldsymbol{C} - H$ 的同一个连通分支 A 中．因 $\boldsymbol{C} - H$ 在 $\boldsymbol{C}$ 中是开的且 $\boldsymbol{C}$ 是局部连通的 ((3.19.1) 与 (3.20.16))，故 A 在 $\boldsymbol{C}$ 中是开的 (3.19.5)．据 (9.7.2) 存在 A 中

的线路 $t\to\gamma(t)$，定义在 $I=[0,1]$ 上，并满足 $\gamma(0)=a$，$\gamma(1)=b$. 因对 t 的任何值，$\gamma(t)\notin H$，所以映射 $(z,t)\to f(z,t)=s_{a,\gamma(t)}(z)/|s_{a,\gamma(t)}(z)|$ 在 $H\times I$ 中是连续的，并且 $f(z,0)=1$，$f(z,1)=s_{a,b}(z)/|s_{a,b}(z)|$；于是结果由(附录 2.5)推得.

b) 必要性. 设 H 隔离 a 与 b. 设 A 是 $\mathbf{C}-H$ 中包含 a 的连通分支；A 在 $\mathbf{C}$ 中是开的并且它所有的边缘点都在 H 中（它们不会在 $\mathbf{C}-H$ 的另一个连通分支中，否则 A 将与那个开连通分支有公共点）(3.8)；因而 $A\cup H$ 是在 $\mathbf{C}$ 中闭的，因为 $b\notin A\cup H$，故有 $d(b,A\cup H)>0$. 设 A'，H' 是 A，H 在 $\mathbf{C}-\{b\}$ 到 $\mathbf{C}-\{1\}$ 上的同胚 $z\to s_{a,b}(z)$ 下的象；则 H' 是紧的，而 A' 是 $\mathbf{C}-H'$ 的一连通开子集，它有界并包含 0. 此外，A' 在 $\mathbf{C}$ 中的边界点都是 $H'\cup\{1\}$ 的点(可能有 1)；因此 $\overline{A}'$ 是紧的，$\overline{A}'\cup H'$ 也是紧的. 又若 1 属于 A' 的边缘，这就意味着 A 是无界的，因而 A 在它与包含 H 的球的外部的公共部分中有点；但因这个外部是连通的(9.8.4)，故据连通分支的定义(3.19)，它含于 A 中. 这表明：存在一个以 1 为中心的球 V，使得 $V-\{1\}\subset A'$，于是 1 不是 $\mathbf{C}-\overline{A}'$ 的边界点，这证明 $\mathbf{C}-\overline{A}'$ 的边界完全含于 H' 中. 我们必得证明：H' 到 U 的映射 $u\to u/|u|$ 是本质的(附录 2.2). 假设不然；那么将存在 H' 到 $\mathbf{R}$ 的连续映射 f 使得对 $u\in H'$ 有 $u/|u|=e^{if(u)}$. 据 Tietze-Urysohn 定理(4.5.1)，f 可以开拓成 $\overline{A}'\cup H'$ 到 $\mathbf{R}$ 的连续映射 g. 用下面的方法定义 $\mathbf{C}$ 到 U 的映射 h：对 $u\in\mathbf{C}-\overline{A}'$ 取 $h(u)=u/|u|$，对 $u\in\overline{A}'$ 取 $h(u)=e^{ig(u)}$；由 g 的定义立即推得 h 在 $\mathbf{C}$ 中是连续的. 设 $r>0$ 使 $\overline{A}'$ 含于球 B：$|z|\leqslant r$ 中；则 h 在 B 上的限制是非本质的(附录 2.6)，因此 h 到 S：$|z|<r$ 上的限制也是非本质的. 但是 U 到它自身的恒等映射 $\zeta\to\zeta$ 可以写成 $h_1\circ g_1$，这里 h_1 是 S 到 U 的映射 $z\to z/|z|$，g_1 是 U 到 S 的映射 $\zeta\to r\zeta$. 而 h_1 就是 h 在 S 上的限制，因而是非本质的，故 $h_1\circ g_1$ 是非本质的(附录 2.2)，这违背了(附录 2.9).

(附录 3.2) (Janiszewski 定理) 设 A，B 是 $\mathbf{C}$ 的两个紧子集，a，b 是 $\mathbf{C}-(A\cup B)$ 的两个不同点. 若 A 与 B 都不隔离 a 与 b，并

若 $A\cap B$ 是连通的，则 $A\cup B$ 也不隔离 a 与 b.

由假设与(附录 3.1)推知：$z\to s_{a,b}(z)/|s_{a,b}(z)|$ 在 A 与 B 上的限制都是非本质的；据(附录 2.7)该映射在 $A\cup B$ 上的限制也是非本质的，于是结论由(附录 3.1)得出.

4. 简单弧与简单闭曲线

$\mathbf{C}$ 中定义在 $I=[\alpha,\beta]$ 上的单射线路 $t\to\gamma(t)$ 也叫做一**简单线路**；$\mathbf{C}$ 的子集称为**简单弧**，如果它是一简单线路上点集 $\gamma(I)$. 在 I 上定义的闭路 γ 称为**简单闭路**，如果对于 I 的任一对不同点 (s,t)，只要其中有一个不是 I 的端点，就有 $\gamma(s)\neq\gamma(t)$. $\mathbf{C}$ 的子集称为**简单闭曲线**，如果它是一简单闭路上的点集. 等价的定义是：一条简单弧是同胚于[0,1]的一个子集，而一条简单闭曲线是同胚于单位圆 U (9.5.7) 的一个子集.

(附录 4.1)　一简单弧在 $\mathbf{C}$ 中的余是连通的(换句话说，一简单弧不分割平面).

设 γ 是定义在 I 上的一简单线路，并设 f 是 $\gamma(I)$ 到 I 上的连续映射，与 γ 互逆. 设 a,b 是 $\mathbf{C}-\gamma(I)$ 的任意两个不同的点. 据(附录 3.1)，我们必得证明：$z\to s_{a,b}(z)/|s_{a,b}(z)|$ 在 $\gamma(I)$ 上的限制 φ 是非本质的. 但是可以写成 $\varphi=(\varphi\circ\gamma)\circ f$；而 I 到 U 的连续映射 $\varphi\circ\gamma$ 是非本质的((附录 2.6))，因此据(附录 2.2) φ 也是非本质的.

(附录 4.2)　(Jordan 曲线定理)　设 H 是 $\mathbf{C}$ 中一简单闭曲线. 那么：

a) $\mathbf{C}-H$ 恰好有两个连通分支，其中之一是有界的而另一个是无界的.

b) $\mathbf{C}-H$ 的每一个连通分支的边缘都是 H.

c) 若 γ 是定义在 I 上的一简单闭路，满足 $\gamma(I)=H$，那么，若 x 在 $\mathbf{C}-H$ 的无界连通分支中，则 $j(x;\gamma)=0$；若 x 在 $\mathbf{C}-H$ 的有界连通分支中，则 $j(x;\gamma)=\pm1$.

证明分作几步完成.

(附录 4.2.1) 首先，我们在对 $\mathbf{C}-H$ 的连通分支的个数不作任何假设的情况下证明 b). 设 A 是 $\mathbf{C}-H$ 的一连通分支;因 $\mathbf{C}-H$ 是开的，象在(附录 3.1)中那样，我们看到，A 的边缘含于 H 中，设 $z\in H$，并设 f 是 U 到 H 上的一个同胚. 又设 $\zeta=e^{i\theta}\in U$ 使 $f(\zeta)=z$. 设 W 是 z 在 $\mathbf{C}$ 中的任意一个开邻域，$V\subset W$ 是以 z 为中心的闭球; 那么存在满足 $0<\omega<\pi$ 的数 ω，使 $f(e^{it})\in V$ 对 $\theta-\omega<t<\theta+\omega$ 成立; 设 J 是该区间在 $t\to f(e^{it})$ 下的象; 则 J 在 H 中的余集 L 是紧区间 $[\theta+\omega-2\pi,\ \theta-\omega]$ 在 $t\to f(e^{it})$ 下的象 (9.5.7)，并且，据 (9.5.7)，它是一简单弧. 由(附录 4.1)推出: 开集 $\mathbf{C}-L\supset\mathbf{C}-H$ 是连通的. 因此，由 (9.7.2)，对任意 $x\in A\subset\mathbf{C}-L$，存在 $\mathbf{C}-L$ 中的一条线路 γ，定义在 $I=[a,b]$ 上，并满足 $\gamma(a)=x$，$\gamma(b)=z$. 集合 $\gamma(I)\cap\bar{J}$ 是紧的并含于 V 中; 设 M 是它在 γ 下的逆象，则 M 是 I 的紧子集并使 $a\notin M$; 令 $c=\inf M>a$. 那么区间 $[a,c[$ 在 γ 下的象是一连通集 P ((3.19.7)与(3.19.1))，它既不与 J 也不与 L 相交，从而含于 $\mathbf{C}-(J\cup L)=\mathbf{C}-H$ 中;因为 P 包含 x，所以按定义它含于 A 中. 但当 $t<c$ 而趋于 c 时，$\gamma(t)\in A$ 趋于 $\gamma(c)\in V$，于是当 $c-t$ 充分小时，就有 $\gamma(t)\in W$; 这表明 $z\in\bar{A}$，证完.

(附录 4.2.2) 其次，我们在 H 包含一条具有不同端点的线段 S 的附加假设下证明这个定理: 把同胚 $z\to\lambda z+\mu$ 应用到 $\mathbf{C}$ 上，总可假设 S 是实直线 $\mathbf{R}$ 的一区间 $[-a,a]$. 设 $\rho=d(0,H-S)\leqslant a$，并考虑开球 D: $|z|<r$，$r<\rho$; 则 $D\cap(\mathbf{C}-H)=D\cap(\mathbf{C}-S)$，并且显然 $D\cap(\mathbf{C}-S)$ 是下面两个集的并: D_1: $|z|<r$，$\mathscr{I}z>0$ 与 D_2: $|z|<r$，$\mathscr{I}z<0$，它们没有公共点. 可以直接验证: 连接 D_1 (相应地，D_2) 中两点的线段含于 D_1 (相应地，D_2) 中，于是由 (3.19.3) 得出 D_1，D_2 都是连通的. 另一方面，我们在 (附录4.2.1) 中看到: $\mathbf{C}-H$ 的每一个连通分支都与 D 相交，从而与 D_1 或 D_2 相交; 但若 $\mathbf{C}-H$ 的两个连通分支都与 D_1 (相应地，D_2) 相交，则它们必然是恒同的，因为 D_1 (相应地，D_2)

是连通的且含于 $\boldsymbol{C}-H$ 中(3.19.4). 这表明: $\boldsymbol{C}-H$ 最多有两个连通分支. 下面我们证明 $\boldsymbol{C}-H$ 是不连通的,因此它恰好有两个连通分支. 假设 $\boldsymbol{C}-H$ 是连通的,并设 $x\in D_1$, $y\in D_2$; 因为D是连通的,故 $\boldsymbol{C}-D$ 不隔离 x 与 y. 另一方面; 若 $\boldsymbol{C}-H$ 连通,则H不隔离 x 与 y. 但 $H\cap(\boldsymbol{C}-D)$是开区间 $]-r, r[$ 在H中的余集;因此,据(9.5.7),这个余集是一简单弧,从而是连通的. 根据 Janiszewski 定理(附录 3.2), 并集$H\cup(E-D)$ (其中E是其内域包含 H 的闭球) 也不隔离 x 与 y; 但这是荒谬的, 因为$H\cup(E-D)$在 $\boldsymbol{C}$ 中的余集就是 $D_1\cup D_2\cup(\boldsymbol{C}-E)$,而$D_1$, D_2 是没有公共点的开集,于是 $D_1\cup D_2$ 是不连通的.

因为H是紧的,它含于以 0 为中心的某球中,这个球在$\boldsymbol{C}$中的余集是连通的, 因而它含于 $\boldsymbol{C}-H$ 的一个连通分支中; 这表明这些连通分支中有一个A是无界的,而另一个B是有界的. 此外,很清楚, 当 $x\in A$ 时, $j(x, \gamma)=0$ (9.8.5). 另一方面, D_1 含于 $\boldsymbol{C}-H$ 的一个连通分支中, D_2含于另一个中; 因此, 只要证明: 对点 $x_1\in D_1$ 与一点 $x_2\in D_2$ 有 $j(x_1;\gamma)-j(x_2;\gamma)=\pm 1$ (9.8.3)就够了. 假设γ的始点是 $a\in S$, 设 $J\subset I$ 是 $H-S$在γ下的逆象, 它是一紧区间 $[\alpha, \beta]$, 并设 γ_1 是定义在 J 上的线路 $t\to\gamma(t)$, 以$-a$ 与 a 为端点. 据(附录 1.1)存在 $\boldsymbol{C}-\bar{D}$ 中 γ_1 到路径 γ_2 的同伦 φ_1, 使得它定义在 $J\times[0,1]$ 中, 并满足对任意 ξ, $\varphi_1(\alpha,\xi)=\gamma(\alpha)$, $\varphi_1(\beta,\xi)=\gamma(\beta)$. 在 $I\times[0,1]$ 中定义φ如下: 在 $J\times[0,1]$ 中等于 φ_1, 而对任意 $(t,\xi)\in(I-J)\times[0,1]$ 它等于 $\gamma(t)$; 那么对 $x_1\in D_1$ (相应地, $x_2\in D_2$), φ 是 $C-\{x_1\}$ (相应地, $\boldsymbol{C}-\{x_2\}$) 中 γ 到回路 γ_3 的一个闭路同伦. 因此我们可以只就γ是定义在I上的具有下述性质的回路时, 证明 $j(x_1;\gamma)-j(x_2;\gamma)=\pm 1$:

1° $S\subset\gamma(I)$, 并且若T是逆象 $\gamma^{-1}(S)$, 则T是I的一区间而且γ在T上的限制是T到S上的一个同胚;

2° $\gamma(I-T)$ 含于 $\boldsymbol{C}-\bar{D}$ 中(注意, 这条新γ也可能不是简单闭路). 这时, 区间 $[-r, r]$ 在γ下的逆象是T的一个子区

间 $[\lambda, \mu]$；例如假设 $\gamma(\lambda) = -r$，$\gamma(\mu) = r$. 我们可以假设（只要用一个等价回路代替 γ 就行了）$\lambda = -\pi$，$\mu = 0$，最后假设 $-r$ 是 γ 的始点，从而使 $I = [-\pi, \omega]$，$\omega > 0$. 取 $x_1 = i\xi$，$x_2 = -i\xi$，$0 < \xi < r$；设 σ 是路径 $t \to \gamma(t)$，$-\pi \leqslant t \leqslant 0$，$\delta_2$ 是路径 $t \to re^{it}$，$-\pi \leqslant t \leqslant 0$，$\delta_1$ 是路径 $t \to re^{-it}$，$-\pi \leqslant t \leqslant 0$. 那么，把 Cauchy 定理应用到星形域 (9.7.1) 的半平面 $\mathscr{I}(z) < \xi$（相应地，$\mathscr{I}(z) > -\xi$）上，便得到

$$\int_\sigma \frac{dz}{z - i\xi} = \int_{\delta_2} \frac{dz}{z - i\xi} \text{ 与 } \int_\sigma \frac{dz}{z + i\xi} = \int_{\delta_1} \frac{dz}{z + i\xi}.$$

于是

$$2\pi i(j(x_1;\gamma) - j(x_2;\gamma)) = \int_{\delta_2} \frac{dz}{z - i\xi} - \int_{\delta_1} \frac{dz}{z + i\xi} + \int_0^\omega \frac{2i\xi\gamma'(t)\,dt}{(\gamma(t))^2 + \xi^2}.$$

因为上式的左边与 ξ 无关，而右边当 ξ 趋于 0 时趋于 $2\pi i$，后者是利用当 $0 \leqslant t \leqslant \omega$ 时 $|\gamma(t)| \geqslant r$ 这一事实，以及利用中值定理（使控制最后的积分）与 (8.11.1) 推知的.

（附录 4.2.3） 现在我们转向 H 不包含端点不同的线段的情形. 设 a，b 是 H 的两个不同点，S 是以 a，b 为端点的线段；仍可假设 S 是 $\mathbf{R}$ 的一闭区间. 据假设，至少存在一点 $x \in S \cap (\mathbf{C} - H)$；设 J 是 x 在 $S \cap (\mathbf{C} - H)$ 中的连通分支，它是一开区间 $]y, z[$，因为 $S \cap (\mathbf{C} - H)$ 在 $\mathbf{R}$ 中是开的((3.19.1)与(3.19.5))；而且它的端点 y，z 都在 H 中. 设 g 是 H 到单位园 U 上的同胚，并设 $g(y) = e^{ic}$，$g(z) = e^{id}$，这里可设 $c < d < c + 2\pi$(9.5.7). 设 U_1，U_2 是简单弧，它们分别是 $c \leqslant t \leqslant d$ 与 $d \leqslant t \leqslant c + 2\pi$ 在 $t \to e^{it}$ 下的象，并设 H_1，H_2 是 U 到 H 上的 g 的逆同胚 f 下的象. 利用 (9.5.7)立即得知：存在 U_1（相应地，U_2）到闭区间 $\bar{J} = [y, z]$ 上的同胚 f_1（相应地，f_2），使得 $f_1(e^{ic}) = f_2(e^{ic}) = y$，$f_1(e^{id}) = f_2(e^{id}) = z$. 设 h_1（相应地，h_2）是 U 到 $\mathbf{C}$ 的映射，它在 U_1 上(相应地，在 U_2 上)等于 f，在 U_2 上等于 f_2（相应地，在 U_1 等于 f_1）；

J 的定义蕴含 h_1, h_2 分别是 U 到两个简单闭曲线 $G_1=H_1\cup J$, $G_2=H_2\cup J$ 上的同胚，G_1 与 G_2 都包含线段 $\bar{J}$. 设 $w\in H_1$ 不同于 y 与 z；则存在以 w 为中心的开球 D 不与紧集 G_2 相交. 据(附录 4.2.1)，$\mathbf{C}-G_1$ 的每一个连通分支都有 D 中的点；此外，若 w', w'' 是 D 中在 $\mathbf{C}-G_1$ 的同一个连通分支内的两点，则 w' 与 w'' 不被 G_1 隔离，它们也不被 G_2 隔离，因为它们属于 $D\subset\mathbf{C}-G_2$，而 D 是连通的. 又 $G_1\cap G_2=\bar{J}$ 是连通的，于是，根据 Jariszewski 定理(附录 3.2)，w' 与 w'' 也不被 $G_1\cup G_2$ 隔离，当然也不被 $H\subset G_1\cup G_2$ 隔离. 换句话说，w' 与 w'' 属于 $\mathbf{C}-H$ 的同一个连通分支. 但因 $\mathbf{C}-G_1$ 恰好有两个连通部分，并且据(附录 4.2.1)，$\mathbf{C}-H$ 的每一个连通分支都有 D 中的点，从而推出：$\mathbf{C}-H$ 最多有两个连通分支. 另一方面，由(附录 4.2.2)推出：在 D 中存在两点 w', w'' 被 G_1 隔离. 现在来证明它们也被 H 隔离. 否则，因为它们不被 G_2 隔离，并且 $G_2\cap H=H_2$ 是连通的，故它们也不被 $G_2\cup H\supset G_1$ 隔离(附录 3.2). 这与假设矛盾. 因此我们证明了：$\mathbf{C}-H$ 恰有两个连通分支；利用与(附录 4.2.2)中相同的论证可以证明这两个连通分支中的一个 A 是无界的，而另一个 B 是有界的.

最后，可以假设 y 是闭路 γ 的始点，并且，当 $I=[\alpha,\beta]$ 时，还可以假设 $H_1=\gamma([\alpha,\lambda])$, $H_2=\gamma([\lambda,\beta])$. 定义闭路 γ_1 与 γ_2 如下：对 $\alpha-1\leqslant t\leqslant\alpha$, $\gamma_1(t)=(t-\alpha+1)(y-z)+z$, 对 $\alpha\leqslant t\leqslant\lambda$, $\gamma_1(t)=\gamma(t)$；对 $\lambda\leqslant t\leqslant\beta$, $\gamma_2(t)=\gamma(t)$, 对 $\beta\leqslant t\leqslant\beta+1$, $\gamma_2(t)=y+(t-\beta)(z-y)$. 利用(附录 1.1)立即可验证：对任意一点 $x\notin G_1\cup G_2$，都有 $j(x;\gamma)=j(x;\gamma_1)+j(x;\gamma_2)$. 利用与上文有相同意义的 D，并且仍设 w', w'' 是 D 中被 G_1 隔离的两点；那么我们有 $j(w';\gamma_2)=j(w'';\gamma_2)$，因为 w' 与 w'' 不被 G_2 隔离(9.8.3)，又据(附录 4.2.2)，有 $j(w';\gamma_1)-j(w'';\gamma_1)=\pm1$. 由此推得 $j(w';\gamma)-j(w'';\gamma)=\pm1$, 证完.

(附录 4.3) 设 H 是 $\mathbf{C}$ 中的简单闭曲线，D 是 $\mathbf{C}-H$ 的有界连通分支. 那么，对 D 中的任意闭路 γ 与任意 $x\in H$ 都有 $j(x;\gamma)=0$.

设U是以x为中心的开球，与γ上的点集 $\gamma(I)$ 没有公共点. 在U中存在点 $z\in \mathbf{C}-(D\cup H)=\mathbf{C}-\bar{D}$ (附录 4.2)，又因U是连通的，所以 $j(x;\gamma)=j(z;\gamma)$ (9.8.3). 但对 $\mathbf{C}-H$ 的无界连通分支 $C-\bar{D}$ 中的所有点y，都有 $j(z;\gamma)=j(y;\gamma)$(9.8.3)；此外，存在点 $y\in \mathbf{C}-\bar{D}$，它们是包含 $\gamma(I)$ 的闭球的外点；对于这种点，有 $j(y;\gamma)=0$(9.8.5)，于是得到结果.

问　　题

1) 设A是$\mathbf{C}$的一连通开子集；试证：对A的任意两点a, b, 存在含于A中并以a与b为端点的简单线路γ且其点的集是一条折线 (5.1 节，问题 4；这等于说γ是逐段线性的). (利用与(9.7.2)中类似的论证. 若"正方形" $Q=I\times I\subset A$ (I 是闭区间，在 $\mathbf{R}$ 中有非空的内部)是这样的：$a\notin Q$，并且存在A中的定义在 $J\subset \mathbf{R}$ 上、以a为始点 $c\in Q$ 为终点的简单线路 $t\to\gamma_1(t)$. 那么考虑使 $\gamma_1(t_0)\in Q$ 的最小值 $t_0\in J$，并注意：以 $\gamma_1(t_0)$ 与Q中任一点为端点的线段含于Q中.)

2) 当只假设A与B是$\mathbf{C}$的闭子集时，即使 $A\cap B$ 是紧的(与连通的)，Janiszewski 定理仍真吗？试证：在下面两种情形下，该定理的陈述仍真：1° A, B是两个闭集，其中之一是紧的；2° A与B是无公共点的两个闭集(若c是充分靠近a的点，那么考虑映射 $z\to 1/(z-c)$ 与a, b, A与B在那个映射下的象.)

3) 对$\mathbf{C}$中任一简单闭曲线H，用 $\beta(H)$ 表示 $\mathbf{C}-H$ 的有界连通分支.

a) 设A是$\mathbf{C}$的一连通开子集，H是含于A中的一简单闭曲线. 试证：$A-H$ 恰好有两个连通分支，它们是A与 $\mathbf{C}-H$ 的连通分支的交(利用问题 2).

b) 更一般地，若 $H_i(1\leqslant i\leqslant r)$ 是含于A中的r条简单闭曲线，并且其中任何两条都没有公共点，那么，$\bigcup\limits_i H_i$ 在A中的余恰有 $r+1$ 个分支(对r使用归纳法).

c) 若 H, H' 是 $\mathbf{C}$ 中两个没有公共点的简单闭曲线，试证：或者 $\beta(H)\cap\beta(H')=\phi$，或者集 $\beta(H)$, $\beta(H')$ 之一的闭包含于另一个中. (注意：若 $H\subset\beta(H')$，则 $\mathbf{C}-H'$ 的无界分支与 $\beta(H)$ 无公共点，利用(3.19.9).)

d) 假设 $\mathbf{C}$ 的连通开子集 T 的边界是 r 个简单闭线 H_i $(1\leqslant i\leqslant r)$ 的并集，而且这些 H_i 中的任何两个都没有公共点. 试证：只存在两种可能性：1° T 是无界的，并且集 $\beta(H_i)$ 中的任何两个都没有公共点，它们的并集是 $\bar{T}$ 的余；2° 这些 H_i 中有一个，例如说 H_r，使得对 $1\leqslant i\leqslant r-1$，$\overline{\beta(H_i)}$ 都含于 $\beta(H_r)$ 中，并且这些 $\beta(H_i)$ $(1\leqslant i\leqslant r-1)$ 中的任何两个都没有公共点，而 T 是 $\overline{\beta(H_i)}$（对 $1\leqslant i\leqslant r-1$）的并集在 $\beta(H_r)$ 中的余. （若 γ_i 是一简单闭路，其点的集是 $H_i(1<i\leqslant r)$，那么注意：对于 $x\in T$，诸指数 $j(x;\gamma_i)$ 都是常数，而且其中至多有一个可以 $\neq 0$；否则，利用 c) 证明：这些 H_i 中至少有一个不含于 T 的边界中.）

4) 设 A 是 $\mathbf{C}$ 的有界连通开子集，并且使得对 A 中任意闭路 γ 与任意 $z\in\mathbf{C}-A$，都有 $j(z;\gamma)=0$.

a) 试证：对任意简单闭曲线 $H\subset A$，有界分支 $\beta(H)$ 含于 A 中. （注意：否则它将包含 $\mathbf{C}-A$ 的点，并利用(3.19.9)与 Jordan 曲线定理的 b) 部分.）

b) 设 $(z|z')$ 是平面 $\mathbf{C}=\mathbf{R}^2$ 中的 Euclid 纯量积 $xx'+yy'$（这里 $z=x+iy$, $z'=x'+iy'$）. 又设 P_0 由关系式 $|(z|1)|<\frac{1}{2}$, $|(z|e^{i\pi/3})|<\frac{1}{2}$, $|(z|e^{-i\pi/3})|<\frac{1}{2}$ 定义的开六边形，对任何数 $\alpha>0$，由 αP_0 通过形如 $\alpha(me^{i\pi/3}+n)$ 的平移（其中 m, n 是 z 中任意整数）所得所有六边形 αP_{mn} 的集，称为宽度是 α 的**六边形网**；集 αP_{mn}（相应地，$\alpha\bar{P}_{mn}$）称为网的**开格网**（相应地，**闭格网**）；αP_{mn} 的边界是六个线段（αP_{mn} 的边）的并，它的端点称为 αP_{mn} 的**顶点**；六边形格网的结点是此格网的所有顶点. 每个结点是三个格网的顶点，并且由此结点出发的三条边的其它端点称为它的相邻结点.

设 B 为六边形网的有限个闭格网的并. 试证，如果一个结点属于 $\mathrm{Fr}(B)$，则恰好有两个相邻的结点也属于 $\mathrm{Fr}(B)$；由此推证 $\mathrm{Fr}(B)$ 是有限个互不相交的简单闭曲线的并，其中每一个是此网的格网的边的并. （由 $\mathrm{Fr}(B)$ 中两个相邻结点 a_1, a_2 开始，并证明：可以用归纳法定义 $\mathrm{Fr}(B)$ 中结点的有限序列 (a_n)，使对每个 n，a_n 与 a_{n+1} 是相邻结点.）

c) 设 B 是宽为 α 的六边形网的有限个闭格网的并，使 $\mathrm{Fr}(B)$ 为简单闭曲线（此网的格网的边的并）. 设 a, b 是 $\mathrm{Fr}(B)$ 上的两个相邻结点；试证，存在 $B\times[0,1]$ 到 B 的连续映射 $(z,t)\to\varphi(z,t)$，使得：(1) $\varphi(z,0)=z$ 在 B 中成立；(2) 对每个 $t\in[0,1]$ 与端点为 a, b 的区间 S 上的每个 z，$\varphi(z,$

$t) = x$；(3) 对任何 $z \in B, \varphi(z,1) \subset S$.（对 B 中格网个数 N 用归纳法；考虑含于 $\mathrm{Fr}(B)$ 中的端点为 c, d 的边，使得 c 与 d 有相同的第一坐标，等于 $\mathrm{pr}_1(B)$ 的上确界，并使 d 在满足这样条件的 $\mathrm{Fr}(B)$ 的所有结点中具有最大第二坐标，而这些结点以上述上确界作为第一坐标. 试证，若 $N > 1$，$B = B_1 \cup P$，这里 P 是 B 中的唯一格网，它以 c 与 d 为顶点，B_1 是 $N-1$ 个格网的并，且有与 P 相同的一、二或三条边；考察各种可能性.）证明 B 的内部是单连通的.

d) 设 B 是宽为 α 的六边形网的所有闭格网的并，它们含于 A 中；取 α 足够小，使 B 非空. 设 D 为 B 的（开）连通分支之一；试证 $\mathrm{Fr}(D)$ 为简单闭曲线.（利用 a) 与问题 3) d)，去证明若 $\mathrm{Fr}(D)$ 是多于一个简单闭曲线的并，则有 A 中的简单闭路 γ 与点 $x \in \mathrm{Fr}(A)$，使得 $j(x;\gamma) = 1$.）

e) 推出结论：A 是单连通的，且是递增的单连通开集序列 (D_n) 的并集，而且这些 D_n 中的每一个都是一简单闭曲线之余集的有界分支（利用 c) 与d)）. 反之，这样的并集一定是单连通的.

f) 把 e) 的结果推广到 $\mathbf{C}$ 的任意单连通开子集上(对每个 n，考虑宽为 $1/n$ 六边形网的含于 A 与球 $B(0;n)$ 的交集中的闭六边形).

g) 设 A 是 $\mathbf{C}$ 的连通开子集，且使余集 $\mathbf{C} - A$ 没有有界分支；试证 A 是单连通的(利用(9.8.5)).

h) 试证，$\mathbf{C}$ 中单连通开集的有限交的任意连通分支是单连通的.

5) 试证：下列 $\mathbf{C}$ 的开子集是单连通的，但其边界不是简单闭曲线：

1° 满足 $0<x<1$，$-2<y<\sin(1/x)$ 的点 $x+iy$ 的集 A_1.

2° 满足 $-1<x<0$ 与 $-1<y<1$ 或者 $0 \leqslant x<1$ 与 $0<|y|<1$ 的点 $x+iy$ 的集 A_2.（在这两种情况下，定义一个递增的有界分支 $\beta(H_n)$ 的序列，其中 H_n 是简单闭曲线，使得 $\beta(H_n)$ 的并集是给定的开集. 要证明 $\mathrm{Fr}(A_1)$ 不同胚于 $\mathbf{U}$，可利用(3.19.1)证明它不是局部连通的；要证明 $\mathrm{Fr}(A_2)$ 同样的性质，可考虑点 $x=1$ 在这个集合中的余.）$\mathrm{Fr}(A_1)$ 与 $\mathrm{Fr}(A_2)$ 同胚吗?

6) 设 A 是 $\mathbf{C}$ 的一单连通开子集，且不同于 $\mathbf{C}$. 试证：A 的边界至少包含两个不同的点.（证明：若不然，则将有 $A = \mathbf{C} - \{a\}$，为证明 A 不可能有外点，可利用 (3.19.9) 与 $\mathbf{C} - \{a\}$ 连通这一事实；结论由 (9.8.4) 与 (9.8.7)推出.）

7) 设 γ 是定义在 $I = [0,2]$ 上的简单闭路，并设 $H = \gamma(I)$ 是对应的简单闭曲线. 设 α 是定义在 $I_2 = [1,2]$ 上的简单线路，并使：1° $\alpha(1) = \gamma(1)$，$\alpha(2) = \gamma(2) = \gamma(0)$；2° 对每个 $t \in]1,2[$，都有 $\alpha(t) \in \beta(H)$；设 $L =$

$\alpha(I_2)$. 在 I 上用下列条件定义简单闭路 γ_1, γ_2:

对 $0\leqslant t\leqslant 1$, $\gamma_1(t)=\gamma(t)$, 对 $1\leqslant t\leqslant 2$, $\gamma_1(t)=\alpha(t)$;

对 $0\leqslant t\leqslant 1$, $\gamma_2(t)=\alpha(2-t)$, 对 $1\leqslant t\leqslant 2$, $\gamma_2(t)=\gamma(t)$.

设 $H_1=\gamma_1(I)$, $H_2=\gamma_2(I)$.

a) 试证: 对不属于 $H_1\cup H_2$ 的任何 $x\in \boldsymbol{C}$, 都有 $j(x;\gamma)=j(x;\gamma_1)+j(x;\gamma_2)$ (利用(附录1.1)).

b) 试证: 存在点 $x_1\in\beta(H)$ 使 $j(x_1;\gamma_1)=0$, 并存在点 $x_2\in\beta(H)$ 使 $j(x_2;\gamma_2)=0$ (利用 Jordan 曲线定理(附录 4.2)的 b)).

c) 由 a) 与 b) 推证: $\beta(H)$ 是 $\beta(H_1)$, $\beta(H_2)$ 与 $L\cap\beta(H)$ 的并集,而且这三个集中的任何两个都没有公共点.

8) a) 设 H 是一简单闭曲线, $L_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 是 n 个简单弧,它们的端点在 H 上,而不是端点的点都在 $\beta(H)$ 中. 再假设 L_k 的任何两个都没有属于 $\beta(H)$ 的公共点. 那么 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} L_k$ 在 $\overline{\beta(H)}$ 中之余集的内部有 $n+1$ 个连通分支,而且其中每一个都是 C 中一简单闭曲线之余的有界分支.(对 n 使用归纳法,并利用问题 7.)

b) 设 H_1, H_2 是 $\boldsymbol{C}$ 中两个简单闭曲线,并且 $H_1\cap H_2$ 是有限的. 试证: $\beta(H_1)\cap\beta(H_2)$ 的每个连通分支都是一简单闭曲线在 $\boldsymbol{C}$ 中之余的有界分支(利用 a)).

9) 设 γ 是 $\boldsymbol{C}$ 中定义在 $I=[-1,1]$ 上的简单闭路,设 $H=\gamma(I)$, 并设(为简便起见) $\gamma(0)=0$ 以及 H 的直径 >2. 归纳地定义两个递减趋于 0 的数列 (α_n) 与 (ρ_n), 使得: $\rho_1=1$, α_n 是这样的正的最大数: 对 $|t|<\alpha_n$, 有 $|\gamma(t)|<\rho_n$, 而 $\rho_{n+1}=\operatorname{int}\left(\frac{1}{n+1},\ \delta_n\right)$,其中 δ_n 是 0 到使 $|t|\geqslant\alpha_n$ 的点集 $\gamma(t)$ 的距离.

a) 试证: 若 x, x' 是 $\beta(H)$ 的两个点, 满足 $|x|<\rho_{n+1}$ 与 $|x'|<\rho_{n+1}$, 那么存在以 x, x' 为端点的线路, 含于 $\beta(H)$ 与以 0 为中心 ρ_n 为半径的闭圆盘的交中.(设 L 是以 z, z' 为端点的含于 $\beta(H)$ 中的一简单折线 (问题 1). 首先假设: 以 x, x' 为端点的线段 S 与 L 没有异于 x, x' 的公共点; 那么 $R=L\cup S$ 是一简单闭曲线. 试证: 若 $t\in I$ 满足 $\gamma(t)\in\beta(R)$, 则 $|t|<\alpha_n$.注意交集 $R\cap H$ 含于 S 中,并证明: 若存在 $t\in I$ 满足 $\gamma(t)\in\beta(R)$ 与 $|t|\geqslant\alpha_n$, 则存在另一个 $t'\in I$ 使 $\gamma(t')\in S$ 且 $|t'|\geqslant\alpha_n$, 这违背了 ρ_{n+1} 的定义. 在这种情况下,结论可推出如下: 取 $\beta(R)$ 与以 0 为中心、ρ_n 为半

径的开圆盘之交的这样的连通分支：它包含任意靠近 S 的点，并把问题 8b）应用到这个分支的边界上．在一般情形，即 L 与 S 有三个以上公共点的情形，可对这些点的个数使用归纳法．）

b）试证：对任一点 $x\in\beta(H)$，总存在一条以 0 与 x 为端点的简单弧，它的不等于 0 的点都在 $\beta(H)$ 中．（"Schoenflies 定理"．考虑 $\beta(H)$ 中满足 $|z_n|<\rho_{n+1}$ 的点列 (z_n)，并把 a）应用到这个点列的两个相邻点上．）

第十章 存在定理

当然，在数学中有很多种类型的存在定理，而本章仅讨论与完备空间概念有关的那一种；粗略地说，最直观的结果(10.1.3)表明，在 Banach 空间中，当一点邻域内的一附加项引起恒同映射的“轻微”扰动时，在该点附近它仍然保持同胚性. “轻微”一词应作确切了解，它意味着比仅作扰动函数“微小性”的假设更多一些(参看10.2，问题 2)，即还应对该函数的变化速率作一限制，一般指的是“Lipschitz”条件. 作为推论，这种类型定理应用的自然范围包括这样一些方程：其中给定函数的导数的某些限制是已知的；而且按这样方式所获得的存在定理是局部性的. 在下一章中，我们将遇到不同类型的存在定理，它们可应用于大范围问题.

10.1 节中一般存在定理的主要应用是：1°隐函数定理(10.2.1)与它的一些推论，把有限维空间中的常秩连续可微映射(局部地)化为典则形式的秩定理(10.3.1)；2° 常微分方程的 Cauchy 存在定理(10.4.5)以及它们的各种改进与推论；这两个定理都是经典与近代分析中最有用的工具之一. 当然，本章与下一章所论及微分方程的那些内容，仅是该领域广阔理论中很少的一部分；它的其它部分将在第二十三章第二十五章中讨论；对此方向有进一步要求的读者可参考 Coddington-Levinson[9]，Ince[12] 与 Kamke[14] 的著作.

作为最后的应用，我们给出 Frobenius 定理(10.9.4)的证明，如我们所述，它是 Cauchy 存在定理向多元函数的自然推广；通常以更为几何的方式来阐述它，作为在每点有一给定“切空间”的那些流形的存在定理. 我们将在第十八章中讨论它.

不言而喻，我们照例对向量值函数表示了所有结果，因而，例如，我们实际上从来不说方程“组”；人们决不需要考虑多于 1 个的方程，至少对于一般定理的证明是这样，这正是我们的“几何”观点

的优点之一。

1. 逐次逼近法

如第九章一样，K 表示实数或复数域，且每当作出一个有关 Banach 空间的结果而没有指明 K 时，都理解为所有所考虑的 Banach 空间都是在同一域上的.

(10.1.1) 设 E, F 是两个 Banach 空间, U (相应地, V)是空间 E (相应地, F)中以 0 为中心, α (相应地, β)为半径的开球. 设 v 是 $U \times V$ 到 F 中的一连续映射，使 $\|v(x, y_1) - v(x, y_2)\| \leqslant k \cdot \|y_1 - y_2\|$ 对 $x \in U$, $y_1 \in V$, $y_2 \in V$ 成立,这里 k 是满足 $0 \leqslant k < 1$ 的常数. 则若对任意的 $x \in U$ 有 $\|v(x, 0)\| < \beta(1 - k)$, 就必存在 U 到 V 中的唯一映射 f, 使

(10.1.1.1)
$$f(x) = v(x, f(x))$$

对任意 $x \in U$ 成立;且 f 在 U 中连续.

对任意 $x \in U$, 我们将证明，存在 V 中的点列 (y_n), 使对任意 $n \geqslant 1$ 有 $y_0 = 0$, $y_n = v(x, y_{n-1})$. 我们必须指出,若当 $1 \leqslant p \leqslant n$ 时 y_p 已被确定且在 V 中，则 $v(x, y_n) \in V$. 但是，对 $2 \leqslant p \leqslant n$, 我们有 $y_p - y_{p-1} = v(x, y_{p-1}) - v(x, y_{p-2})$, 于是 $\|y_p - y_{p-1}\| \leqslant k\|y_{p-1} - y_{p-2}\|$, 再对 p 用归纳法就得到 $\|y_p - y_{p-1}\| \leqslant k^{p-1}\|y_1\|$. 故

(10.1.1.2)
$$\|y_p\| \leqslant (1 + k + k^2 + \cdots + k^{p-1})\|y_1\| \leqslant \|y_1\|/(1 - k) < \beta,$$

于是我们的论断得证. 此外,对 n 用归纳法,可得 $y_n = f_n(x)$, 这里 f_n 是 U 到 V 中的连续映射(3.11.5). 进而,对 $x \in U$ 我们有

$$\|f_n(x) - f_{n-1}(x)\| \leqslant k^{n-1}\beta(1 - k),$$

因此级数 $(f_n - f_{n-1})$ 在 $\mathscr{B}_F(U)$ 中依范数收敛;因 F 是完备的，所以级数 $(f_n(x) - f_{n-1}(x))$ 对任意 $x \in U$ 是收敛的，并且若 f 是它的和,则 f 在 U 中连续(7.2.1); 此外，把不等式扩张原理应用于(10.1.1.2), 知

$$\|f(x)\| \leqslant \|v(x, 0)\|/(1-k) < \beta$$

对任意 $x \in U$ 成立，因此 f 是U到V中的映射．在关系式 $f_n(x)=v(x, f_{n-1}(x))$ 中取极限，对每个 $x \in U$ 我们得到(10.1.1.1)．最后，设 g 是U到V中的另一映射，而使 $g(x)=v(x, g(x))$ 对任意 $x \in U$ 成立，则从该关系式与(10.1.1.1)我们有

$$\|g(x)-f(x)\| = \|v(x, g(x)) - v(x, f(x))\| \leqslant k \cdot \|g(x)-f(x)\|,$$

因 $k<1$，这就蕴含了 $g(x)=f(x)$．

(10.1.2) (不动点定理)设F是一 Banach 空间，V是F中以 y_0 为中心β为半径的开球．设v是V到F中的映射，使对V中任意点对 y_1，y_2，有 $\|v(y_1)-v(y_2)\| \leqslant k \cdot \|y_1-y_2\|$，这里$k$是满足 $0 \leqslant k < 1$ 的常数．则若 $\|v(y_0)-y_0\| < \beta(1-k)$，就必有且仅有一个点 $z \in V$，使 $z=v(z)$．

只要注意到v在V中是连续的，并应用(10.1.1)于映射 $(x, y) \to v(y+y_0)-y_0$，它是与x无关的．

(10.1.3) 设F是一 Banach 空间，V是F中以0为中心、β为半径的开球．设 w 是 V 到 F 中的映射，使对V中任意点对，有 $\|w(y_1)-w(y_2)\| \leqslant k \cdot \|y_1-y_2\|$，其中$k$为常数，且 $0 \leqslant k < 1$．则若 $\|w(0)\| < \frac{1}{2}\beta(1-k)$，就必存在0的一开邻域 $W \subset V$，使映射 $y \to g(y) = y + w(y)$ 在W上的限制是W到0在F中一开邻域上的同胚．

我们应用(10.1.1)于 $E=F$，U是以0为中心，$\alpha=\beta(1-k)-\|w(0)\|$ 为半径的开球，而映射取为 $(x, y) \to v(x, y) = x - w(y)$；这样，(10.1.1)的条件满足，因此存在$U$到$V$中的一个连续映射 f，使 $f(x) = x - w(f(x))$，换句话说，对 $x \in U$，有 $g(f(x)) = x$．为证明 f 是U到 $f(U)$ 上的同胚，我们只须证明 g 是V到 $g(V)$ 中的单射(很清楚，因 f 是U中的单射)；但关系式 $g(y_1)=g(y_2)$ 蕴含

$$\|y_1-y_2\| = \|w(y_1)-w(y_2)\| \leqslant k\|y_1-y_2\|,$$

因此，由于 $k<1$ 得出 $y_1=y_2$. 于是 g 是 $W=f(U)$ 到 U 上的同胚，且是 f 的逆；又因 U 在 F 中是开的，故 $W=g^{-1}(U)$ 在 F 中是开的 (3.11.4). 最后我们有 $0\in W$，因为该条件等价于 $g(0)\in U$，并且这表示 $\|w(0)\|<\alpha$，而它等价于 $\|w(0)\|<\frac{1}{2}\beta(1-k)$.

问　　题

1) 设 A 是紧距离空间，d 是 A 上的距离，v 是 A 到自身中的映射，使对 A 中不同点的每一点对 (x,y)，有 $d(v(x),\ v(y))<d(x,y)$. 试证存在一点 $x\in A$，使 $v(x)=x$.（用反证法，考虑数 $c=\inf\limits_{x\in A}d(x,v(x))$，并证明存在一点 $y\in A$ 使 $d(y,v(y))=c$.）

2) 设 B 是 Banach 空间 (c_0) 中的球 $\|x\|\leqslant 1$（§ 5.3，问题 5）. 设 u 是 (c_0) 到自身中的连续线性映射，满足 $u(e_n)=\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)e_{n+1}(n\geqslant 0)$，且设 $v(x)=\frac{1}{2}(1+\|x\|)e_0+u(x)$. 证明 v 是 B 到自身的连续映射，使对 B 中不同点的任意点对 $(x,\ y)$，有 $\|v(x)-v(y)\|<\|x-y\|$，但是，不存在点 $x\in B$，使 $v(x)=x$（用不等式 $\prod\limits_{i=1}^{n}(1-\alpha_i)\geqslant 1-\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i$ 对 $0\leqslant\alpha_i\leqslant 1$）.

3) 设 E，F 是两个赋范向量空间，u 是 E 到 F 的子空间 $u(E)$ 上的线性同胚；设 v: $u(E)\to E$ 是 u 的逆映射，且令 $m=\|v\|$.

a) 设 A 是 E 的开子集，w 是 A 到 F 中的映射，使对 A 中的 x_1，x_2 有 $\|w(x_1)-w(x_2)\|\leqslant k\|x_1-x_2\|$. 试证：若常数 k 满足 $km<1$，则 $x\to f(x)=u(x)+w(x)$ 是 A 到 $f(A)$ 上的同胚. 若再假设 E 与 F 是 Banach 空间，且 $u(E)=F$，试证：$f(A)$ 是 F 的开子集(利用(10.1.3)).

b) 设 w 是 E 到 F 中的连续线性映射，使 $\|w\|<1/m$. 试证：f 是 E 到 $f(E)$ 上的线性同胚. 进而，对任意 $y_0\in u(E)$，且 $\|y_0\|=1$，试证存在 $y\in f(E)$，使 $\|y-y_0\|\leqslant m\|w\|$；反之，对任意 $y\in f(E)$ 且 $\|y\|=1$，试证存在 $y_0\in u(E)$ 使 $\|y-y_0\|\leqslant m\|w\|/(1-m\|w\|)$.

4) 设 E，F 是赋范空间，u 是 E 到 F 中的连续线性映射，使得 $N=u^{-1}(0)$

是有限维子空间，且存在N的一个闭拓扑余M(5.4)，使u在M上的限制是到$u(M)=u(E)$上的同胚．若w是E到F中的连续线性映射，试证：若$\|w\|$足够小，且$f=u+w$，则$f^{-1}(0)$是有限维的，至多等于$u^{-1}(0)$的维数，并且存在$f^{-1}(0)$的拓扑余P，使f在P上的限制是到$f(P)=f(E)$上的同胚(用问题 3b))．

5) 设E是 Banach 空间，F是赋范空间，u是E到$u(E)$上的线性同胚，使在F中存在$u(E)$的拓扑余Q．试证：若w是E到F中的连续线性映射，并有足够小的范数$\|w\|$，且$f=u+w$，则Q仍然是$f(E)$在F中的拓扑余．(利用问题 3，证明F到$u(E)$上的射影，限制在$f(E)$，当$\|w\|$足够小时，是到$u(E)$上的线性同胚)．

6) 设E，F是两个 Banach 空间，u是E到F中的连续线性映射，使$N=u^{-1}(0)$有有限维数p，且有拓扑余M而使u在M上的限制是到$u(M)=u(E)$上的同胚．又设$u(E)$在F中有有限余维数q．若w是E到F中的连续线性映射，试证：若$\|w\|$足够小，则$f=u+w$使$f^{-1}(0)$的维数r满足不等式$p-q\leqslant r\leqslant p$，且$f(E)$在$F$中的余维数等于$q-p+r$．(用问题 4 与 5 以及(5.9.3)．)

7) 设$I=[0,1]$，且设P是 Banach 空间$\mathscr{C}_R(I)$ (7.2)的子空间，$\mathscr{C}_R(I)$由实系数多项式$x(t)$在I上的限制所组成．在赋范空间P中，设u是恒同映射$x\to x$，且设w是一线性映射，它对每个限制在I的多项式$x(t)$有一限制在I的多项式$x(t^2)$与之对应．对任意的ε，$0<\varepsilon<1$，证明：线性映射$f=u+\varepsilon w$是P到子空间$f(P)$上的线性同胚，但$f(P)$在P中的余维数是无限的(与问题 6 相比较)．

8) 设E，F是两个 Banach 空间，u是E到F中的连续线性映射，使$u(E)=F$，且存在数$m>0$，使对任意$y\in F$，有一个$x\in E$，满足$u(x)=y$与$\|x\|\leqslant m\|y\|$(12.16.10)．又设w是一开球$U=B(a,r)\subset E$到F中的连续映射，使$\|w(x_1)-w(x_2)\|\leqslant k\|x_1-x_2\|$对$U$中的$x_1$，$x_2$成立．试证：若$k$与$\|w(a)\|$足够小，则连续映射$x\to f(x)=u(x)+w(x)$使$f(U)$包含以$u(a)$为心的一开球(用与(10.1.1)的证明相同的方法)．

9) 设E，F，U，V与v满足(10.1.1)的假设．又设φ是U到自身的连续映射，使对任意$x\in U$，有$\|\varphi(x)\|\leqslant\|x\|$．试证(在对$x\in U$成立$\|v(x,0)\|<\beta(1-k)$的条件下)存在$U$到$V$中的唯一映射$f$，使

$$f(x)=v(x,f(\varphi(x)))，$$

且f在U中是连续的．

推广到形如

$$f(x)=v(x,f(\varphi_1(x)),\cdots,f(\varphi_p(x)))$$

的方程.

10) 设 E, F, U, V 与(10.1.1)中有相同的意义. 假设 $U\times V$ 到 F 中的连续映射满足下列条件: 1° $\|v(x,y_1)-v(x,y_2)\|\leqslant c(\|x\|^{2\mu}+\|y_1\|^{2\mu}+\|y_2\|^{2\mu})\|y_1-y_2\|$; 2° $\|v(x,0)\|\leqslant c\|x\|^{1+2\mu}$, 其中 c 与 μ 是大于 0 的常数. 设 λ 是 K 中的一元素,且 $|\lambda|>1$. 最后, 设 $x\to L(x)$ 是 E 到 F 中的连续线性映射,且设 $x\to\varphi(x)$ 是 U 到自身的连续映射,使 $\|\varphi(x)\|\leqslant\|x\|$. 试证: 存在 0 的邻域 $W\subset U$ 到 V 中的一映射 f, 具有下述性质: 1° 在 W 中, f 满足方程

$$f(x)-\lambda f\left(\frac{x}{\lambda}\right)=v(x,f(\varphi(x)));$$

2° $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)-L(x))/\|x\|=0$. 进而, 具有这些性质的任意两个映射在 0 的邻域内相合(化问题为 $L(x)=0$ 的情形. 注意到,若 f 满足前述条件,则在 0 的邻域内必定有

$$(*)\qquad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n v\left(\frac{x}{\lambda^n},f\left(\varphi\left(\frac{x}{\lambda^n}\right)\right)\right),$$

这里级数在 0 的邻域内依范数收敛. 则可用(10.1.1)的方法去证明在 0 的充分小邻域内(*)的解的存在性; 对 n 用归纳法,证明存在一个 $r>0$, 使对 $\|x\|\leqslant r$, 有 $\|f_n(x)\|\leqslant\|x\|^{1+\mu}$ 与 $\|f_n(x)-f_{n-1}(x)\|\leqslant\|x\|^{1+n\mu}$) .

11) a) 设 $F(x_1,\cdots,x_p,y)$ 是 K^{p+1} 中的整函数,使在等于 $F(x_1,\cdots,x_p,y)$ 的幂级数中,所有的单项式的总次数$\geqslant 2$. 设 φ 是 K^p 到自身的线性映射,使对任意 $x=(x_1,\cdots,x_p)\in K^p$, 有 $\|\varphi(x)\|\leqslant c\|x\|$, 其中 $0\leqslant c<1$; 最后,设 $L(x)$ 是 K^p 上的任一个线性型. 试证: 方程

$$f(x)-\lambda f(x/\lambda)=F(x,f(\varphi(x)))\qquad(|\lambda|>1)$$

有唯一解 f, 它在 0 的邻域内有定义,且 $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)-L(x))/\|x\|=0$. 进而,这个解是 K^p 中的整函数. (在 0 的邻域内应用问题 10; 化问题为 $K=\boldsymbol{C}$ 的情形,且应用(9.12.1)与(9.4.2)去证明 f 是一整函数.)

b) 试证: 定义在 $\boldsymbol{R}$ 中 0 的邻域内的方程 $f(x)-\lambda f(x/\lambda)=x$ $(\lambda>1)$ 没有解,其中 $f(x)/x$ 在 0 的邻域内是有界的.

12) 设 $I=[0,a]$, $H=[-b,b]$, 并设 f 是 $I\times H$ 中的实值连续函数; 令 $M=\sup\limits_{(x,y)\in I\times H}|f(x,y)|$, 且 $J=[0,\inf(a,b/M)]$.

a) 对任意 $x\in J$，设 $E(x)$ 是满足 $y=xf(x,y)$ 的 $y\in H$ 的集. 试证 $E(x)$ 是非空闭集；若 $g_1(x)=\inf(E(x))$，$g_2(x)=\sup(E(x))$，试证 $g_1(0)=g_2(0)=0$，且 $\lim_{x\to 0,x>0} g_1(x)/x=\lim_{x\to 0,x>0} g_2(x)/x=f(0,0)$. 若在 J 中 $g_1=g_2=g$，则 g 是连续的(参看 3.20 节,问题 5).

b) 假定 $a=b=1$；设 E 是线段族 S_n: $x=1/2^n$, $1/4^{n+1}\leqslant y\leqslant 1/4^n$ $(n\geqslant 0)$，S'_n: $y=1/4^n$, $1/2^n\leqslant x\leqslant 1/2^{n-1}$ $(n\geqslant 1)$ 与点(0,0)的并. 定义如下函数 $f(x,y)$:

$$f(0,y)=0,$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(\dfrac{y}{x}+d((x,y),E)\right)^+, & \text{对 } 1/2^n<x\leqslant 1/2^{n-1} \text{ 与 } y\leqslant 1/4^n,\\ \dfrac{y}{x}-d((x,y),E), & \text{对 } 1/2^n\leqslant x\leqslant 1/2^{n-1} \text{ 与 } 1/4^n\leqslant y\leqslant x^2,\\ x-d((x,x^2),E), & \text{对 } 1/2^n<x\leqslant 1/2^{n-1} \text{ 与 } y\geqslant x^2,\end{cases}$$

其中 $n\geqslant 1$. 试证 f 是连续的，但不存在这样的函数 g，它在 I 中 0 的邻域内连续且在此邻域内 $g(x)=xf(x,g(x))$.

c) 设 u_0 是 J 到 H 中的连续映射，且对 $n\geqslant 1$ 归纳地定义 $u_n(x)=xf(x,u_{n-1}(x))$；其中 u_n 是 J 到 H 中的连续映射. 使用 a) 的记号，设在区间 $[0,c]\subset J$，对每个 x，$\lim_{n\to\infty}(u_{n+1}(x)-u_n(x))=0$，且 $g_1(x)=g_2(x)$；试证 $\lim_{n\to\infty}u_n(x)=g_1(x)$ 对 $0\leqslant x\leqslant c$ 成立. 应用该准则于下述两种情形：1° 存在 $k>0$ 使 $|f(x,z_1)-f(x,z_2)|\leqslant k|z_1-z_2|$ 对 $x\in I$, $z_1,z_2\in H$ 成立(参看 (10.1.1))；2° 对 $0<x\leqslant\gamma\leqslant a$ 与 $z_1,z_2\in H$，有 $|f(x,z_1)-f(x,z_2)|<|z_1-z_2|/x$.

d) 当 f 如 b) 那样定义时，对每个 $x\in I$，序列 $(u_n(x))$ 收敛于一个不连续的极限.

e) 取 $a=b=1$，设

$$f(x,y)=\begin{cases}y/x, & \text{对} 0<x\leqslant 1,\ |y|\leqslant x^2,\\ x, & \text{对} 0\leqslant x\leqslant 1,\ y\geqslant x^2,\\ -x, & \text{对} 0\leqslant x\leqslant 1,\ y\leqslant -x^2.\end{cases}$$

试证 I 中任一满足 $|g(x)|\leqslant x^2$ 的连续函数 g 是 $g(x)=xf(x,g(x))$ 的解，尽管对 $0<x\leqslant 1$, $z_1,z_2\in H$，有 $|f(x,z_1)-f(x,z_2)|\leqslant\dfrac{|z_1-z_2|}{x}$；对任选的 u_0，序列 (u_n) 一致收敛于这样的解.

f) 定义 f 如 e) 中那样，且设 $f_1(x,y)=-f(x,y)$. 试证：0 是方程

$g(x)=xf_1(x, g(x))$ 的唯一解，但存在连续函数 u_0，使序列 $(u_n(x))$ 对每个 $x\neq 0$ 都不收敛，尽管当 $z_1, z_2\in H$ 时，对 $0<x\leqslant 1$ 成立 $|f_1(x, z_1)-f_1(x,z_2)|\leqslant|z_1-z_2|/x$.

13）用 $\boldsymbol{R}^2$ 中以(0,0)为中心的圆盘代替 H，推广练习 12a) 与 12c)的结果(用 10.2 节的问题 3 的结果).

2. 隐 函 数

(10.2.1)（隐函数定理） 设 E, F, G 是三个 Banach 空间，f 是 $E\times F$ 的开子集 A 到 G 中的连续可微映射(8.9). 设 (x_0, y_0) 是 A 中的一点，它使 $f(x_0, y_0)=0$ 且使偏导数 $D_2f(x_0, y_0)$ 是 F 到 G 上的线性同胚. 则存在 x_0 在 E 中的一开邻域 U_0，使对 x_0 的每个含于 U_0 中的连通开邻域 U，有 U 到 F 中的唯一连续映射 u，满足 $u(x_0)=y_0$，$(x, u(x))\in A$ 与 $f(x, u(x))=0$ 对任意 $x\in U$ 成立. 进而，u 在 U 中连续可微，且其导数由

(10.2.1.1) $$u'(x)=-(D_2f(x,u(x)))^{-1}\circ(D_1f(x,u(x)))$$

给出.

设 T_0 是 F 到 G 上的线性同胚 $D_2f(x_0, y_0)$，T_0^{-1} 是逆线性同胚；记关系式 $f(x, y)=0$ 为如下等价形式：

(10.2.1.2) $$y=y-T_0^{-1}\cdot f(x, y),$$

且记(10.2.1.2)的右边为 $g(x, y)$. 我们将证明：对 $E\times F$ 到 F 中的映射

$$(x', y')\to g(x_0+x', y_0+y')-y_0$$

在 (0, 0) 的充分小的邻域中应用 (10.1.1) 是可能的. 因由定义 $T_0^{-1}\circ T_0=1$，对 A 中的 (x, y_1) 与 (x,y_2)，我们可以写出

$$g(x,y_1)-g(x,y_2)=T_0^{-1}\cdot(D_2f(x_0,y_0)\cdot(y_1-y_2)$$
$$-(f(x,y_1)-f(x,y_2))).$$

设 $\varepsilon>0$ 满足 $\varepsilon\|T_0^{-1}\|\leqslant 1/2$；因 f 在 A 中连续可微，从(8.6.2)与(8.9.1)得知，在 E 中(相应地，F 中) 存在以 x_0(相应地，y_0) 为中心，α(相应地，β) 为半径的球 U_0(相应地，V_0)，使对 $x\in U_0$，

$y_1 \in V_0$, $y_2 \in V_0$ 有

$$\|f(x, y_1) - f(x, y_2) - D_2 f(x_0, y_0)\cdot(y_1 - y_2)\|$$
$$\leqslant \varepsilon\|y_1 - y_2\|;$$

从而对任意 $x \in U_0$, $y_1 \in V_0$, $y_2 \in V_0$, 得到

$$\|g(x, y_1) - g(x, y_2)\| \leqslant \varepsilon\|T_0^{-1}\|\cdot\|y_1 - y_2\|$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\|y_1 - y_2\|.$$

另一方面, $g(x, y_0) - y_0 = -T_0^{-1}\cdot f(x, y_0)$; 由于 $f(x_0, y_0) = 0$ 与 f 的连续性, 我们可以假定 ε 已取得足够小, 使对 $x \in U_0$ 有 $\|g(x, y_0) - y_0\| \leqslant \beta/2$. 于是可以应用(10.1.1), 得出 U_0 到 V_0 中的映射 u 的存在与唯一性,并对每个 $x \in U_0$ 满足 $f(x, u(x)) = 0$; 因 $f(x_0, y_0) = 0$, 特别有 $u(x_0) = y_0$; 最后 u 在 U_0 中是连续的.

其次,我们证明,若 $U \subset U_0$ 是 x_0 的连通开邻域, 则 u 是 U 到 F 中的唯一连续映射,使 $u(x_0) = y_0$, $(x, u(x)) \in A$ 且 $f(x, u(x)) = 0$. 设 v 是满足这些条件的第二个映射,且考虑使 $u(x) = v(x)$ 的点 x 的子集 $M \subset U$.由定义,这个集包含 x_0 并且是闭的(3.15.1); 因此只须证明M是开的(3.19). 但由假设, $x \to D_2 f(x, u(x))$ 在 U_0 中连续,因此(如果必要的话, 用一个较小的邻域代替 U_0), 由(8.3.2), 我们可以假设, $D_2 f(x, u(x))$ 对于 $x \in U_0$ 而言, 是 F 到 G 上的线性同胚. 令 $a \in M$; 证明的第一部分指出, 对于满足 $b = u(a)$ 的 a 与 b, 分别存在 a 与 b 的开邻域 $U_a \subset U$, $V_a \subset V$, 使对任意 $x \in U_a$, $u(x)$ 是方程 $f(x, y) = 0$ 的唯一解 y, 而且 $y \in V_a$. 然而,因 v 在点 a 连续,且 $v(a) = u(a)$, 于是存在点 a 的含于 U_a 中的邻域 W, 而使对每个 $x \in W$, 有 $v(x) \in V_a$; 因此, 前面的附注指出,对 $x \in W$ 有 $v(x) = u(x)$, 这表明 M 是开的, 故在 U 中 $u = v$.

最后我们证明, u 在 U_0 中是连续可微的. 设 ε 已取得足够小. 对 U_0 中的 x 与 $x + s$, 我们记 $t = u(x + s) - u(x)$; 由假设 $f(x + s, u(x) + t) = 0$, 并且当 s 趋于 0 时, t 趋于 0. 因此对给定的 $x \in U_0$ 与任意的 $\delta > 0$, 存在 $r > 0$ 使关系式 $\|s\| \leqslant r$

蕴含

$$\|f(x+s,u(x)+t)-f(x,u(x))-S(x)\cdot s-T(x)\cdot t\|$$
$$\leqslant\delta(\|s\|+\|t\|),$$

其中 $S(x)=D_1f(x,u(x))$, $T(x)=D_2f(x,u(x))$ (8.9.1). 由定义,这就等价于

$$\|S(x)\cdot s+T(x)\cdot t\|\leqslant\delta(\|s\|+\|t\|),$$

且因 $T(x)$ 是 F 到 G 上的线性同胚,从上述关系就得

(10.2.1.3) $\|(T^{-1}(x)\circ S(x))\cdot s+t\|\leqslant\delta\|T^{-1}(x)\|(\|s\|+\|t\|)$.

设已取定 δ, 使满足 $\delta\|T^{-1}(x)\|\leqslant 1/2$; 于是, 如果我们令 $a=2\|T^{-1}(x)\circ S(x)\|+1$, 从(10.2.1.3)可推出

$$\|t\|-\frac{a-1}{2}\|s\|\leqslant\frac{1}{2}(\|t\|+\|s\|),$$

也就是 $\|t\|\leqslant a\|s\|$, 因此,当 $\|s\|\leqslant r$ 时,有

$$\|t+(T^{-1}(x)\circ S(x)\cdot s\|\leqslant\delta(a+1)\|T^{-1}(x)\|\cdot\|s\|.$$

由 t 的定义,这表明 u 在点 x 是可微的, 且导数由(10.2.1.1)给出. 利用(8.3.2)与(8.3.1), 于是公式(10.2.1.1)证明了 u 在 U_0 中是连续可微的.

我们明显地叙述(10.2.1)的最重要的情形, 即当 $E=K^m$, $F=G=K^n$ 为有限维空间的情形:

(10.2.2) 设 f_i 是在 $E\times F$ 中一点 $(a_1,\cdots,a_m,b_1,\cdots,b_n)$ 的邻域 $U\times V$ 内有定义并且连续可微的 n 个标量函数, 使对 $1\leqslant i\leqslant n$ 有 $f_i(a_1,\cdots,a_m,b_1,\cdots,b_n)=0$, 且 Jacobi 行列式 $\dfrac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(y_1,\cdots,y_n)}$ 在 $(a_1,\cdots,a_m,b_1,\cdots,b_n)$ 不为 0. 则存在 $(a_1,\cdots,a_m)$ 的开邻域 $W_0\subset U$, 使对 $(a_1,\cdots,a_m)$ 的任一连通开邻域 $W\subset W_0$, 有唯一的一组标量函数 $g_i(1\leqslant i\leqslant n)$, 定义于 W 中且连续, 满足 $g_i(a_1,\cdots,a_m)=b_i$, $1\leqslant i\leqslant n$; 并且对 $1\leqslant i\leqslant n$ 与任意的点 $(x_1,\cdots,x_m)\in W$ 有

$$f_i(x_1,\cdots,x_m,g_1(x_1,\cdots,x_m),\cdots,g_n(x_1,\cdots,x_m))=0.$$

此外,函数 g_i 在 W 中是连续可微的,且 Jacobi 矩阵 $(D_jg_i(x))$ 等

于 $-B^{-1}A$，其中 A（相应地，B）是在 Jacobi 矩阵 $(\partial f_i/\partial x_k)$（相应地，$(\partial f_i/\partial y_j)$）中用 $g_i(x_1, \cdots, x_m)$代替 $y_i(1 \leqslant i \leqslant n)$所得到的.

(10.2.3) 若(10.2.1)的假设满足，且再设 f 在 (x_0, y_0) 的邻域内 p 次连续可微，则 u 在 x_0 的某一邻域中是 p 次连续可微的.

关于 k 用归纳法，我们证明，对 $1 \leqslant k \leqslant p$，$u$ 是 k 次连续可微的；对 $k=1$，可从(10.2.1)得到，并且 $u'(x) = F(x, u(x))$，其中 $F(x, y) = -(D_2f(x, y))^{-1} \circ (D_1f(x, y))$，由(8.12.9)，(8.12.11)与(8.12.10)知它是 $p-1$ 次连续可微的．因此，由(8.12.10)，u' 是 $k-1$ 次连续可微的(对 $k \leqslant p$)，再由(8.12.5)，这就表示 u 是 k 次连续可微的.

(10.2.4) 设 E，F，G 是有限维的，且 f 在 A 中是解析的；则 u 在 x_0 的一邻域内是解析的.

如果标量域 K 是 $\boldsymbol{C}$，则由(10.2.1)与作为连续可微函数的解析函数的特征(9.10.1)，便得到所需结果．现在设 $K = \boldsymbol{R}$，$E = \boldsymbol{R}^m$，$F = G = \boldsymbol{R}^n$；则存在一开集 $B \subset \boldsymbol{C}^{m+n}$ 使 $B \cap \boldsymbol{R}^{m+n} = A$ 与由 B 到 $\boldsymbol{C}^n$ 中的一解析映射 g，它是 f 的开拓．把 D_2f 与 D_2g 用它们的 Jacobi 矩阵等同起来，就表明了 $D_2g(x_0, y_0)$ 把 $\boldsymbol{R}^n$ 在 $\boldsymbol{R}$ 上的基变换为 $\boldsymbol{R}^n$ 的基，并且这些基也是 $\boldsymbol{C}^n$ 在 $\boldsymbol{C}$ 上的基，因此，$D_2g(x_0, y_0)$ 是 $\boldsymbol{C}^n$ 到自身上的线性同胚．于是我们可以应用(10.2.1)于 g，它指出在 $\boldsymbol{C}^m$ 内 x_0 的一邻域 W 中存在解析映射 v，满足 $g(z, v(z)) = 0$ 与 $v(x_0) = y_0$．此外，从公式(10.2.1.1)对 $|\nu|$ 用归纳法得到：在 x_0 点的所有导数 $D^\nu v$ 把 $\boldsymbol{R}^m$ 映射到 $\boldsymbol{R}^n$ 中(因为 g 在 (x_0, y_0) 的所有导数等于 f 的相应导数)；因此，由(9.3.5.1)，v 把 x_0 在 $\boldsymbol{R}^m$ 内的一邻域 $W' \subset W \cap R^m$ 映射到空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中，并且(10.2.1)的唯一性部分证明了 v 在 $W \cap \boldsymbol{R}^m$ 上的限制是恒等于 u 的．证完.

(10.2.1) 的最重要的应用之一如下：

(10.2.5) 设 E，F 是两个 Banach 空间，f 是 $x_0 \in E$ 的一邻域 V 到 F 中的连续可微映射．若 $f'(x_0)$ 是 E 到 F 上的线性同胚，则存

在 x_0 的一开邻域 $U\subset V$，使 f 在 U 上的限制是 U 到 $y=f(x_0)$ 在 F 中一开邻域上的同胚．此外，若 f 在 U 内 p 次连续可微(相应地，在 U 内解析，E 与 F 是有限维的)，则 $f(U)$ 到 U 上的逆映射 g 在 $f(U)$ 中是 p 次连续可微的(相应地，是解析的)．

应用(10.2.1)于函数 $h(x, y)=f(x)-y$，交换 x 与 y 的位置；因 $D_1h(x_0, y_0)=f'(x_0)$，可得出：存在 F 中以 y_0 为中心的开球 W 与 W 到 E 中的连续映射 g，使 $g(W)\subset U$，$f(g(y))=y$ 在 W 中成立，且 $g(y_0)=x_0$；进而，由(10.2.3)(相应地，(10.2.4))，若 f 是 p 次连续可微的(相应地，是解析的)则 g 是 p 次连续可微的(相应地，是解析的)．由恒等式 $f(g(y))=y$ 可知，g 在 W 中是单射的，因此是 W 到 $U=g(W)\subset V$ 上的连续双映射；并且 $g(W)=f^{-1}(W)$ 在 E 中是开的，且 f 是 $U=g(W)$ 到 W 上的同胚，证完．

问　　题

1) 设 E，F 是两个 Banach 空间，A 是点 $x_0\in E$ 的开邻域，f 是 A 到 F 中的连续映射，它在 x_0 是可微的(但在 A 中其他点上并不一定如此)．设 $f'(x_0)$ 是 E 到它在 F 中的象集上的线性同胚；试证：存在 x_0 的一邻域 $U\subset A$，使对每个 $x\in U$ 且 $x\neq x_0$，有 $f(x)\neq f(x_0)$．(注意，假设条件表明，存在常数 $c>0$，使 $\|f'(x_0)\cdot s\|\geqslant c\|s\|$ 对所有 $s\in E$ 成立 (5.5.1)．)

2) 设 $f=(f_1, f_2)$ 是 R^2 到自身的映射，其中 $f_1(x_1,x_2)=x_1$；

$$f_2(x_1, x_2)=\begin{cases}x_2-x_1^2, & \text{对 } x_1^2\leqslant x_2,\\ (x_2^2-x_1^2x_2)/x_1^2, & \text{对 } 0\leqslant x_2\leqslant x_1^2,\\ -f_2(x_1,-x_2), & \text{对 } x_2\geqslant 0.\end{cases}$$

试证：f 在 R^2 中每一点处可微；在 $(0, 0)$ 点，Df 是 R^2 到自身上的恒等映射，但 Df 不连续．证明在 $(0,0)$ 的每一邻域内，存在一对不同的 x'，x''，使 $f(x')=f(x'')$ (与(10.2.5)比较)．

3) 设 B 是 R^2 中的单位圆盘 $|z|\leqslant 1$，且 $z\to f(z)=z+g(z)$ 是 B 到 R^2 中的连续映射，使对每个满足 $|z|=1$ 的 z 有 $|g(z)|<|z|$．试证 $f(B)$ 是 0 在 R^2 中的一邻域(平面的 Brouwer 定理参看第二十四章)．(设 γ 是定义在 $[0,2\pi]$ 中的闭路 $t\to f(e^{it})$，试证：对在 0 的邻域 V 中的所有点 x，成立 $j(x;\gamma)=1$．(参看(9.8.3)的证明)；用这样的事实：在 $f(B)$ 中，γ 是同伦

于 $f(0)$ 的，以推出 V 中没有点属于 $f(B)$ 的余集)。

4) 设 E, F 是两个 Banach 空间，B 是 E 中的单位开球 $\|x\|<1$；设 u_0 是 B 到 0 在 F 中一邻域上的连续可微同胚，使 $u_0(0)=0$；设 u_0^{-1} 在球 V_0: $\|y\|<r$ 内连续可微，$V_0\subset u_0(B)$，且 Du_0 在 B 中有界，Du_0^{-1} 在 V_0 中有界。又设 V 是球 $\|y\|<\beta$，满足 $\beta<r$。

a) 试证对任意 $\alpha<1$，在空间 $\mathscr{D}_F^{(1)}(B)$ 中(8.12节，问题8)存在 u_0 的邻域 H，使对任意 $u\in H$ 及 U: $\|x\|<\alpha$，u 在 U 上的限制是 U 到含于 V 中一开集 F 上的同胚，并使得 u^{-1} 在 V 上的限制是 V 到 E 中的连续可微映射 $\Phi(u)$(用(10.1.1))。

b) 试证：H 到 $\mathscr{D}_E^{(1)}(V)$ 中的映射 $u\longrightarrow\Phi(u)$ 在点 u_0 是可微的，并且它在 u_0 的导数是线性映射 $s\longrightarrow-(u_0'\circ\Phi(u_0))^{-1}\cdot(s\circ\Phi(u_0))$。

5) 设 E, F 是两个 Banach 空间，f 是 $x_0\in E$ 的邻域 V 到 F 中的连续可微映射。假设存在两个数 $\beta>0$, $\lambda>0$，使 1° $\|f(x_0)\|<\beta/2\lambda$; 2° 在球 U: $\|x-x_0\|<\beta$ 中，f' 的振幅 $\leqslant 1/2\lambda$; 3° 对每个 $x\in U$，$f'(x)$ 是 E 到 F 上的线性同胚，并满足 $\|(f'(x))^{-1}\|\leqslant\lambda$。设 (z_n) 为 U 中任一点列；试证：存在 U 中点列 $(x_n)_{n\geqslant 0}$，使对 $n\geqslant 0$ 有 $x_{n+1}=x_n-(f'(x_n))^{-1}\cdot f(x_n)$。又证明序列 (x_n) 收敛于一点 $y\in U$，而 y 是方程 $f(x)=0$ 在 U 中的唯一解。(Newton 近似法。用(8.6.2)对 n 作归纳法，证明 $\|x_n-x_{n-1}\|<2^{-n}\beta$ 与 $\|f(x_n)\|<\beta/2^{n+1}\lambda$。)

6) 设 E 与 F 是 K 上的两个有限维向量空间，A 是 E 中的连通开子集，f 是 $A\times F$ 到 F 中的连续可微映射。设 $(x,y)\in A\times F$ 并使 $f(x,y)=0$ 的点对 (x,y) 的集 Γ 非空，且对任意 $(x,y)\in\Gamma$，$D_2f(x,y)$ 是 F 到其自身的可逆线性映射。

a) 试证：对每个点 $(x_0,y_0)\in\Gamma$，存在该点在 Γ 中的一开邻域，使投影 pr_1 在 V 上的限制是 V 到含于 A 中并以 x_0 为中心的一开球上的同胚。(用如下事实：存在 A 中以 x_0 为中心的开球 U 与 F 中以 y_0 为中心的开球 W，使对每个 $x\in U$，方程 $f(x,y)=0$ 有唯一解 $y\in W$，并应用(10.2.1))。

b) 由 a) 推出：Γ 的每个连通分支 G (3.19) 在 Γ 中是开的，且 $\mathrm{pr}_1(G)$ 在 A 中是开的。$\mathrm{pr}_1(\Gamma)$ 并不一定等于 A (因为有例子 $A=E=F=\boldsymbol{R}$, $f(x,y)=xy^2-1$)；如果 $\mathrm{pr}_1(\Gamma)=A$，也不一定有 $\mathrm{pr}_1(G)=A$，其中 G 是 Γ 的每一连通分支 (因为有例子 $A=E=F=\boldsymbol{R}$, $f(x,y)=xy^2-y$)。试证：若 $\mathrm{pr}_2(\Gamma)$ 在 F 中有界，则对 Γ 的每一连通分支 G，有 $\mathrm{pr}_1(G)=A$。(若 x_0 是 $\mathrm{pr}_1(G)$ 在 A 中的聚点，先证存在 G 中一点列 (x_n,y_n)，使 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$

x_0 且在 F 中 $\lim_{n\to\infty} y_n$ 存在；然后应用a).）

c) A 中的线路，闭路，同伦与闭路同伦，都如 9.6 节那样定义，只要用 E 代替 $\boldsymbol{C}$，假设存在 Γ 的一连通分支 G，使 $\mathrm{pr}_1(G)=A$；若 γ 是 A 中一定义于 $I=[a,b]\subset\boldsymbol{R}$ 上的线路，试证：存在 I 到 G 中的连续映射 u，使对每个 $t\in I$，有 $\mathrm{pr}_1(u(t))=\gamma(t)$.（考虑这样的点 ξ 在 I 中的上确界 c，它使存在 $[a,\xi]$ 到 G 中的连续映射 u_ξ，有 $\mathrm{pr}_1(u_\xi(t))=\gamma(t)$ 对 $a\leqslant t\leqslant\xi$ 成立，并用a)）。这个映射总是唯一的吗？（考虑 $E=F=\boldsymbol{C}$，$A=\boldsymbol{C}-\{0\}$，$f(x,y)=y^2-x$.）证明：若 I 到 G 中的两个连续映射 u，v 使关系式 $\mathrm{pr}_1(u(t))=\mathrm{pr}_1(u(t))=\gamma(t)$ 对每个 $t\in I$ 成立，并且对 $t\in I$ 的一个值它们相等，则 $u=v$（用类似的方法）.

d) 在与c)同样假设下，设 φ 是 $I\times J$ 到 A 中的连续映射，其中 $J=[c,d]\subset\boldsymbol{R}$，又设 v 是 J 到 G 中的连续映射，满足 $\mathrm{pr}_1(v(\xi))=\varphi(a,\xi)$，其中 $\xi\in J$；并且对 $\xi\in J$，设 u_ξ 是 I 到 G 中的唯一连续映射，满足 $\mathrm{pr}_1(u_\xi(t))=\varphi(t,\xi)$，其中 $t\in I$，且 $u_\xi(a)=v(\xi)$. 试证：映射 $(t,\xi)\to u_\xi(t)$ 在 $I\times J$ 中连续.（给定 $\zeta\in J$，存在 $r>0$，使对任意 $t\in I$，Γ 与 $E\times F$ 中以 $u_\zeta(t)$ 为中心 r 为半径的闭球的交 V_t 是含于 G 中的，并使 pr_1 是 V_t 到 E 中以 $\gamma(t)$ 为中心 r 为半径的闭球上的同胚. 若 $L=u_\zeta(I)$，设 M 是 $\|(D_2f(x,y))^{-1}\circ(D_1f(x,y))\|$ 对所有与 L 的距离 $\leqslant r$ 的 $(x,y)\in G$ 所取的上确界. 再设 $\varepsilon>0$ 满足 $\varepsilon<r/4$ 与 $\varepsilon M<r/4$. 证明，若 δ 是使关系式 $|\xi-\zeta|\leqslant\delta$ 蕴含 $\|\varphi(t,\xi)-\varphi(t,\zeta)\|\leqslant\varepsilon$ 对 $t\in I$ 成立的正数，则关系式 $|\xi-\zeta|\leqslant\delta$ 蕴含 $\|u_\xi(t)-u_\zeta(t)\|<r/4$ 对 $t\in I$ 成立；为证这一点，可考虑使上述不等式成立的 $t\in I$ 的上确界，并用(10.2.1).）

e) 由d)推证，若定义在 $I=[a,b]$ 中的闭路 γ 是闭路同伦于 A 中一点的，则使 $t\in I$ 时成立 $\mathrm{pr}_1(u(t))=\gamma(t)$ 的 I 到 G 中的任一连续映射 u 满足 $u(b)=u(a)$. 特别地，若 A 是单连通的(即若 A 中任一闭路同伦于 A 中一点)，则 pr_1 是 G 到 A 上的同胚，即存在 A 到 F 中的唯一连续可微映射 g，使在 A 中成立 $f(x,g(x))=0$，其中 $(x,g(x))$ 属于 G 至少对一个 $x\in A$ 成立（参看 16.28.7）.

7) 用问题6的记号，试证：在下面每一种情形下，条件 $\mathrm{pr}_1(G)=A$ 对 Γ 的每个连通分支 G 都满足：

1° $f(x,y)=f_1(y)-f_2(x,y)$，且存在数 $R>0$，$k>0$，$h>0$ 与 A 中一正连续函数 $x\to H(x)$，使对 $\|y\|\geqslant R$ 有 $\|f_1(y)\|\geqslant\|y\|^k$ 与 $\|f_2(x,y)\|\leqslant$

$H(x)\|y\|^{k-h}$.

2° $F = \boldsymbol{C}$，E 是 $\boldsymbol{C}$ 上的向量空间，$f(x, y) = e^y - g(x)$，这里 g 在 A 中解析并且 $g(x) \neq 0$. （这最后的条件已经保证了 $\mathrm{pr}_1(\Gamma) = A$；注意，从 $f(x,y) = f(x,y')$ 可知 $y - y'$ 是 $2\pi i$ 的倍数，因此对任意 $x \in A$，存在 A 中以 x 为中心的开球 U，使得对 $\mathrm{pr}_1^{-1}(U) \cap \Gamma$ 的任一连通分支 V，pr_1 是 V 到 U 上的同胚；若 x 是 $\mathrm{pr}_1(G)$ 的触点，G 必与这些 V 中之一有一公共点，因此包含 V）.

8) a) 若 f 是 $\boldsymbol{C}^p$ 中的复值整函数，使对每个 $x \in \boldsymbol{C}^p$，有 $f(x) \neq 0$，试证：存在 $\boldsymbol{C}^p$ 中一个复值整函数 g，使 $f(x) = e^{g(x)}$（用问题 7）.

b) 设 f 是 $\boldsymbol{C}$ 中的任一复值整函数，且不恒等于 0；并有一个有限或无穷复数序列 $(a_n), n \geqslant 1$，满足 $|a_n| \leqslant |a_{n+1}|$，$f(a_n) = 0$，且对每个使 $f(c) = 0$ 的 $c \in \boldsymbol{C}$，$a_n = c$ 的指标 n 的数目等于阶 $\omega(c; f)$；当序列 (a_n) 是无穷时，$\lim\limits_{n \to \infty} |a_n| = +\infty$ (9.1.5). 试证：（用 9.12 节问题 1 的记号）存在一整函数 g，使

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_n}, n-1\right) \text{ (Weierstrass 分解).}$$

c) 设 $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ 是 $\boldsymbol{C}$ 中复值整函数，使得对任意 $z \in \boldsymbol{C}$，有 $f(z) \neq 0$. 假设存在数 $A > 0$，使得对任意 $n \geqslant 1$ 有 $|b_n| \leqslant A/n!$. 证明，必有 $f(z) = ae^{cz}$，其中 a 与 c 是常数（用 a)和 9.11 节的问题 2).

9) 设 A 与 B 是 0 在 $E = \boldsymbol{C}^p$ 中的两个开邻域，A 是连通的；又设 $(x,y) \to U(x, y)$ 是 $A \times B$ 到 $\mathscr{L}(E; E)$ 中的解析映射（与具有复元素 $p \times p$ 矩阵的空间等同）.

a) 设存在 A 到 B 中的解析映射序列 (u_n)，使在 A 中有 $u_0(x) = 0$ 与 $u_n(x) = U(x, u_{n-1}(x)) \cdot x$，$n \geqslant 1$. 再设对 A 的每个紧子集 L，u_n 在 L 上的限制形成 $\mathscr{C}_E(L)$ 的相对紧子集. 试证：序列 (u_n) 在 A 的任一紧子集中一致收敛于 A 到 B 中的一解析映射 v，在 A 中满足 $v(x) = U(x, v(x)) \cdot x$；并且 v 是满足该方程的唯一映射（用(10.2.1)与(9.13.2)）.

b) 设在 E 中，A 与 B 是以 0 为中心 a 与 b 为半径的开球. 又设 φ 是 $[0, a[\times [0, b[$ 到 $\boldsymbol{R}$ 中的连续映射，使 $\eta \to \varphi(\xi, \eta)$ 在 $[0, b[$ 中对每个 $\xi \in [0, a[$ 是增加的，并且 $\|U(x,y)\| \leqslant \varphi(\|x\|, \|y\|)$ 在 $A \times B$ 中成立. 再设存在 $[0, a[$ 到 $[0, b[$ 中的连续映射 θ，使 $\theta(\xi) = \varphi(\xi, \theta(\xi))\xi$ 在 $[0, a[$ 中成立. 试证：在这些假设下，存在 A 到 B 中的唯一解析映射 v，使在 A 中有 $v(x)$

$=U(x, v(x))\cdot x$，且 $\|v(x)\|\leqslant\theta(\|x\|)$（用 a)；关于 n 用归纳法证明映射 u_n 的存在性）.

c）假设 A 与 B 如 b）那样定义；设 $\psi(\eta)$ 是 $\|U(x, y)\|$ 对 $\|x\|<a$, $\|y\|<\eta$ 所取的下确界，其中 $\eta>0$，且 $\psi(0)=\psi(0+)$. 又设 $\psi(0)>0$，且函数 $\eta\to\eta/\psi(\eta)$ 在某个区间 $[0, r[$ 中递增，其中 $0<r\leqslant b$, $r/\psi(r-)\leqslant a$. 试证：存在以 0 为中心 $r/\psi(r-)$ 为半径的开球 P 到 B 中的唯一解析映射 v，使在 P 中成立 $v(x)=U(x, v(x))\cdot x$.

10）设 f, g 是两个复值解析函数，它们定义在以 $(0, 0)$ 为中心、a, b 为半径的闭多圆柱 $P\subset\mathbf{C}^2$ 的邻域中．设 M（相应地，N）是 $|f(x, y)|$ 对 $|x|=a$ 与 $|y|\leqslant b$ 所取的上确界（相应地，$|g(x, y)|$ 对 $|x|\leqslant a$ 与 $|y|=b$ 所取的上确界）．则存在两个唯一确定的函数 $u(s,t)$, $v(s, t)$，在 $|s|<a/M$ 与 $|t|<b/N$ 中解析，并使 $(u(s,t), v(s,t))\in P$ 对由前面不等式定义的多圆柱 Q 中的 (s, t) 成立，且在 Q 中有

$$u(s,t)-sf(u(s,t),v(s,t))=0 \text{ 与 } v(s,t)-tg(u(s, t),v(s, t))=0.$$

此外，设

$$\Delta(x,y,s,t)=\begin{vmatrix} 1-s\dfrac{\partial f}{\partial x} & -s\dfrac{\partial f}{\partial y} \\ -t\dfrac{\partial g}{\partial x} & 1-t\dfrac{\partial g}{\partial y}\end{vmatrix},$$

且设 $h(x, y, s, t)$ 是 $P\times Q$ 中的任意解析函数；试证：

$$\frac{h(u(s, t), v(s, t), s, t)}{\Delta(u(s,t), v(s, t), s, t)}=\sum_{m\geqslant 0,\ n\geqslant 0} c_{mn}s^m t^n$$

对 $(s,t)\in Q$ 成立，这里 c_{mn} 是函数

$$\frac{1}{m!n!}\ \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\partial y^n}\left[h(x,y,s,t)(f(x,y))^m(g(x, y))^n\right]$$

在 $x=y=0$ 的值，并且右边的级数在 Q 中收敛；注意，若 h 依赖于 s 与 t，则 c_{mn} 亦然．（“Lagrange 反演公式”．首先应用 Rouché 定理(9.17.3)于 $x-sf(x, y)$，视它为 x 的函数；由(10.2.4)，它定义一个解析函数 $w(s, y)$，满足 $w(s,y)-sf(w(s,y),y)=0$；其次，类似地应用 Rouché 定理于 $y-tg(w(s,y),y)$，视它为 y 的函数．最后，设 γ, δ 是 $\mathbf{C}$ 内的回路 $\theta\to ae^{i\theta}$, $\theta\to be^{i\theta}$ $(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$．考虑累次积分

$$\int_\delta dy\int_\gamma \frac{h(x, y, s, t)dx}{(x-sf(x,y))(y-tg(x, y))}.$$

一方面，重复使用残数定理(9.16.1)求上述积分值；另一方面，考虑 $(1-g)^{-1}$

$(1-\eta)^{-1}$ 的幂级数展式，其中用 $sf(x,y)/x$ 代替 ξ 而用 $tg(x,y)/y$ 代替 η)。

推广到任意个复变数的情形. 从对一个变量的反演公式，推导公式

$$h(u(s))=h(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s^n}{n!}D^{n-1}(h'(0)(f(0))^n),$$

这里 $u(s)-sf(u(s))=0$ 且 $|s|<a/M$，而 $M=\sup_{|x|\leqslant a}|f(x)|$，$h$ 对 $|x|<a$ 是解析的.

11) 用(10.2.1)的记号，我们只假定 f 在点 (x_0,y_0) 对第二个变量是强可微的(8.9 节，问题 7)，$f(x_0,y_0)=0$，且 $D_2f(x_0,y_0)$ 是 F 到 G 的线性同胚. 证明: 存在 x_0 在 E 中的开邻域 U_0 与 U_0 到 F 的连续映射 u，使得 $u(x_0)=y_0$，$(x,u(x))\in A$ 与 $f(x,u(x))=0$ 对任意 $x\in U_0$ 成立. 另外，如果 f 在点 (x_0,y_0) 对两个变量是强可微的，则 u 在点 x_0 是强可微的.

3. 秩 定 理

设 E，F 分别为 n 与 m 维的两个有限维向量空间，A 是 E 的开子集，f 是 A 到 F 中的连续可微映射. 线性映射 $f'(x)$ 在点 $x\in A$ 的秩是下述数 p 中的最大者: 在 $f'(x)$ 关于 E 与 F 的两个基的矩阵中，至少有一个 p 阶子式不为 0 (A.7.3). 因这些子式是 x 的连续函数，故若 $f'(x_0)$ 的秩是 p，则存在 x_0 的一邻域，在其中 $f'(x)$ 的秩至少是 p，但在该邻域中的每个点 $x\neq x_0$ 处，却可以大于 p，例如映射 $(x,y)\to(x^2-y^2,xy)$ 在点(0,0)就是如此.

(10.3.1) (秩定理) 设 E 是 n 维空间，F 是 m 维空间，A 是点 $a\in E$ 的邻域，f 是 A 到 F 中的连续可微映射(相应地，是 q 次连续可微映射，无限次可微映射，解析映射)使在 A 中 $f'(x)$ 的秩是常数 p. 则存在:

1° a 的一开邻域 $U\subset A$ 与 U 到 K^n 中单位球 I^n: $|x_i|<1$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ 上的同胚 u，且 u 及其逆均是连续可微的 (相应地，q 次连续可微的，无限次可微的，解析的);

2° $b=f(a)$ 的一开邻域 $V\supset f(U)$ 与 K^m 中单位球 I^m:

$|y_i| < 1$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ 到 V 上的同胚 v，且 v 及其逆均是连续可微的(相应地，q 次连续可微的，无限次可微的，解析的)；

——使 $f = v \circ f_0 \circ u$，其中 f_0 是 I^n 到 I^m 的映射 $(x_1, \cdots, x_n) \to (x_1, \cdots, x_p, 0, \cdots, 0)$.

我们只对连续可微映射情形证明，在其他情形证明的相应变形是明显的.

用映射 $x \to f(a + x) - b$ 代替 f，我们可以假设 $a = b = 0$. 设 M 是线性映射 $f'(0)$ 的核，它是 E 的 $(n-p)$ 维子空间，又设 N 是 M 在 E 中的 (p 维) 余集；我们取 n 个向量的组 $(c_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ 作为 E 的一个基，而使 $c_1, \cdots, c_p$ 构成 N 的基，$c_{p+1}, \cdots, c_n$ 构成 M 的基，并把任意的 $x \in E$ 记为 $x = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) c_i$，其中 φ_i 是线性型. 若 $e_1, \cdots, e_n$ 是 K^n 的典范基，我们用 $x \to G(x)$ 表示 E 到由 $e_i (i > p)$ 生成的 K^n 的子空间 K^{n-p} 上的线性映射 $x \to \sum_{i=p+1}^{n} \varphi_i(x) e_i$.

设 P 是 E (与 N) 关于线性映射 $f'(0)$ 的象；它是 F 的 p 维子空间，以元 $d_i = f'(0) \cdot c_i (1 \leqslant i \leqslant p)$ 为它的基；我们取 F 的一个基 $(d_j)_{1 \leqslant j \leqslant m}$，使 P 的上述基是其首 p 个元，并且对任意 $y \in F$，记 $y = \sum_{j=1}^{m} \psi_j(y) d_j$，其中 ψ_j 是线性型. 用 $y \to H(y)$ 表示 F 到由 $e_i (i \leqslant p)$ 生成的 K^n 的子空间 K^p 上的线性映射 $y \to \sum_{j=1}^{p} \psi_j(y) e_j$.

现在我们考虑 A 到 K^n 上的映射 $x \to g(x) = H(f(x)) + G(x)$，它是连续可微的. 此外，由(8.1.3)与(8.2.1)，对任意 $s \in E$，有 $g'(x) \cdot s = H(f'(x) \cdot s) + G(s)$，因此对 $1 \leqslant i \leqslant n$，$g'(0) \cdot c_i = e_i$ (即 $g'(0)$ 用关于基 (c_i) 与 (e_i) 的单位矩阵来表示). 由 (10.2.5) 可得：存在 0 的开邻域 $U_0 \subset A$，使 g 在 U_0 上的限制是 U_0 到 0 在 K^n 中一开邻域上的同胚，并且逆同胚 g^{-1} 在 $g(U_0)$ 中连续可微. 设 $r > 0$ 是使球 $|x_i| < r (1 \leqslant i \leqslant n)$ 含于 $g(U_0)$ 中的正数，而 U 是该球关于 g 在 U_0 上的限制的逆象，它是 0 的一开邻域；我们

的映射 u 将是映射 $x \to \frac{1}{r} g(x)$ 在 U 上的限制.

至此我们尚未用到假设条件 $f'(x)$ 的秩在 A 中为常数；这条件表明 E 关于 $f'(x)$ 的象 P_x 对任意 $x \in A$ 是 p 维的. 现在便可假设 U_0 已取得充分小，使对 $x \in U_0$，$g'(x)$ 是 E 到 K^n 上的双线性映射(8.3.2)；因对 $s \in N$ 我们有 $g'(x) \cdot s = H(f'(x) \cdot s)$，故 $f'(x)$ 在 N 上的限制必定是该 p 维空间到 P_x 上的双映射，且 H 在 P_x 上的限制是 P_x 到 K^p 上的双映射. 用 L_x 记 K^p 到 P_x 上的双映射，它是上述映射的逆；于是可得 $f'(x) = L_x \circ H \circ f'(x)$.

设 $E_1 = K^p$，$E_2 = K^{n-p}$，现在 K^n 可看作积 $E_1 \times E_2$；我们将证明 I^n 到 F 中的映射 $(z_1, z_2) \to f_1(z_1, z_2) = f(u^{-1}(z_1, z_2))$ 不依赖于 z_2，即在 I^n 中有 $D_2 f_1(z_1, z_2) = 0$ (8.6.1). 由定义，可写出

$$f(x) = f_1\left(\frac{1}{r} H(f(x)), \frac{1}{r} G(x)\right),$$

因此由 (8.9.2),

$$r f'(x) \cdot t = D_1 f_1\left(\frac{1}{r} H(f(x)), \frac{1}{r} G(x)\right) \cdot H(f'(x) \cdot t) + D_2 f_1\left(\frac{1}{r} H(f(x)), \frac{1}{r} G(x)\right) \cdot G(t)$$

对任意 $t \in E$ 成立. 从而得

(10.3.1.1) $$D_2 f_1\left(\frac{1}{r} H(f(x)), \frac{1}{r} G(x)\right) \cdot G(t) = S_x \cdot H(f'(x) \cdot t),$$

其中 $S_x = r L_x - D_1 f_1\left(\frac{1}{r} H(f(x)), \frac{1}{r} G(x)\right)$ 是 $K^p = E_1$ 到 F 中的线性映射. 我们证明对任意 $x \in U_0$ 有 $S_x = 0$. 事实上，若 $t \in N$，由定义有 $G(t) = 0$，因此据(10.3.1.1)，$S_x \cdot H(f'(x) \cdot t) = 0$. 但对 $x \in U_0$，$t \to H(f'(x) \cdot t) = g'(x) \cdot t$ 是 N 到 E_1 中的双映射，这就证明了 $S_x = 0$. 从 (10.3.1.1) 便得到对任意 $t \in E$，$D_2 f_1\left(\frac{1}{r} H(f(x)), \frac{1}{r} G(x)\right) \cdot G(t) = 0$；但 G 映 E 到 E_2 上，因此

由定义，E_2 到 F 中的线性映射 $D_2f_1\left(\frac{1}{r}H(f(x)),\frac{1}{r}G(x)\right)$ 对任意 $x\in U_0$ 都为 0．这样，据 $x\to\left(\frac{1}{r}H(f(x)),\frac{1}{r}G(x)\right)$ 是 U_0 到包含 I^n 的一开集上的同胚，便得关系式 $D_2f_1(z_1,z_2)=0$ 在 I^n 中成立．

现在可用 $f_1(z_1)$ 代替 $f_1(z_1,z_2)$，并把 f_1 看作 I^p 到 F 中的连续可微映射；于是对 $x\in U$，有 $f(x)=f_1\left(\frac{1}{r}H(f(x))\right)$，换句话说，对 $y\in f(U)$ 有 $y=f_1\left(\frac{1}{r}H(y)\right)$．这就证明了 $y\to\frac{1}{r}H(y)$ 是 $f(U)$ 到 $I^p\subset E_1$ 上的同胚，并且 $z_1\to f_1(z_1)$ 是逆同胚．

现把 K^m 看作积 $E_1\times E_3$，其中 $E_3=K^{m-p}$．设 T 是 E_3 到 P 在 F 中的补集 Q（由 $d_{p+1},\cdots,d_m$ 生成）上的双映射，它把 K^{m-p} 的典型基映射到 $d_{p+1},\cdots,d_m$．对 $z_1\in I^p$，$z_3\in I^{m-p}$，我们定义 $v(z_1,z_3)=f_1(z_1)+T(z_3)$；显然由（8.9.1），$v$ 是一连续可微映射．由定义，我们有 $H(v(z_1,z_3))=H(f_1(z_1))=rz_1$；因此关系式 $v(z_1,z_3)=v(z_1',z_3')$ 蕴含 $z_1'=z_1$，于是归结为 $T(z_3)=T(z_3')$，从而得出 $z_3'=z_3$；因此 v 是单射的．上面所证的关系式 $S_x=0$ 表明，对任意 $z_1\in I^p$，有 $f_1'(z_1)=rL_x$，其中 x 是 U 中使 $f(x)=f_1(z_1)$ 的任意点；于是，v 在 (z_1,z_3) 的导数是线性映射 $(t_1,t_3)\to rL_x\cdot t_1+T(t_3)$（由(8.9.1)与(8.1.3)）．但因 H 于 P_x 上的限制是单射的，P_x 是 Q 在 F 中的补集，因此 $v'(z_1,z_3)$ 是 K^m 到 F 上的线性同胚．于是，由(10.2.5)，对任意点 $(z_1,z_3)\in I^m$，存在该点在 I^m 中的开邻域 W，使 v 于 W 的限制是 W 到 F 的开子集 $v(W)$ 上的同胚．若再设 v 是单射的，则它是 I^m 到开子集 $V=v(I^m)$ 上的同胚，其逆在 V 中是连续可微的．最后，从定义便得关系式 $f=v\circ f_0\circ u$．

(10.3.2) 若 $f'(a)$ 的秩等于 n（分别地，m），则(10.3.1)的结论当 $p=n$（相应地，$p=m$）是成立的．

事实上，在本节开始我们已看到，存在 a 的一个邻域，在其中 $f'(x)$ 的秩 $\geqslant n$（相应地，$\geqslant m$），又因它至多等于 $\inf(m,n)$（附录 4.18），故它等于 n（相应地，m）。

问　　题

1）设 E，F 是两个 Banach 空间，A 是点 $x_0\in E$ 的开邻域，f 是 A 到 F 中的连续可微映射。

a）设 $f'(x_0)$ 是 E 到它在 F 中的象集上的线性同胚；试证：存在 x_0 的邻域 $U\subset A$，使 f 是 U 到 $f(U)$ 上的同胚（用 10.1 节的问题 3）。

b）设 $f'(x_0)$ 是满射的，并且存在数 $a>0$，具有如下性质：如果 N 是 $f'(x_0)$ 的核，则对任意 $s\in E$，有 $\|f'(x_0)\cdot s\|\geqslant a\cdot\inf_{t\in N}\|s+t\|$ （12.16.12）。试证：存在 x_0 的邻域 $V\subset A$，使 $f(V)$ 是 $f(x_0)$ 在 F 中的邻域（用 10.1 节的问题 8）。

2）设 A 是 $\boldsymbol{C}$ 的开子集，f 是 A 到 C 中的解析映射．试证：若 f 是单射的，则对每个 $x\in A$，$f'(x)\neq 0$．逆命题是否成立？当 $\boldsymbol{C}$ 换成 $\boldsymbol{R}$ 时，结论还对吗？

3）a）设 A 是 $\boldsymbol{C}$ 的单连通开子集，且不同于 $\boldsymbol{C}$，又设 a，b 是 $\operatorname{Fr}(A)$ 中两个不同的点（第九章附录问题 6）．试证：存在 A 中的复值解析函数 h，满足 $(h(z))^2=(z-a)/(z-b)$ （10.2 节，问题 7）；h 是 A 到 $\boldsymbol{C}$ 的一单连通开子集 B 上的解析同胚（问题 2 与（10.3.1））；进而，$B\cap(-B)=\phi$，因此存在 $\boldsymbol{C}$ 中的点，它们在 B 之外。

b）由 a）推出：存在 A 到 $\boldsymbol{C}$ 的一单连通开子集上的解析同胚，而该子集含于圆盘 U：$|z|<1$ 中，并包含 0。

4）a）设 A 是 $\boldsymbol{C}$ 的含于单位圆盘 U：$|z|<1$ 中并包含 0 的单连通开子集，并设 H 是 A 中所有这样复值解析函数 g 的集，其中 g 是 A 到 $\boldsymbol{C}$ 中的单射映射，且在 A 中 $|g(z)|<1$，$g(0)=0$，而 $g'(0)$ 是一正实数．对 A 的每个紧子集，H 中的函数在 L 上的限制的集 H_L 在 $\mathscr{C}_C(L)$ 中是相对紧的（9.13.2）．试证：实数 $g'(0)$（对 $g\in H$）的集是有界的（参看（9.13.1）的证明）；设 λ 是该集的上确界，证明：存在函数 $g_0\in H$，使 $g_0'(0)=\lambda$（用 9.17 节问题 5 的结果）。

b）设 $g\in H$ 满足 $g(A)\neq U$，且 $c\in U-g(A)$．如果以 $g_1(z)=e^{-i\theta}g(ze^{i\theta})$ 定义的 g_1 代替 g，可以假设，对 θ 的适当选择，c 是大于 0 的实数．试

证：存在一个在 A 中解析的函数 h，满足

$$(h(z))^2=(c-g(z))/(1-cg(z)),$$

且 $h(0)=\sqrt{c}>0$（象问题 3a）同样论证）；并证明：由

$$h(z)=(\sqrt{c}-g_1(z))/(1-\sqrt{c}\,g_1(z))$$

定义的函数 g_1 属于 H，且 $g_1'(0)>g'(0)$.

c）由 a）与 b）推出：a）中定义的函数 g_0 是 A 到 U 上的同胚；由问题 3 b)，这表明：对 $\mathbf{C}$ 的任一单连通开子集 D（异于 $\mathbf{C}$），存在 D 到 U 上的解析同胚（"Riemann 保角映射定理"）.

5）a）设 f 是单位圆盘 U: $|z|<1$ 中的复值解析函数，满足 $f(0)=1$，并在 U 中有 $|f(z)|<M$；试证对 $|z|\leqslant 1/M$，有 $|f(z)-1|\leqslant M|z|$.（应用 Schwarz 引理(9.5 节，问题 7)于函数 $g(z)=M(f(z)-1)/(M^2-f(z))$）.

b）设 f 是 U 中的复值解析函数，满足 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，并在 U 中有 $|f'(z)|\leqslant M$；试证：对 $|z|\leqslant 1/M$，有 $|f(z)-z|\leqslant M|z|^2/2$（应用 a）于 f'）.

c）试证：在 b）的假设下，f 在圆盘 $B(0;1/M)$ 上的限制是该圆盘到包含圆盘 $B(0;1/2M)$ 的一开子集上的解析同胚（应用 Rouché 定理 (9.17.3)，并用 b）的结果）.

d）对任意复数 $a\in U$，设 $u(z)=(z-a)/(\bar{a}z-1)$；对 U 中任意解析复值函数，试证，若 $g(z)=f(u(z))$，则对任意 $z\in U$，有 $|g'(z)|(1-|z|^2)=|f'(u(z))|(1-|u(z)|^2)$.

e）试证：存在一实数 $b>\frac{1}{3}\sqrt{3}$（"Bloch 常数"）具有下述性质：对任意在 U 中解析的复值函数 f，且满足 $f'(0)=1$，都存在 $z_0\in U$，使得若 $x_0=f(z_0)$，那么以 x_0 为中心 b 为半径的开圆盘 B 含于 $f(U)$ 中，并且存在一函数 g，它在 B 中解析且对任意 $z\in B$ 成立 $g(B)\subset U$ 与 $f(g(z))=z$.（首先考虑 f 在 U 的邻域内解析的情形，并对 z_0 取一点，使 $|f'(z)|(1-|z|^2)$ 在该点达到其最大值；然后用 d），把问题化为 $z_0=0$ 的情形，并应用 c）的结果于形如 $a+f(Rz)$ 的函数，其中 a 与 R 是适当的复数. 在一般情形下，考虑函数 $f((1-\varepsilon)z)/(1-\varepsilon)$，而 $\varepsilon>0$ 是任意小的）.

6）a）设 $\mathfrak{M}$ 是所有这样的复值函数 f 的集：f 在单位圆盘 U: $|z|<1$ 中解析，且 $f(U)$ 不包含点 0 与 1. 对任意函数 $f\in\mathfrak{M}$，试证，存在 U 中唯一的解析函数 g，使在 U 中有 $\exp(2\pi i g(z))=f(z)$，且 $-\frac{1}{2}<\mathscr{R}g(0)\leqslant\frac{1}{2}$

(10.2节,问题 7); $g(U)$ 不包含任意正、负整数. 进而(相同的参考), 存在 U 中解析函数 h, 满足

$$g(z)/(g(z)-1)=((1+h(z))/(1-h(z)))^2;$$

$h(U)$不包含点$0,1,c'_n=(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})^2$ 中的任一个,也不包含 $c''_n=(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})^2$ (n 为 $\geqslant 1$ 的整数). 最后, 存在 U 中解析函数 φ, 满足 $\exp(\varphi(z))=h(z)$; $\varphi(U)$ 不包含 $\log c'_n+2k\pi i$, $\log c''_n+2k\pi i$ 中的任一点 (k 为正或负整数, $n\geqslant 1$). 又证明: 没有半径 >4 的圆盘能含在 $\varphi(U)$ 中;用问题 5c), 从这结果推出

$$|\varphi'(x)|\leqslant 4/b(1-|x|)$$

对 $|x|<1$ 成立(对适当选取的常数 c, 考虑函数 $t\to c\varphi(x+(1-|x|)t)$). 并推证: 存在函数 $F(u,v)$, 在 $(\mathbf{C}-\{0,1\})\times[0,1[$ 中有限并连续, 使对任意 $f\in\mathfrak{M}$ 与任意 $|z|\leqslant r<1$, 成立 $\log|f(z)|\leqslant F(f(0),r)$.

b) 设 $f\in\mathfrak{M}$ 满足 $|f(0)|<1/2$ 或 $|f(0)-1|<1/2$. 给定 r, $0\leqslant r<1$, 试证: 或者对 $|z|\leqslant r$ 有 $|f(z)|\leqslant 5/2$, 或者存在一点 x, 使 $|x|<r$ 且 $|f(x)|\geqslant 1/2$, $|f(x)-1|\geqslant 1/2$ 与 $|1/f(x)|\geqslant 1/2$. 应用 a) 的结果于函数 $f((z-x)/(\bar{x}z-1))$,推出: 存在函数 $F_1(u,v)$, 在$[0,+\infty[\times[0,1[$中连续并有限, 使对每个函数 $f\in\mathfrak{M}$, 关系式 $|f(0)|\leqslant s$ 与 $|z|\leqslant r$ 蕴含 $|f(z)|\leqslant F_1(s,r)$ ("Schottky" 定理).

7) 设 A 是 $\mathbf{C}$ 的连通开子集, (f_n) 是集 $\mathfrak{M}$ 中的函数序列(问题 6). 试证: 对 A 的任一个紧子集 L, 存在一子序列 (f_{n_k}), 使得或者子序列在 L 中一致收敛,或者序列 $(1/f_{n_k})$ 在 L 中一致收敛于 0. (用 Schottky 定理,证明使 $\lim\limits_{n\to\infty}(1/f_n(x))=0$ 的点 $x\in A$ 形成 A 的既开又闭的子集, 因此或等于 A, 或为空集;在第二种情况下,利用 L 的紧性,证明存在 (f_n) 的子序列, 在 L 的一紧邻域中有界,并应用(9.13.1);在第一种情况下,类似地把(9.13.1)应用于序列 $(1/f_n)$).

8) a) 设 f 为复值函数,在开集 V: $0<|z-a|<r$ 中解析, 并设 a 是 f 的本性奇点(9.15). 试证 $\mathbf{C}-f(V)$ 是空集或者缩为一个点 ("Picard" 定理. 设W是由 $r/2<|z-a|<r$ 定义的 V 的开子集,并在 W 中考虑解析函数族 $f_n(z)=f(z/2^n)$; 若在 $\mathbf{C}-f(V)$ 中至少存在二个不同的点, 应用问题 7 于序列 (f_n), 并用(9.15.2)导出与 9.15 节问题 2 的矛盾).

b) 从 a) 推导出: 若 g 是 $\mathbf{C}$ 中一整函数,且不为常数,则 $\mathbf{C}-g(\mathbf{C})$ 或者是空集,或者缩为一点. (在 $\mathbf{C}-\{0\}$ 中考虑 $g(1/z)$),

9) a) 试证：存在 C^2 中的整函数 $f(x,y)$，满足等式

$$f(4x,4y)-4f(x,y)=-5(f(2x,-2y))^2+2(f(2x,-2y))^4,$$

并使在 f 于 $(0,0)$ 点的 Taylor 展式中 $\leqslant 1$ 的阶的项是 $x+y$（10.1 节，问题 11）.

b) 设 $g(x,y)=f(2x,-2y)$，且 $J(x,y)=\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}$；试证：$J(2x,-2y)=J(x,y)$，且 $J(x,y)=-4$ 在 C^2 中成立.（把 $f(x,y)$ 与 $g(x,y)$ 表示为 $f(2x,-2y)$ 与 $g(2x,-2y)$）. 又证明：C^2 到自身的解析映射 u：$(x,y)\to(f(x,y),\ g(x,y))$ 是单射的（如果它不是，则由前面的表示式它在 $(0,0)$ 的邻域内就不是单射的.）

c) 试证：存在 $(1,1)$ 的邻域，它不含于 $u(C^2)$ 中.（注意到：存在 ε，$0<\varepsilon<1$，与关系式 $|f(2x,-2y)-1|\leqslant\varepsilon$，$|g(2x,-2y)-1|\leqslant\varepsilon$；蕴含 $|f(x,y)-1|\leqslant\varepsilon$ 与 $|g(x,y)-1|\leqslant\varepsilon$；从而得到，关系式 $|f(x,y)-1|\leqslant\varepsilon$ 与 $|g(x,y)-1|\leqslant\varepsilon$ 蕴含 $|f(0,0)-1|\leqslant\varepsilon$ 与 $|g(0,0)-1|\leqslant\varepsilon$，得到矛盾）（参看问题 8b）.）（Fatou-Bieberbach 的例子）.

4. 微 分 方 程

设 E 是 Banach 空间，I 是域 K 中的一开集，H 是 E 的一凸开子集（即连接 H 的任意两点的线段仍含于 H 中），f 是 $I\times H$ 到 E 中的连续可微映射. 一开球 $J\subset I$ 到 H 中的可微映射 u 称为微分方程

(10.4.1) $$x'=f(t,x)$$

的解，若对任意 $t\in J$，我们有

(10.4.2) $$u'(t)=f(t,u(t)).$$

从(10.4.2)立即得到，u 在 J 中连续可微（因此，若 $K=\boldsymbol{C}$，则由(9.10.1)知其解析）.

(10.4.3) 在以 t_0 为中心的球 $J\subset I$ 中，为使 J 到 H 中的映射 u 是(10.4.1)的解，并满足 $u(t_0)=x_0\in H$，充要条件是：若 $K=\boldsymbol{R}$（相应地，$K=\boldsymbol{C}$），则 u 在 J 中连续（相应地，解析），且有

(10.4.4) $$u(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,u(s))ds$$

(这里,若 $K = \mathbf{C}$, 积分是沿线性线路 $\xi \to t_0 + \xi(t - t_0)$, $0 \leqslant \xi \leqslant 1$ 取的).

这从原函数的定义可得到, 因为(当 $K = \mathbf{C}$) 若 f 连续可微而 u 解析,则 $s \to f(s, u(s))$ 也是解析的(9.10.1).

(10.4.5) (Cauchy 存在定理) 若 f 在 $I \times H$ 中连续可微, 则对任意 $t_0 \in I$ 与 $x_0 \in H$, 存在以 t_0 为中心的开球 $J \in I$, 使在 J 中方程(10.4.1)有且仅有一个解 u, 满足 $u(t_0) = x_0$.

我们先证一引理:

(10.4.5.1) 设 A 是紧距离空间, F 是距离空间, B 是 F 的紧子集, g 是 $A \times F$ 到距离空间 E 中的连续映射, 则在 F 中存在 B 的一邻域 V,使 $g(A \times V)$ 在 E 中有界.

因为 g 连续,故对于任意 $t \in A$ 与 $z \in B$, 在 A 中存在以 t 为中心的球 $s_{t,z}$, 而在 B 中存在以 z 为中心的球 $U_{t,z}$, 使 $g(s_{t,z} \times U_{t,z})$ 是有界的. 对任意 $z \in B$, 可用有限个球 $s_{t_i,z}$ 覆盖 A, 设 V_z 是最小半径的球 $U_{t_i,z}$. 于是 $g(A \times V_z)$ 是有界的(3.4.4),再用有限多个球 V_{z_j} 覆盖 B; 则 V_{z_j} 的并 V 满足我们的要求(3.4.4).

a) 首先设 $K = \mathbf{R}$. 令 J_a 是含于 I 中并以 t_0 为中心 a 为半径的紧球. 由 (10.4.5.1), 存在含于 H 中并以 x_0 为中心 b 为半径的开球 B,使 $M = \sup\limits_{(t,x)\in J_a\times B} \|f(t, x)\|$ 与 $k = \sup\limits_{(t,x)\in J_a\times B} \|D_2 f(t, x)\|$ 是有限数. 对 $r < a$, 设 J_r 是以 t_0 为中心 r 为半径的闭球, F_r 是 J_r 到 E 中的连续映射 y 的空间, 对于范数 $\|y\| = \sup\limits_{t\in J_r} \|y(t)\|$ 而言, 它是一个 Banach 空间(7.2.1). 设 V_r 是 F_r 中的开球, 其中心为 x_0(恒等于常映射 $t \to x_0$) 半径为 b. 对任意 $y \in V_r$, 映射 $t \to x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$ 在 J_r 中有定义且连续, 这是因为由定义,对每个 $y \in V_r$ 有 $y(s) \in B$; 设 $g(y)$ 是这个映射; 于是 g 是 V_r 到 F_r 中的映射. 我们将证明,对足够小的 r, g 满足(10.1.2)的条件;于是应用该定理与(10.4.3), 可取 $J = \mathring{J}_r$ 而使本定理得证.

现在,对 V_r 中任意两点 y_1, y_2, 由(8.5.4),对每个 $s \in J_r$, 我们

有

$$\|f(s,y_1(s))-f(s,y_2(s))\|\leqslant k\cdot\|y_1(s)-y_2(s)\|$$
$$\leqslant k\cdot\|y_1-y_2\|;$$

因此，对任意 $t\in J_r$，由(8.7.7)有

$$\left\|\int_{t_0}^t (f(s,y_1(s))-f(s,y_2(s)))ds\right\|\leqslant kr\|y_1-y_2\|,$$

故 $\|g(y_1)-g(y_2)\|\leqslant kr\|y_1-y_2\|$. 另一方面，对任一个 $y\in V_r$，$\|f(s,y(s))\|\leqslant M$ 对每个 $s\in J_r$ 成立，于是由(8.7.7)，有

$$\left\|\int_{t_0}^t f(s,y(s))ds\right\|\leqslant Mr,$$

因而 $\|g(x_0)-x_0\|\leqslant Mr$. 于是我们看到，为了能应用(10.1.2)，应当有 $kr<1$ 与 $Mr<b(1-kr)$，并且当 $r<b/(M+kb)$ 时，两个不等式都能满足.

b) 再设 $K=\boldsymbol{C}$; J_a, J_r, B, M 与 k 定义如上，且设 F_r 是 J_r 到 E 中，并在 J_r 内连续、$\mathring{J}_r$ 内解析的映射 y 的空间. 由于(7.2.1)与(9.12.1)，可知关于范数 $\|y\|=\sup_{t\in J_r}\|y(t)\|$，它也是 Banach 空间. 对 $y\in V_r$，映射 $t\to x_0+\int_{t_0}^t f(s,y(s))ds$ 也属于 F_r，因为它在 $\mathring{J}_r$ 中是解析的(这由于 $s\to f(s,y(s))$ 是 (9.7.3))；而它在 J_r 中的连续性立即可从 (8.11.1) 得到. 这样我们就定义了 V_r 到 F_r 中的映射 g，并且，证明的末尾则毋须改变.

(10.4.6) **附注.** (10.4.5) 的证明指出，当 $K=\boldsymbol{R}$ 并且 f 只满足下述较弱假设时，定理结论仍然正确: a) 对 I 到 H 中的每个连续映射 $t\to w(t)$ 而言，$t\to f(t,w(t))$ 是 I 中的正则函数(7.6); b) 对任意点 $(t,x)\in I\times H$，在 I 中存在一个以 t 为中心的球 J，并且在 H 中存在一个以 x 为中心的球 B，使 f 在 $J\times B$ 中有界，同时还存在常数 $k\geqslant 0$ (依赖于 J 与 B)，使对 $s\in J$ 与 B 中的 y_1, y_2，有

$$\|f(s,y_1)-f(s,y_2)\|\leqslant k\|y_1-y_2\|.$$

这样的函数 f 称为在 $I\times H$ 中是**局部 Lipschitz 的**；而方程

(10.4.2)则了解为仅在 J 的至多为可数子集的余集上成立. 最后**这附注也能使我们用 $\mathbf{R}$ 中的任何类型的区间代替开区间 I 与 J.**

5. 微分方程解的比较

我们称开球 $J\subset I$ 到 H 中的可微映射 u 是方程 (10.4.1) 的**具有 ε 逼近度的近似解**,若对任意 $t\in J$, 有

$$\|u'(t)-f(t,u(t))\|\leqslant\varepsilon.$$

(10.5.1) 设在 $I\times H$ 中, $\|D_2f(x,y)\|\leqslant k$. 若 u, v 是(10.4.1)的在以 t_0 为中心的开球中分别具有逼近度 ε_1, ε_2 的两个近似解, 则对任意 $t\in J$, 有

(10.5.1.1)
$$\|u(t)-v(t)\|\leqslant\|u(t_0)-v(t_0)\|e^{k|t-t_0|}+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\frac{e^{k|t-t_0|}-1}{k}.$$

(对 $k=0$, 则用 $|t-t_0|$ 代替 $(e^{k|t-t_0|}-1)/k$). 令 $t=t_0+a\xi$, $|a|=1$, $\xi\geqslant 0$, 就可立即化为 $K=\mathbf{R}$, $t_0=0$ 与 $t\geqslant 0$ 的情形; 于是若记 $u_1(\xi)=u(t_0+a\xi)$, $v_1(\xi)=v(t_0+a\xi)$, 则 u_1 与 v_1 就是 $x'=af(t_0+a\xi,x)$ 的近似解, 从而得到我们的论断. 从在区间 $0\leqslant s\leqslant t$ 中的关系式 $\|u'(s)-f(s,u(s))\|\leqslant\varepsilon_1$, 由(8.7.7)我们推出

$$\|u(t)-u(0)-\int_0^t f(s,u(s))ds\|\leqslant\varepsilon_1 t,$$

且类似地有

$$\|v(t)-v(0)-\int_0^t f(s,v(s))ds\|\leqslant\varepsilon_2 t,$$

从而

$$\|u(t)-v(t)\|\leqslant\|u(0)-v(0)\|+\|\int_0^t(f(s,u(s))-f(s,v(s)))ds\|+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)t.$$

由关于 D_2f 的假设与(8.5.4),(8.7.7),这式子给出

(10.5.1.2) $w(t) \leqslant w(0)+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)t+k\int_0^t w(s)ds$,

其中 $w(t)=\|u(t)-v(t)\|$. 于是,定理(10.5.1)成为下述引理的推论:

(10.5.1.3) (Gronwall 引理) 在区间 $[0,c]$ 中,若 φ 与 ψ 是两个非负正则函数,则对 $[0,c]$ 上满足

(10.5.1.4) $w(t) \leqslant \varphi(t)+\int_0^t \psi(s)w(s)ds$

的任意正则函数 $w \geqslant 0$, 我们有

(10.5.1.5) $w(t) \leqslant \varphi(t)+\int_0^t \varphi(s)\psi(s)\exp\left(\int_s^t \psi(\xi)d\xi\right)ds$

在 $[0,c]$ 中成立. 记 $y(t)=\int_0^t \psi(s)w(s)ds$; y 是连续的, 且从(10.5.1.4)得到: 在 $[0,c]$ 的一可数子集的余集中,由(8.7),有

(10.5.1.6) $y'(t)-\psi(t)y(t) \leqslant \varphi(t)\psi(t)$.

记 $z(t)=y(t)\exp\left(-\int_0^t \psi(s)ds\right)$; 关系式(10.5.1.6)等价于

$$z'(t) \leqslant \varphi(t)\psi(t)\exp\left(-\int_0^t \psi(s)ds\right).$$

由(8.5.3)并利用 $z(0)=0$ 这一事实,我们得到,对 $t\in[0,c]$,

$$z(t) \leqslant \int_0^t \varphi(s)\psi(s)\exp\left(-\int_0^s \psi(\xi)d\xi\right)ds,$$

从而由定义知

$$y(t) \leqslant \int_0^t \varphi(s)\psi(s)\exp\left(\int_s^t \psi(\xi)d\xi\right)ds,$$

于是(10.5.1.5)从关系式 $w(t) \leqslant \varphi(t)+y(t)$ 得到.

(10.5.2) 设 f 在 $I\times H$ 中连续可微. 若 u, v 是(10.4.1)的两个解,它们定义在以 t_0 为中心的开球中,并满足 $u(t_0)=v(t_0)$, 则在 J 中 $u=v$.

只须证明 u 与 v 在含于 J 中并以 t_0 为中心的每个紧球 L 中相等就够了. 如果我们知道 D_2f 在某个集 $L\times H'$ 中有界,其中 H' 是包含 $u(L)$ 与 $v(L)$ 的 H 的开子集, 这可由对 u 与 v 应用(10.5.1)

得到．但上述集 $L\times H'$ 的存在性立即可以(10.4.5.1)得出．

(10.5.3) 设 E 是有限维的，并设 f 在 $I\times H$ 中解析．则(10.4.1)的任意解在开球 $J\subset I$ 中是解析的．

若 $K=\boldsymbol{C}$，则结论可直接由定义得出．若 $K=\boldsymbol{R}$，并设 $E=\boldsymbol{R}^m$；于是对任意点 $(t_0,x_0)\in I\times H$，存在以 t_0 为中心的球 $L_0\subset\boldsymbol{C}$ 与以 x_0 为中心的球 $P\subset\boldsymbol{C}^m$，使 $L_0\cap\boldsymbol{R}\subset I$ 与 $P\cap\boldsymbol{R}^m\subset H$，以及存在 $L_0\times P$ 到 $\boldsymbol{C}^m$ 中的解析映射 g，使 g 在 $(L_0\cap\boldsymbol{R})\times(P\cap\boldsymbol{R}^m)$ 上的限制与 f 相等(9.4.5)．又由(10.4.5)，存在 $\boldsymbol{C}$ 中以 t_0 为中心的开球 $L\subset L_0$，使微分方程 $z'=g(t,z)$ 有唯一解 v，它在点 t_0 取值为 x_0，且在 L 中 v 是解析的．利用关系式 $v'(t)=g(t,v(t))$，以及 g 与 v 的定义，并关于 n 用归纳法，立即得出：所有导数 $v^{(n)}(t_0)$ 属于 $\boldsymbol{R}^m$；因此由(9.3.5.1)，对 $t\in L\cap\boldsymbol{R}$，$v(t)$ 属于 $\boldsymbol{R}^m$．这就证明了 v 在 $L\cap\boldsymbol{R}$ 上的限制 u 是(10.4.1)的一个解(参看(8.4)，附注)，并满足 $u(t_0)=x_0$．但是由(10.5.2)，方程(10.4.1)的在以 t_0 为中心的球 M 中满足 $w(t_0)=x_0$ 的任一解 w，在 $L\cap M$ 中与 u 是相等的，因此在 t_0 点是解析的．证完．

(10.5.4) **附注**．当 $K=\boldsymbol{R}$ 时，(10.5.1)的证明指出，当 f 在 $I\times H$ 中满足带有常数 $k\geqslant 0$ 的 Lipschitz 条件时，亦即满足(10.4.6)的条件 a)，并且对任意 $t\in I$ 及 H 中的 x_1,x_2，有 $\|f(t,x_1)-f(t,x_2)\|\leqslant k\cdot\|x_1-x_2\|$，不等式(10.5.1.1)仍然正确；于是 J 可取为包含 t_0 且以 t_0 为始点(或终点)的区间，u 与 v 在 J 中是正则函数的原函数，且仅假设关系式 $\|u'(t)-f(t,u(t))\|\leqslant\varepsilon_1$，$\|v'(t)-f(t,v(t))\|\leqslant\varepsilon_2$ 在 J 的至多可数一子集的余集上成立．

(10.5.5) 设 $K=\boldsymbol{C}$ 时，f 在 $I\times H$ 中是连续可微的，而 $K=\boldsymbol{R}$ 时，它在 $I\times H$ 中是局部 Lipschitz 的．又设 v 是(10.4.1)的解，它定义在开球 J: $|t-t_0|<r$ 中，而 $\bar{J}\subset I$，$\overline{v(J)}\subset H$，并且 $t\to f(t,v(t))$ 在 J 内是有界的．则存在含于 I 中的球 J': $|t-t_0|<r'(r'>r)$，与(10.4.1)的一个解，它定义于 J' 中，而在 J 中与 v 相等．

a) $K=\boldsymbol{R}$．由假设，对 $t\in J$，我们有 $\|f(t,v(t))\|\leqslant M$，因

此，在 J 的至多一可数子集的余集上，成立 $\|v'(t)\| \leqslant M$. 由中值定理(8.5.2)，这表明对 J 中的 s，t 有 $\|v(s)-v(t)\| \leqslant M|s-t|$. 由 Cauchy 收敛准则(3.14.6)我们得到，极限 $v((t_0-r)+)$ 与 $v((t_0+r)-)$ 存在且属于 $\overline{v(J)}\subset H$. 再由(10.4.6)，存在 $x'=f(t,x)$ 的解 w_1(相应地，w_2)，它定义在含于 I 内的以 t_0+r (相应地，t_0-r)为中心的开球 U_1 中(相应地，U_2 中)且在该点取值为 $v((t_0+r)-)$ (相应地，$v((t_0-r)+)$)；从(10.5.4)又得到，w_1(相应地，w_2)在 $U_1\cap J$ 中(相应地，$U_2\cap J$ 中)与 v 相等，于是在此情形下(10.5.5)得证. (注意，不必检验 v (连续延拓)与 w_1，w_2 在点 t_0-r 与 t_0+r 的左、右导数的存在性.)

b) $K=\boldsymbol{C}$. 对任一复数 ζ，$|\zeta|=1$，令 $t=t_0+\zeta s$，$s\geqslant 0$，并且 $v_\zeta(s)=v_0(t+\zeta s)$. 于是如 a) 同样的论证可得，$v_\zeta(r-)$ 存在且属于 H；因而存在 $x'=f(t,x)$ 的解 w_ζ，它定义在含于 J 内并以 $t_0+\zeta r$ 为中心的开球 V_ζ 中，且满足 $w_\zeta(t_0+\zeta r)=v_\zeta(r-)$. 从(10.5.4)得知 w_ζ 与 v 在 $J\cap V_\zeta$ 与以 t_0，$t_0+\zeta r$ 为端点的线段的交集中是相等的；因为这些函数在 $J\cap V_\zeta$ 中解析，由(9.4.4)，它们在 $J\cap V_\zeta$ 中相等. 现在，可用有限多个球 $V_{\zeta_i}(1\leqslant i\leqslant m)$ 覆盖紧集 $|t-t_0|=r$；若 $V_{\zeta_i}\cap V_{\zeta_j}\neq\phi$，则函数 w_{ζ_i} 与 w_{ζ_j} 在 $V_{\zeta_i}\cap V_{\zeta_j}$ 中相等，因为二者在非空开集 $J\cap V_{\zeta_i}\cap V_{\zeta_j}$ 中与 v 相等，我们仅需应用(9.4.2). (为证上述交集是非空的，注意到假设条件蕴含了 $r|\zeta_i-\zeta_j|<\rho_i+\rho_j$，这里 ρ_i，ρ_j 是 V_{ζ_i} 与 V_{ζ_j} 的半径；因此存在 $\lambda\in\,]0,1[$，使 $r\lambda|\zeta_i-\zeta_j|<\rho_i$ 与 $r(1-\lambda)|\zeta_i-\zeta_j|<\rho_j$ 成立；从而得出点 $t_0+r((1-\lambda)\zeta_i+\lambda\zeta_j)$ 属于 $J\cap V_{\zeta_i}\cap V_{\zeta_j}$). 因此 $x'=f(t,x)$ 有一个解，它在 J 中等于 v，在每个 V_{ζ_i} 中等于 w_{ζ_i}，且存在以 t_0 为中心半径 $r'>r$ 并含于这些集的并中的开球(3.17.11)，证完.

(10.5.5.1) 由(10.5.5)得到，若 r_0 是满足 $\bar{J}\subset I$ 与 $\overline{v(J)}\subset H$ 的所有数 r 的上确界，则或 $r_0=+\infty$ 或当 J_0 是开球 $|t-t_0|<r_0$ 时关系 $\bar{J}_0\not\subset I$ 与 $\overline{v(J_0)}\not\subset H$ 之一成立.

(10.5.6) 设 f，g 是 $I\times H$ 到 E 中的两个连续可微映射，并设在

$I \times H$ 中，$\|f(t,x) - g(t,x)\| \leqslant \alpha$ 与 $\|D_2g(t,x)\| \leqslant k$ 成立．设 (t_0, x_0) 是 $I \times H$ 中的点，μ, β 为二正数，而 $\varphi(\xi) = \mu e^{k\xi} + (\alpha + \beta)\dfrac{e^{k\xi} - 1}{k}$ 对 $\xi \geqslant 0$ 成立．再设 u 是 $x' = g(t,x)$ 的具有逼近度 β 的近似解，它定义在含于 I 的开球 J: $|t - t_0| < b$ 中，并使 $u(t_0) = x_0$，且对任意 $t \in J$，以 $u(t)$ 为中心 $\varphi(|t - t_0|)$为半径的闭球含于H中．则对任意满足 $\|y - x_0\| \leqslant \mu$ 的 $y \in H$，存在 $x' = f(t,x)$ 的唯一解 v，定义在 J 中，而取值于H内，且满足 $v(t_0) = y$；进而，对 $t \in J$，有 $\|u(t) - v(t)\| \leqslant \varphi(|t - t_0|)$.

设 A 是这样的数 r 的集：$0 < r \leqslant b$，并存在 $x' = f(t,x)$ 的解 v_r，取值于H内而定义在球 J_r: $|t - t_0| < r$ 中，满足 $v_r(t_0) = y$．由 Cauchy 存在定理(10.4.5)，A 非空．并且在 J_r 中我们有 $\|v_r'(t) - g(t, v_r(t))\| \leqslant \alpha$，换句话说，$v_r$ 是 $x' = g(t, x)$ 具有逼近度 α 的近似解，再由(10.5.1.1)得知在 J_r 中 $\|u(t) - v_r(t)\| \leqslant \varphi(|t - t_0|)$．若 r，r' 在A中，并有 $r < r'$，则由 (10.5.2) 与 (10.5.4)，v_r 与 $v_{r'}$ 在 J_r 中相等．

设 c 是 A 的上确界；我们应证 $c = b$．如若不然；则在 J_c 中存在 $x' = f(t,x)$ 的唯一解 v，在每个 $r < c$ 的球 J_r 中，它等于 v_r，取值于H内且在 J_c 中满足 $\|u(t) - v(t)\| \leqslant \varphi(|t - t_0|)$．因此在 J_c 中我们有 $\|g(t,v(t))\| \leqslant \|g(t,u(t))\| + k\varphi(|t - t_0|)$，且因$t \to g(t, u(t))$ 在 $\bar{J}_c$ 中连续，故它在这个紧球中有界；由此可得$t \to g(t,v(t))$ 在 J_c 中有界．另一方面，$v(J_c)$ 的任何聚点 z 是序列 $(v(t_n))$ 的极限，其中 $t_n \in J_c$ 且 t_n 趋于 $t_0 + c\zeta$，而 $|\zeta| \leqslant 1$；由连续性，我们有 $\|z - u(t_0 + c\zeta)\| \leqslant \varphi(c|\zeta|)$，因此由假设 $z \in H$．于是我们可应用(10.5.5)而获得 $x' = f(t, x)$的一个解，它定义在球 $J_{r'}$ 中($r' > c$)且在 t_0 点取值 y，这与 c 的定义相矛盾．

若 $K = \boldsymbol{R}$，我们在 (10.5.6) 的叙述中用包含点 t_0 的开区间 $]c, d[$ 代替 J.

(10.5.6.1) 再注意，若 $K = \boldsymbol{R}$，我们可以放宽(10.5.6)中对 f 与 g 的假设，仅设 g 关于常数 k 是 Lipschitz 的，而 f 在 $I \times H$ 中是

局部 Lipschitz 的.

问　　题

1) 设 $f(t,x)$ 是定义在 $\mathbf{R}^2$ 内的集 $|t|\leqslant a$, $|x|\leqslant b$ 中的实值连续函数,使当 $tx>0$ 时 $f(t,x)<0$, 而当 $tx<0$ 时 $f(t,x)>0$. 试证 $x=0$ 是微分方程 $x'=f(t,x)$ 的唯一解，它定义在 0 的邻域中并满足 $x(0)=0$（用反证法,并在包含 0 的紧区间中,考虑那些使解达到它的极大或极小值的点).

2) 设 $f(t,x)$ 是定义在 $\mathbf{R}^2$ 中的实值连续函数,并有下列表示:

$$f(t,x)=\begin{cases}-2t & \text{当 } x\geqslant t^2,\\ -2x/t & \text{当 } |x|<t^2,\\ 2t & \text{当 } x\leqslant -t^2.\end{cases}$$

又设 (y_n) 是由 $y_0(t)=t^2$, $y_n(t)=\int_0^t f(u,y_{n-1}(u))du$ $(n\geqslant 1)$ 定义的函数序列. 试证：序列 $(y_n(t))$ 对任意 $t\neq 0$ 是不收敛的，尽管微分方程 $x'=f(t,x)$ 有唯一解,满足 $x(0)=0$（问题 1).

3) 对任一对实数 $\alpha<0$, $\beta>0$, 取如下值：当 $t<\alpha$ 时,等于 $-(t-\alpha)^2$, 当 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 时，等于 0，当 $t>\beta$ 时，等于 $(t-\beta)^2$ 的函数是微分方程 $x'=2|x|^{1/2}$ 的解,满足 $x(0)=0$.

设 u_0 是定义在紧区间 $[a,b]$ 内的任一连续函数,并归纳地定义 $u_n(t)=2\int_a^t|u_{n-1}(s)|^{1/2}ds$, 其中 $t\in[a,b]$ 且 $n>0$. 试证若 γ 是 $[a,b]$ 中使 $u_0(t)=0$ 在 $[a,\gamma]$ 内成立的最大数,则序列 (u_n) 在 $[a,b]$ 中一致收敛于微分方程 $x'=2|x|^{1/2}$ 的如下解：当 $a\leqslant t\leqslant\gamma$ 时等于 0, 而当 $\gamma\leqslant t\leqslant b$ 时等于 $(t-\gamma)^2$.（首先考虑

$$u_0(t)=\begin{cases}0 & \text{当 } t\leqslant\gamma,\\ k(t-\gamma)^2 & \text{当 } \gamma\leqslant t\leqslant b\end{cases}$$

的情形,其次注意到,如果必要的话,用 u_1 代替 u_0, 并可设 u_0 在 $[a,b]$ 中递增;考察对任意 $\varepsilon>0$, 存在两个数 $k_1>0$, $k_2>0$, 使在 $[a,b]$ 中有

$$k_1v_0(t-\gamma-\varepsilon)\leqslant u_0(t)\leqslant k_2v_0(t-\gamma+\varepsilon),$$

这里当 $t\leqslant 0$ 时 $v_0(t)=0$, 而当 $t\geqslant 0$ 时，$v_0(t)=t^2$).

4) 使用 10.4 节的那些记号,设 $K=\mathbf{R}$, f 在 $I\times H$ 中连续并有界,令 $M=\sup_{(t,x)\in I\times H}\|f(t,x)\|$. 又设 x_0 是 H 中的点，S 是以 x_0 为中心 r 为半径并

含于H的开球.

a) 再假设f在$I\times S$中一致连续(若E是有限维的并且I含于紧区间I_0中而使f在$I_0\times H$中连续，则这条件自动满足). 试证，对任意$\varepsilon>0$与任意含于I并满足$h<r/(M+\varepsilon)$的紧区间$[t_0, t_0+h]$(相应地,$[t_0-h,t_0]$)，在该区间中存在$x'=f(t,x)$的具有逼近度ε的近似解，当$t=t_0$时取值x_0.(假设$\delta>0$使关系式$|t_1-t_2|\leqslant\delta$, $\|x_1-x_2\|\leqslant\delta$蕴含$\|f(t_1,x_1)-f(t_2,x_2)\|\leqslant\varepsilon$；考虑区间$[t_0, t_0+h]$的一个子分割,使小区间的长度至多等于$\inf(\delta, \delta/M)$，并从$t_0$开始,在每个小区间上确定近似解).

b) 设E是有限维的,且$I=]t_0-a,t_0+a[$. 试证，存在$x'=f(t,x)$的解，它定义在区间$[t_0,t_0+c]$中(相应地，$[t_0-c,t_0]$中)，这里$c=\inf(a,r/M)$,取值于S内,且当$t=t_0$时等于x_0.("Peano 定理"：对每个n，设u_n是具有逼近度$1/n$的近似解,定义在$J_n=\left[t_0, t_0+c-\frac{1}{n}\right]$中,它的存在性已由a)给出. 注意对每个$m$，函数$u_n$(对$n\geqslant m$)在$J_m$上的限制形成赋范空间$\mathscr{C}_E(J_m)$中的相对紧子集(7.57)，并如(9.13.2)的证明，用"对角线法";最后利用(10.4.3)与(8.7.8).)

5) 设f是 Banach 空间(c_0)(5.3 节，问题5)到自身的映射，使当$x=(x_n)$时，$f(x)=(y_n)$,其中$y_n=|x_n|^{1/2}+\frac{1}{n+1}$. 试证$f$在$(c_0)$中连续,但微分方程$x'=f(x)$不存在这样的解：定义在$\boldsymbol{R}$内0点的邻域中，取值于$(c_0)$内,且当$t=0$时等于0.(如果有这样的解$u(t)=(u_n(t))$，可直接积分计算每个$u_n(t)$的值，并且证明当$t\neq0$时序列$(u_n(t))_{n\geqslant0}$不趋于0.)

6) a) 使用10.4节的那些记号,设当$K=\boldsymbol{C}$时f在$I\times H$中解析，而当$K=\boldsymbol{R}$时，f在$I\times H$中是局部 Lipschitz 的. 设I_0是含于I并以t_0为中心a为半径的开球，S是含于H而以x_0为中心r为半径的开球. 又设$h(s,z)$是定义在$[0,a[\times[0,r[\subset R^2$中的连续函数,满足$h(s, z)\geqslant0$，并对任意$s\in[0,a[$，函数$z\to h(s,z)$在$[0,r[$中递增. 最后假设：1°在$I_0\times S$中有$\|f(t,x)\|\leqslant h(|t-t_0|, \|x-x_0\|)$；2° 存在一区间$[0,\alpha]$，$\alpha<a$，与一函数$\varphi$，它是$[0,\alpha]$上正则函数$\varphi'$的原函数,并满足$\varphi(0)=0,\varphi(s)\in[0,r[$，而$\varphi'(s)>h(s, \varphi(s))$，在$[0,\alpha]$中除去$s$值的至多一可数集外都成立. 试证：存在$x'=f(t,x)$这样的解$u$：定义在以$t_0$为中心$\alpha$为半径的开球$J$中,取值于$S$内且满足$u(t_0)=x_0$；进而,在$J$中，$\|u(t)-x_0\|\leqslant\varphi(|t-$

$t_0|$).(利用(10.5.5)去证明：存在一个含于 I_0 中并以 t_0 为中心的最大开球，而在其中 $x'=f(t,x)$ 有这样的解 v：取值于 S 内，满足 $\|v(t)-x_0\|\leqslant\varphi(|t-t_0|)$ 在 J_0 内成立，进而，这样的解是唯一的；然后利用中值定理，借助于反证法以证明 $J\subset J_0$.)

b) 设 $H=E$，并设存在一函数 $h(z)>0$，在 $[0,+\infty[$ 中有定义，连续且递增，还满足 $\int_0^{+\infty}\frac{dz}{h(z)}=+\infty$，而在 $I_0\times E$ 中有 $\|f(t,x)\|\leqslant h(\|x\|)$. 试证：$x'=f(t,x)$ 的每个定义于 t_0 邻域内的解，在 I_0 中是有定义的(利用 a)).

c) 若 $\|f(t,x)\|\leqslant M$ 在 $I_0\times S$ 中成立，则存在 $x'=f(t,x)$ 的这样的解 u：定义在以 t_0 为中心、$\inf(a,r/M)$ 为半径的球 J 中，取值于 S 内，且满足 $u(t_0)=x_0$ (取 $h(s,z)=M$).

设 $K=E=\boldsymbol{C}$，且 $a\geqslant r/M$，试证，除非 f 是常数，存在一开球 $J'\supset\bar{J}$，在其中 u 可延拓为 $x'=f(t,x)$ 的取值于 S 内的解. (注意，由于最大值原理(9.5.9)，对 $t\in J$，$|u'(t)|<M$；对任意满足 $|\zeta|=1$ 的 ζ，考虑函数 $u_\zeta(s)=u(t_0+\zeta s)$；如(10.5.5)中的论证，证明(10.5.5)的假设满足)。对 J' 的半径，想取成仅依赖于 a, r 与 M 而不依赖于 f 本身的数是不可能的，如例子，$f(t,x)=((1+x)/2)^{1/n}$ (9.5 节，问题 8)，而 $t_0=x_0=0$，$a=r=M=1$ 所示($n>1$ 为任意的整数).

7) 设 f 是 $\boldsymbol{R}^2$ 中开多圆柱 P：$|t-t_0|<a$，$|x-x_0|<b$ 内的实值有界连续函数，并且设 $M=\sup\limits_{(t,x)\in P}|f(t,x)|$；又设 $r=\inf(a,b/M)$，$I=]t_0-r,t_0+r[$. 再设 Φ 是 $x'=f(t,x)$ 的所有这样解 u 的集：定义在 I 中，取值于开区间 $]x_0-b,x_0+b[$ 内，且在 $t=t_0$ 时等于 x_0；集 Φ 非空(问题4b)). 对每个 $t\in I$，令 $v(t,t_0,x_0)=\inf\limits_{u\in\Phi}u(t)$，$w(t,t_0,x_0)=\sup\limits_{u\in\Phi}u(t)$；试证 v 与 w 属于 Φ (7.5 节，问题 11)；v (相应地，w)称为 $x'=f(t,x)$ 在 I 中对应于点 (t_0,x_0) 的**最小解**(相应地，**最大解**).

对每个 $\tau\in I$，令 $\xi=v(\tau,t_0,x_0)$. 试证，若 $\tau>t_0$，则在形如 $[\tau,\tau+h[$ 的区间中，$v(t,\tau,\xi)=v(t,t_0,x_0)$，而若 $\tau<t_0$，则在形如 $]\tau-h,\tau]$的区间中，$v(t,\tau,\xi)=v(t,t_0,x_0)$ (其中 $h>0$). 并论证：存在含于 $]t_0-a,t_0+a[$ 且包含 t_0 的最大开区间 $]t_1,t_2[$，使 $v(t,t_0,x_0)$ 可被延拓为这样的连续函数 g：定义在 $]t_1,t_2[$ 中，取值于 $]x_0-b,x_0+b[$ 内，且对每个 $t\in]t_1,t_2[$，若 $t>t_0$，在形如 $[t,t+h[$ 的区间中 $g(s)=v(s,t,g(t))$，若

$t<t_0$, 在形如 $]t-h,t[$ 的区间中 $g(s)=v(s,t,g(t))$ (其中 $h>0$). (如果 g_1 是 $v(t,t_0,x_0)$ 在区间 $]t_1',t_2'[$ 中另一个这样的延拓, 证明 g 与 g_1 在 $]t_1,t_2[$ 与 $]t_1',t_2'[$ 的交集中相等, 这可借助于考虑在交集中使 g 与 g_1 于 $[t_0,s[$ 内(相应地,于 $]s,t_0]$ 内)相等的那些点 s 的上确界(相应地,下确界)而得出.)进而,或是 $t_1=t_0-a$ (相应地,$t_2=t_0+a$), 或是 $g(t_1+)=x_0\pm b$ (相应地, $g(t_2-)=x_0\pm b$).

8) 设 $K(s,t)$ 是定义在 $0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1$ 上的非负数值连续函数. 令

$$K_1(s,t)=K(s,t),$$

而对 $n>1$, 归纳地定义

$$K_n(s,t)=\int_t^s K(s,z)K_{n-1}(z,t)dz.$$

a) 若 $|K(s,t)|\leqslant M$, 试证

$$|K_n(s,t)|\leqslant M^{n+1}\frac{(s-t)^n}{n!}.$$

并推证: 对于 $0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1$, 级数

$$H(s,t)=\sum_{n=1}^{\infty}K_n(s,t)$$

一致收敛.

b) 设 $u(t)$ 是 $[0,1]$ 上的非负正则函数, 试证在 $[0,1]$ 上存在一正则函数 $f(x)$, 满足

$$u(s)\leqslant f(s)+\int_0^s K(s,t)u(t)dt$$

并推证: 对于 $0\leqslant s\leqslant 1$, 有

$$u(s)\leqslant f(s)+\int_0^s H(s,t)f(t)dt.$$

9) 设 w 是定义于开区间 $I\subset R$ 的实函数, 且它是正则函数 w' 的原函数,而 w' 的不连续点在 I 中是孤立点,并对每个这样的点 t 都有 $w'(t+)>w'(t-)$; 又设 E 是 w' 的不连续点的集,二阶导数 w'' 在 $I-E$ 中存在, 并在 $I-E$ 中有 $w''(x)\geqslant w(x)$.

a) 试证,若 a, b 是 I 中满足 $w(a)=w(b)=0$ 的两个点,则对 $a<x<b$ 有 $w(x)\leqslant 0$ (用反证法). 对 I 中任意三点 $x_1<x<x_2$, 推证

$$w(x) \leqslant \frac{w(x_1)\operatorname{sh}(x_2 - x) + w(x_2)\operatorname{sh}(x - x_1)}{\operatorname{sh}(x_2 - x_1)}.$$

(考虑差 $w(x) - u(x)$，这里 u 是方程 $u''(x) - u(x) = 0$ 的解，它们使 w 在点 x_1 与 x_2 取相同的值)。

b) 设 $I = \mathbf{R}$. 试证，当 $x \to +\infty$ 时，函数 $w(x)e^{-x}$ 有 $\geqslant 0$ 的极限；而当 $x \to -\infty$ 时，函数 $w(x)e^{x}$ 有非负的极限.

6. 线性微分方程

存在定理(10.4.5)能在特殊情形下被改进为:

(10.6.1) 设 $I \subset K$ 是以 t_0 为中心 r 为半径的开球. 若 $K = \mathbf{R}$, 设 f 在 $I \times E$ 中连续；而若 $K = \mathbf{C}$, 设 f 在 $I \times E$ 中解析，且对 E 中的 x_1, x_2 与 $t \in I$，有 $\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \leqslant k(|t - t_0|)\cdot \|x_1 - x_2\|$，这里 $\xi \to k(\xi)$ 是 $[0, r[$ 中的正则函数. 则对每个 $x_0 \in E$，存在(10.4.1)的唯一解 u，定义在 I 中并满足 $u(t_0) = x_0$.

考虑到(10.5.4)我们仅需证明，若 c 是这样数 ρ 的上确界: $0 < \rho < r$，并在 $|t - t_0| < \rho$ 中存在(10.4.1)的解，它在 t_0 处取值为 x_0，则 $c = r$. 如若不然；则由(10.5.4)，存在(10.4.1)的解 v，定义在 J: $|t - t_0| < c$ 中，且 $v(t_0) = x_0$. 我们将证明，(10.5.5)的条件被满足；于是应用(10.5.5)而导出矛盾，因而证完.

因为这里 $H = E$，条件 $\overline{v(J)} \subset H$ 极其容易验证，因此只须检验 $t \to f(t, v(t))$ 在 J 中是有界的. 于是，在紧区间 $[0, c]$ 中，k 是有界的，并且紧集 $\bar{J}$ 中的连续函数 $t \to \|f(t, x_0)\|$ 也如此；因而存在两个数 $m > 0$, $h > 0$，使 $\|f(t, x)\| \leqslant m\|x\| + h$ 对 $t \in J$ 与 $x \in E$ 成立. 这蕴含了 $\|v'(t)\| \leqslant m\|v(t)\| + h$ 对 $t \in J$ 成立；若我们记 $w(\xi) = \|v(t_0 + \lambda\xi)\|$，其中 $|\lambda| = 1$，则中值定理指出 $w(\xi) \leqslant \|x_0\| + hc + m\int_0^{\xi} w(\zeta)d\zeta$. 这样我们便能应用引理(10.5.1.3)，从而得出，在 J 中有 $\|v(t)\| \leqslant ae^{m|t-t_0|} + b$ (a, b 为常数)，因此 v 在 J 中有界，故 $\|f(t, v(t))\| \leqslant m\|v(t)\| + h$ 亦然.

(10.6.1.1) 再者，当 $K=\boldsymbol{R}$ 时，f 的连续性条件可放宽为附注(10.4.6)的条件 a).

线性微分方程是指方程(10.4.1)的特殊形式：

(10.6.2) $x'=A(t)\cdot x+b(t) \qquad (=f(t,x))$,

其中 A 是 I 到 Banach 空间 $\mathscr{L}(E;E)$ 中的映射，而 $\mathscr{L}(E;E)$ 是 E 到自身中的连续线性映射空间(5.7)，b 是 I 到 E 中的映射. 这里我们有 $H=E$，并由(5.7.4)，对任意 $t\in I$ 与 E 中的 x_1，x_2，有

$$\|f(t,x_1)-f(t,x_2)\|\leqslant\|A(t)\|\cdot\|x_1-x_2\|.$$

应用(10.6.1)与其后的附注，我们可得到

(10.6.3) 设 $I\subset K$ 是以 t_0 为中心的开球. 若 $K=\boldsymbol{R}$，设 A 与 b 在 I 中是正则的；若 $K=\boldsymbol{C}$，设它们在 I 中解析. 则对每个 $x_0\in E$，存在(10.6.2)的唯一解 u，定义在 I 中且满足 $u(t_0)=x_0$.

注意，若 $b=0$，且 $x_0=0$，(10.6.2)的解 u 等于 0.

从(10.6.3)，我们容易推出显然是更为一般的结果：

(10.6.4) 如(10.6.3)同样的假设，则对每个 $s\in I$ 与 $x_0\in E$，存在(10.6.2)的唯一解 u，定义于 I 中且满足 $u(s)=x_0$.

用 $t-t_0$ 代替 t，我们可假设 $t_0=0$. 设 I 是以 r 为半径的球；则映射 $t\to r^2\dfrac{t-s}{\bar{s}t-r^2}$ 是 I 到自身上的解析同胚，映 s 到 0. 事实上，有 $t'=r^2\dfrac{t-s}{\bar{s}t-r^2}=\dfrac{r^2}{\bar{s}}\left(1-\dfrac{r^2-|s|^2}{r^2-\bar{s}t}\right)$，对 s 与 t 同乘满足 $|\zeta|=1$ 的数 ζ，便可假设 s 是正实数. 于是，对于 $|t|<r$，绝对值 $\left|1-\dfrac{r^2-s^2}{r^2-st}\right|$ 的最大值当 t 为非正实数时达到，故有 $\dfrac{r^2-s^2}{r^2+s|t|}>\dfrac{r^2-s^2}{r(r+s)}=\dfrac{r-s}{r}$，因此 $|t'|<r$. 于是我们的论断由逆关系式 $t=r^2\dfrac{t'-s}{\bar{s}t'-r^2}$ 得到. 现在，若 $A_1(t)=\dfrac{r^2(|s|^2-r^2)}{(\bar{s}t-r^2)^2}\cdot A\left(r^2\dfrac{t-s}{(\bar{s}t-r^2)}\right)$，且 $b_1(t)=\dfrac{r^2(|s|^2-r^2)}{(\bar{s}t-r^2)^2}b\left(r^2\dfrac{t-s}{\bar{s}t-r^2}\right)$，则立即可看到，如果 v 是微分方程

$$x' = A_1(t)\cdot x + b_1(t)$$

的唯一解，定义在 I 中并满足 $v(0)=x_0$，则 $u(t)=v\left(r^2\frac{t-s}{\bar{s}t-r^2}\right)$

是(10.6.2)的唯一解，定义在 I 中并满足 $u(s)=x_0$.

当 $E=K^n$ 时，$A(t)=(a_{ij}(t))$ 是 $n\times n$ 矩阵，$b(t)=(b_i(t))$ 是向量，若 $K=\boldsymbol{R}$，$a_{ij}(t)$ 与 $b_i(t)$ 在 I 中是正则的，若 $K=\boldsymbol{C}$，它们在 I 中是解析的；又若 $x=(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$，则方程(10.6.2)等价于纯量线性微分方程组

(10.6.5) $$x'_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)x_j+b_i(t)\quad(1\leqslant i\leqslant n).$$

n 阶 $(n>1)$（纯量）线性微分方程

(10.6.6) $$D^n x - a_1(t)D^{n-1}x - \cdots - a_{n-1}(t)Dx - a_n(t)x = b(t)$$

等价于(10.6.5)型的特殊组；只须对 $2\leqslant p\leqslant n$，令 $x_1=x$，$x_p=D^{p-1}x$，于是(10.6.6)等价于

(10.6.7) $$\begin{cases}x'_k = x_{k+1}, & \text{当 } 1\leqslant k\leqslant n-1,\\ x'_n = a_1(t)x_n + a_2(t)x_{n-1} + \cdots + a_n(t)x_1 + b(t).\end{cases}$$

7. 解对参数的依赖性

(10.7.1) 设 E 是 K 上的 Banach 空间，I 是 K 的开子集，H 是 E 的开子集，P 是距离空间，f 是 $I\times H\times P$ 到 E 中的映射．并设：1° 对任意 $z\in P$，$(t,x)\to f(t,x,z)$ 是 $I\times H$ 到 E 中的连续可微映射；2° f 与 D_2f 在 $I\times H\times P$ 中连续．则对任意点 $(t_0,x_0,z_0)\in I\times H\times P$，存在以 t_0 为中心的开球 $J\subset I$ 与以 z_0 为中心的开球 $T\subset P$，使对每个 $z\in T$，方程 $x'=f(t,x,z)$ 在 J 中有且仅有一个解 $t\to u(t,z)$，满足 $u(t_0,z)=x_0$．并且映射 $(t,z)\to u(t,z)$ 在 $J\times T$ 中有界而且连续．

证明非常类似于(10.4.5)．设 J_a 是以 t_0 为中心 a 为半径并含于 I 中的紧球．由(10.4.5.1)，存在以 x_0 为中心 b 为半径并含于 H

中的开球 B，与以 z_0 为中心的 P 中的开球 T，使 $\|f(t,x,z)\| \leqslant M$ 与 $\|D_2f(t,x,z)\| \leqslant k$ 在 $J_a \times B \times T$ 中成立．对于 $r < a$，设 J_r 是以 t_0 为中心 r 为半径的闭球．若 $K = \mathbf{R}$，我们定义 F_r 是 $J_r \times T$ 到 E 中的有界连续映射 y 的空间，它是一个 Banach 空间．若 $K = \mathbf{C}$，我们定义 F_r 是 $J_r \times T$ 到 E 中的映射 y 的空间，其中 y 在 J_r 中有界并连续，且使对任意 $z \in T$，$t \to y(t,z)$ 在 $\mathring{J}_r$ 中解析；由(9.12.1)，它也是一个 Banach 空间．于是，(10.4.5) 的证明中剩下部分不须改变．

对线性微分方程，有一个较好的结果(仍用 10.6 中的记号)：

(10.7.2) 设 $I \subset K$ 是以 t_0 为中心的开球；并设 A 与 b 在 $I \times P$ 中连续，且若 $K = \mathbf{C}$，使对每个 $z \in P$，$t \to A(t,z)$ 与 $t \to b(t,z)$ 在 I 中解析．对于任意 $x \in E$，设 $t \to u(t,z)$ 是 $x' = A(t,z)\cdot x + b(t,z)$ 的解，定义在 I 中并满足 $u(t_0,z) = x_0$；则 u 在 $I \times P$ 中是连续的．

设 $z_0 \in P$，并考虑以 t_0 为中心 r 为半径的任意紧球 $J \subset I$；只要证明 u 在每一点 (t,z_0) 连续就够了，其中 $t \in J$．因为 $t \to u(t,z_0)$ 在 J 中连续，故它在该紧集上有界，设在 J 中，$\|u(t,z_0)\| \leqslant M$．由(10.4.5.1)，存在 z_0 在 P 中的一邻域 U，使对 $z \in U$ 与 $t \in J$，有 $\|A(t,z)\| \leqslant k$．任给 $\varepsilon > 0$，下面让我们证明存在 z_0 在 P 中的邻域 $V \subset U$，使 $\|A(t,z)-A(t,z_0)\| \leqslant \varepsilon$ 与 $\|b(t,z)-b(t,z_0)\| \leqslant \varepsilon$ 对于 $t \in J$ 与 $z \in V$ 成立．只须注意，对任意 $s \in J$，存在 s 在 J 中的邻域 W_s 与 z_0 在 P 中的邻域 $V_s \subset U$，使前面的不等式在 $W_s \times V_s$ 中成立；于是用有限个邻域 W_{s_i} 来覆盖 J，且对于 V，取 V_{s_i} 的交集．于是可写出

$$\begin{aligned} u'(t,z) - u'(t,z_0) = {} & A(t,z)\cdot(u(t,z) - u(t,z_0)) \\ & + (A(t,z) - A(t,z_0))\cdot u(t,z_0) + b(t,z) \\ & - b(t,z_0), \end{aligned}$$

因此，对 $t \in J$ 与 $z \in V$，有

$$\begin{aligned} \|u'(t,z) - u'(t,z_0)\| \leqslant {} & k\cdot\|u(t,z) \\ & - u(t,z_0)\| + \varepsilon(M+1). \end{aligned}$$

令 $t = t_0 + \lambda\xi$，其中 $|\lambda| = 1$，$0 \leqslant \xi \leqslant r$，并记 $w(\xi) = \|u(t_0 + \lambda\xi, z) - u(t_0 + \lambda\xi, z_0)\|$；于是由中值定理，我们有 $w(\xi) \leqslant \varepsilon(M + 1)r + k\int_0^{\xi} w(\zeta)d\zeta$，其中 $0 \leqslant \xi \leqslant r$，再利用(10.5.1.3)，得到 $w(\xi) \leqslant \varepsilon(M + 1)re^{kr}$ 对 $0 \leqslant \xi \leqslant r$ 成立，换句话说，对于 $t \in J$ 与 $z \in V$，有 $\|u(t, z) - u(t, z_0)\| \leqslant \varepsilon(M + 1)re^{kr}$；因 ε 是任意的，(10.7.2)得证(因 $t \to u(t, z_0)$ 在 J 中连续).

(10.7.3) 除(10.7.1)的假设之外，再设 P 是 Banach 空间 G 的一开子集，且 1° 若 $K = \boldsymbol{R}$，设 f 在 $I \times H \times P$ 中连续可微，2° 若 $K = \boldsymbol{C}$，设 f 在 $I \times H \times P$ 中二次连续可微(当 E 与 G 是有限维时，这等价于 f 在 $I \times H \times P$ 中解析(9.10.1). 并且设 $J \subset I$ 是以 t_0 为中心的开球，$T \subset P$ 是以 z_0 为中心的开球，使对每个 $z \in T$，存在 $x' = f(t, x, z)$ 的一个解 $t \to u(t, z)$ (由(10.5.2)它必定是唯一的)，定义在 J 中，满足 $u(t_0, z) = x_0$，且在 $J \times T$ 中连续且有界(10.7.1). 则 $(t, z) \to u(t, z)$ 在 $J \times T$ 中连续可微. 进而，对任意 $z \in T$，$t \to D_2u(t, z)$ 在 J 中等于线性微分方程

(10.7.3.1) $U' = A(t, z)\circ U + B(t, z)$

的解 $U(t, z)$，满足 $U(t_0, z) = 0$，这里 $A(t, z) = D_2f(t, u(t, z), z)$，而 $B(t, z) = D_3f(t, u(t, z), z)$.

问题在 $J \times T$ 中是局部的，因而我们固定一个点 $t \in J$ 与一个点 $z \in T$. 设 J_1 是以 t_0 为中心 r 为半径且包含 t 的开球，满足 $\bar{J}_1 \subset J$. 我们首先将证明，存在以 z 为中心的充分小球与 $C > 0$，使得对 $s \in J_1$ 与 T_1 中的 z_1，z_2，我们有

(10.7.3.2) $\|u(s, z_1) - u(s, z_2)\| \leqslant C\|z_1 - z_2\|$.

为此，考虑一点 $\sigma \in \bar{J}_1$. 据(10.4.5.1)，存在以 $u(\sigma, z)$ 为中心的开球 S_σ 与以 z 为中心的开球 $T_\sigma \subset T$，使 D_2f 与 D_3f 在 $\bar{J}_1 \times S_\sigma \times T_\sigma$ 有界，设

$$\|D_2f(s, x_1, z_1)\| \leqslant a_\sigma, \quad \|D_3f(s, x_1, z_1)\| \leqslant b_\sigma.$$

由(8.5.2)与(8.9.1)，我们有

(10.7.3.3) $\|f(s, x_1, z_1) - f(s, x_2, z_2)\| \leqslant a_\sigma\|x_1 - x_2\| + b_\sigma\|z_1 - z_2\|$

对 $s\in\bar{J}_1$，S_σ 中的 x_1, x_2 与 T_σ 中的 z_1, z_2 成立. 设 V_σ 是含于 J 中的以 σ 为中心的球，设 T'_σ 是 T_σ 中以 z 为中心的充分小的球，使得对于 $s\in V_\sigma$ 与 $z_1\in T'_\sigma$，有 $u(s,z_1)\in S_\sigma$. 那么，由(10.5.1)得到，对于 $s\in V_\sigma$ 与 T'_σ 中的 z_1, z_2，我们有

$$\|u(s, z_1)-u(s, z_2)\|\leqslant c_\sigma\|z_1-z_2\|,$$

其中 $c_\sigma=b_\sigma(e^{a_\sigma r}-1)/a_\sigma$. 为得到(10.7.3.2)，现在只须用有限个球 $V_{\sigma i}$ 覆盖 $\bar{J}_1$，使 T_1 等于 T'_{σ_i} 的交，而 c 等于数 c_{σ_i} 中最大者即可.

其次证明，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对每个 $w\in P$，满足 $z+w\in T_1$，$\|w\|\leqslant\rho$ 与任意 $s\in J_1$，我们有

(10.7.3.4) $\|f(s, u(s, z+w), z+w)-f(s, u(s, z), z)-A(s,z)\cdot(u(s,z+w)-u(s, z))-B(s, z)\cdot w\|\leqslant\varepsilon\|w\|.$

事实上，利用(8.6.2)，(8.9.1)，D_2f 与 D_3f 在 $I\times H\times P$ 中的连续性以及关系式(10.7.3.2)，对任意 $\sigma\in\bar{J}_1$，存在 σ 在 $\bar{J}_1$ 中的邻域 W 与数 $\rho(\sigma)>0$，使关系式 (10.7.3.4) 对 $s\in W_\sigma$ 与 $\|w\|\leqslant\rho(\sigma)$ 成立；用有限多个 W_{σ_i} 覆盖 $\bar{J}_1$ 后，只须取使(10.7.3.4)成立的 $\rho(\sigma_i)$ 中最小的 ρ. 由于 $u(s,z)$ 的定义，(10.7.3.4)也可写为

(10.7.3.5) $\|D_1u(s, z+w)-D_1u(s, z)-A(s, z)\cdot(u(s, z+w)-u(s,z))-B(s,z)w\|\leqslant\varepsilon\|w\|.$

另一方面，(10.6.3) 保证了在 $J\times T$ 中满足所述条件的 $U(t, z)$ 的存在性(当 $K=\mathbf{C}$ 时，即函数 D_2f 与 D_3f 是可微性的假设). 令

(10.7.3.6) $v(s, z, w)=u(s, z+w)-u(s,z)-U(s,z)\cdot w;$

这个函数有关于 s 的导数且由(10.7.3.1)，它等于

$$D_1v(s,z,w)=D_1u(s,z+w)-D_1u(s,z)-A(s,z)\cdot(U(s,z)\cdot w)-B(s,z)\cdot w.$$

因此关系式(10.7.3.5)可改写为

$$\|D_1v(s,z,w)-A(s,z)\cdot v(s,z,w)\|\leqslant\varepsilon\|w\|,$$

它对任意 $s\in J$ 与满足 $z+w\in T$ 及 $\|w\|\leqslant\rho$ 的任意 w 成立. 换句话说，$s\to v(s,z,w)$ 是线性微分方程

(10.7.3.7) $y'=A(s,z)\cdot y$

在 J_1 中的具有逼近度 $\varepsilon\|w\|$ 的近似解．并且由定义我们有 $v(t_0, z, w)=0$．另一方面，前面给出的 T_1 的定义表明，如果 a 是数 a_σ 中最大者，则在 $J_1\times T_1$ 中成立 $\|A(s,z)\|\leqslant a$，故从(10.5.1)得出(因 0 是(10.7.3.7)的解)

$$\|v(s,z,w)\|\leqslant c_0\varepsilon\|w\|,$$

这里 $c_0=(e^{ar}-1)/a$，这个不等式对任意 $s\in J_1$ 与满足 $z+w\in T_1$ 及 $\|w\|\leqslant\rho$ 的任意 w 成立．因 ε 是任意的，函数导数的定义表明 u 在任意点 $(t,z)\in J\times T$ 关于 z 是可微的，且 $D_2u(t,z)=U(t,z)$．

最后，由假设与(10.7.2)得到，U 在 $J\times T$ 中连续；另一方面，由(10.7.1)，$D_1u(t,z)=f(t,u(t,z),z)$ 在 $J\times T$ 中连续．因此，由(8.9.1)，u 在 $J\times T$ 中连续可微，(10.7.3)得证．

(10.7.4) 设 $K=\boldsymbol{R}$，且设 f 在 $I\times H\times P$ 中是 p 次连续可微的(相应地，f 是无限次可微的)．则使用(10.7.3)的记号，u 在 $J\times T$ 中 p 次连续可微(相应地，无限次可微)．

若 $p=1$，这就是(10.7.3)．对 p 用归纳法，假设我们已经对 $(p-1)$ 次连续可微映射证明了所需的结果．则在(10.7.3.1)右边，A 与 B 是 $J\times T$ 中的 $p-1$ 次连续可微映射(由(8.12.10))；因此，由(10.7.3)(应用于 $U(t,z)$)，$D_2u(t,z)$ 在 $J\times T$ 中是 $p-1$ 次连续可微的(当 T 已被容易地选定)．另一方面，由归纳法假设与(8.12.10)，$D_1u(t,z)=f(t,u(t,z),z)$ 在 $J\times T$ 中也是 $p-1$ 次连续可微的；于是，由(8.9.1)，(8.12.9)与(8.12.10)，$Du(t,z)$ 在 $J\times T$ 中 $p-1$ 次连续可微；但由(8.12.5)，这表明 u 在 $J\times T$ 中 p 次连续可微．当 E 与 G 是有限维而 f 是无限次可微时，由(3.17.10)得知，在前面的论证中，可以选择与 p 无关的 T，因 f 的所有导数是连续的；因此 u 在 $J\times T$ 中无限次可微．

注意．在(10.7.4)中，可用包含点 t_0 的任一开区间代替 J_1，而用包含 t_0 且满足 $\bar{J}\subset J_1$ 的开区间代替 J．

(10.7.5) 设 E 与 G 是有限维 Banach 空间，f 在 $I\times H\times P$ 中解析．使用(10.7.3)的记号，则 u 在 $J\times T$ 中解析．

若 $K=\boldsymbol{C}$，结论可直接从(10.7.1)，(10.7.3)，(9.10.1)与(9.9.4)得出． 若 $K=\boldsymbol{R}$，我们可应用完全类似于(10.5.3)的论证，因而将它略去．

(10.7.6) **附注．** 对前面的定理有几种改进与变形． 例如，在(10.7.3)中，当 $K=\boldsymbol{R}$ 时，为保证 $D_2u(t,z)$ 存在，并不需要 D_1f 的存在性：我们只需要作为 (x,z) 的函数 D_2f 与 D_3f 的连续性与它们在 $J\times H\times T$ 中的所有点的邻域上的有界性，以及下述事实，对 I 中任意连续函数 h，$t\to f(t,h(t),z)$ 在 I 中是正则的，且对 D_2f 与 D_3f 也类似．

问　　题

1) 使用 10.4 节的记号，设 I 是 K 中以 t_0 为中心、a 为半径的开球，S 是 E 中以 x_0 为中心 r 为半径的开球，G 是赋范空间 $\mathscr{C}_E^\infty(I\times S)$ (7.2 节). 对每个 $M>0$，设 G_M 是 G 中的球 $\|f\|\leqslant M$. 设 L 是 G 这样的子集，它由 $I\times S$ 到 E 中的一切连续 Lipschitz 映射组成(10.5.4)；对每个 $M>0$，设 J_M 是以 t_0 为中心、$\inf(a,r/M)$ 为半径的开球；对每个函数 $f\in L\cap G_M$，方程 $x'=f(t,x)$ 有唯一解 $u=U(f)$，取值于 S 内，定义在 J_M 中且满足 $u(t_0)=x$ (10.5 节，问题 6c)).

a) 设 (f_n) 是属于 $L\cap G_M$ 的函数序列，并设 f_n 在 $I\times S$ 中一致收敛于函数 f；试证，在空间 $\mathscr{C}_E^\infty(J_M)$ 中，函数列 $u_n=U(f_n)$ 的每个聚点是 $x'=f(t,x)$ 的解，取值于 S 内，且当 $t=t_0$ 时等于 x_0 (用(10.4.3)与(8.7.8))．给出一例，使序列 (u_n) 在 $\mathscr{C}_E^\infty(J_M)$ 中没有触点．(参看 10.5 节，问题 5)．

b) 再设 E 是有限维的；利用 a) 的结果，试给出 Peano 定理一个新证明 (10.5 节问题 4b)；用 Ascoli 定理(7.5.7)与 Weierstrass 逼近定理(7.4.1))．

2) a) 在 $\boldsymbol{R}^2$ 内多圆柱 P：$|t-t_0|<a$，$|x-x_0|<b$ 中，设 g，h 是 P 中满足 $g(t,x)<h(t,x)$ 的两个实值连续函数． 并设 u (相应地，v)是 $x'=g(t,x)$ (相应地，$x'=h(t,x)$) 的解，定义在区间 $[t_0,t_0+c[$ 中，取值于 $]x_0-b,x_0+b[$ 内，并满足 $u(t_0)=x_0$ (相应地，$v(t_0)=x_0$)；试证对 $t_0<t<t_0+c$，有 $u(t)<v(t)$．(考虑 $[t_0,t_0+c[$ 中这样的点 s 的上确界：使得 $u(t)<v(t)$ 对 $t_0<t<s$ 成立)．

b) 设 g 在 P 中是连续的并是实值的，又设 u 是 $x'=g(t,x)$ 的相应于 (t_0,x_0) 的最大解(10.5 节，问题 7)；还设 u 定义在(至少是)区间 $[t_0,t_0+c[$

中，取值于 $]x_0-b,x_0+b[$ 内，试证，在每个含于 $[t_0,t_0+c[$ 的紧区间 $[t_0,t_0+d]$ 中，$x'=g(t,x)+\varepsilon$ 的最大解与最小解有定义，并取值于 $]x_0-b,x_0+b[$ 中，只要 $\varepsilon>0$ 足够小，且当 ε 趋于 0 时它们一致收敛于 u.（给定 $\varepsilon_0>0$，存在 $s>t_0$ 使所有方程 $x'=g(t,x)+\varepsilon$，$0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$，相应于$(t_0,x_0)$的最大解与最小解有定义并对 $t\in[t_0,s]$ 取值于 $]x_0-b,x_0+b[$ 内；注意，所有这些函数形成 $[t_0,s]$ 中的等度连续集，应用 a) 的结果，Ascoli 定理(7.5.7)，(10.4.3) 与 (8.7.8)，证明它们在 $[t_0,s]$ 中一致收敛于 u. 最后，证明具有所述性质数 d 的上确界必等于 c，这可特别地利用 10.5 节，问题 7 的最后的叙述）.

c) 在多圆柱 P 中，设 g 与 h 是两个实值连续函数，在 P 中满足 $g(t,x)\leqslant h(t,x)$. 设 $[t_0,t_0+c]$ 是这样的区间：在其中 $x'=g(t,x)$ 的解 u 满足 $u(t_0)=x_0$，并且 $x'=h(t,x)$ 的相应于点 (t_0,x_0) 的最大解 v 有定义并取值于 $]x_0-b,x_0+b[$ 内. 试证，对 $t_0\leqslant t\leqslant t_0+c$，有 $u(t)\leqslant v(t)$.（应用 a) 与 b)）.

3) a) 试证，10.5 节，问题 6a) 的结论当 E 是有限维时仍然正确，并且对假设应作如下的修正：1°设 f 在 $I\times H$ 中连续(当 $K=R$)，但不必是局部 Lipschitz 的；2° φ 是方程 $x'=h(s,x)$ 在 $[0,\alpha]$ 中相应于点$(0,0)$的最大解(10.5 节，问题 7).（利用问题 1a) 与 2b) 的结果，并应用 10.5 节，问题 4b) 中的对角线法）.

b) 此外，再假设存在实值函数序列 $(Y_n)_{n\geqslant0}$，在 $[0,\alpha]$ 中连续，取值于 $[0,r]$ 内，并使对 $n\geqslant1$，有 $Y_n(s)=\int_0^s h(\xi,Y_{n-1}(\xi))d\xi$，而 $0\leqslant s\leqslant\alpha$. 若 $K=\boldsymbol{R}$，设 y_0 在 J 中连续；若 $K=\boldsymbol{C}$，设 y_0 在 J 中解析，取值于 S 内，并在 J 中满足 $\|y_0(t)-x_0\|\leqslant Y_0(|t-t_0|)$. 试证，存在 J 到 S 中的映射序列 $(y_n)_{n\geqslant1}$，当 $K=\boldsymbol{R}$ 时，它们连续；而当 $K=\boldsymbol{C}$ 时，它们解析，且对每个 $n\geqslant1$，$y_n(t)=x_0+\int_{t_0}^t f(\theta,y_{n-1}(\theta))d\theta$，$\|y_n(t)-x_0\|\leqslant Y_n(|t-t_0|)$ 在 J 中成立. 当 $K=\boldsymbol{C}$ 时，证明序列 (y_n) 在 J 中（在 J 的每个紧子集中一致地)收敛于 $x'=f(t,x)$ 的唯一解 u.（利用(9.13.2)与(10.4.5)的证明.）上面最后的陈述，当 $K=\boldsymbol{R}$ 而且不设 f 是局部 Lipschitz 的，是否仍然正确？（参看 10.5 节，问题 2）.

4) a) 设 $I=[t_0,t_0+c[\subset\boldsymbol{R}$，并设 $\omega\geqslant0$，是实值连续函数，定义在 $I\times\boldsymbol{R}$ 中. 设 S 是 E 中以 x_0 为中心的开球，而 f 是 $I\times S$ 到 E 中的连续映

射，使对 $t\in I$, $s_1\in S$, $s_2\in S$, 有

$$\|f(t,s_1)-f(t,s_2)\|\leqslant\omega(t,\|s_1-s_2\|).$$

再设 u, v 是 $x'=f(t,x)$ 的两个解，定义在 I 中，取值于 S 内，并满足 $u(t_0)=x_1$, $v(t_0)=x_2$; 还设 w 是 $z'=\omega(t,z)$ 的相应于 $(t_0,\|x_1-x_2\|)$ 的最大解(10.5 节，问题 7)，而且 w 定义在 I 中；试证，在 I 中有 $\|u(t)-v(t)\|\leqslant w(t)$. (对于小的 $\varepsilon>0$, 考虑 $z'=\omega(t,z)+\varepsilon$ 的相应于 $(t_0,\|x_1-x_2\|)$ 的最大解 $w(t,\varepsilon)$, 定义在 $[t_0,t_0+d]$ 中，而若 $d<c$ 且 ε 足够小时(问题 2)；并证明对于 $t_0\leqslant t\leqslant t_0+d$, 有 $\|u(t)-v(t)\|\leqslant w(t,\varepsilon)$, 用反证法，考虑这样的点 t 的下确界 t_1: $\|y(t)\|>w(t,\varepsilon)$, 其中 $y(t)=u(t)-v(t)$, 并注意对 $t>t_1$ 有

$$\|y(t)\|-\|y(t_1)\|\leqslant\|y(t)-y(t_1)\|\leqslant\sup_{t_1<s<t}\|y'(s)\|\cdot(t-t_1).)$$

b) 设 $I'=]t_0-c,t_0]$, 并设当用 I' 代替 I 时，a) 的假设成立. 再设 w 是 $z'=\omega(t,z)$ 的相应于 $(t_0,\|x_1-x_2\|)$ 的最小解，定义在 I' 中；试证，在 I' 中，$\|u(t)-v(t)\|\geqslant w(t)$ (同样的方法).

5) a) 设 I 是 $\boldsymbol{R}$ 中的开区间 $]0,a[$, ω 是 $I\times[0,+\infty[$ 中的连续函数，使 $\omega(t,z)\geqslant 0$, $\omega(t,0)=0$ 对 $t\in I$ 成立；可以利用条件 $\omega(t,-z)=\omega(t,z)$, 对 $z<0$, 把 ω 延拓到 $I\times\boldsymbol{R}$ 中. 我们还假设，若 w 是 $z'=\omega(t,z)$ 的解，定义在开区间 $]0,\alpha[\subset I$ 中，并使 w 借助于取 $w(0)=0$ 可连续地延拓到半开区间 $[0,\alpha[$ 中，且再加上 $w'(0)$ 有定义且等于 0，因而 $w(t)=0$ 在 $]0,\alpha[$ 中必须恒成立. 最后再设 S 是实 Banach 空间 E 中以 x_0 为中心的开球，f 是 $[0,a[\times S$ 到 E 中的连续映射，使对 $0<t<a$ 与 S 中的 x_1, x_2, 有 $\|f(t,x_1)-f(t,x_2)\|\leqslant\omega(t,\|x_1-x_2\|)$. 试证，在区间 $[0,\alpha]$ 中，$\alpha<a$, $x'=f(t,x)$ 至多有一个解 u, 满足 $u(0)=x_0$. (用反证法：若 v 是满足 $v(0)=x_0$ 的第二个解，使 $\|u(t)-v(t)\|$ 在 $]0,\alpha]$ 中极小化，再利用问题 4b)).

b) 设 $\theta(t)$ 是定义于 $]0,a[$ 的有界、连续函数，且 $\theta(t)\geqslant 0$. 试证，若积分 $\int_0^a\frac{\theta(t)}{t}dt$ 是收敛的，则 a) 的结果可应用于 $\omega(t,z)=\frac{1+\theta(t)}{t}z$; 若反之，$\int_0^a\frac{\theta(t)}{t}dt=+\infty$, 则给出 $[0,a[\times\boldsymbol{R}$ 中一个实值连续函数 f 的例子，使 $|f(t,x_1)-f(t,x_2)|\leqslant\frac{1+\theta(t)}{t}|x_1-x_2|$, 且方程 $x'=f(t,x)$ 在 $[0,a[$ 中有无穷多个解，它们在 $t=0$ 时等于 0. (设 $\varphi(t)=\exp\left(-\int_t^a\frac{1+\theta(s)}{s}ds\right)$;

定义 $f(t,x)$：当 $|x|\leqslant\varphi(t)$ 时等于 $(1+\theta(t))x/t$，而当 $|x|\geqslant\varphi(t)$ 时与 x 无关.)

6）设 I 是 $\boldsymbol{R}$ 中的开区间，H 是 $\boldsymbol{R}$ 上的 Banach 空间 E 中的开子集. 并设 t_0 是 I 中的一点.

a）设 f 在 $I\times H$ 中连续，并存在一数 k，$0<k<1$，对任意的 $t\neq t_0$ 与 H 中任意的 x_1，x_2，有

$$\|f(t,x_1)-f(t,x_2)\|\leqslant\frac{k}{|t-t_0|}\|x_1-x_2\|.$$

试证，$x'=f(t,x)$ 至多存在一个解，在 $t=t_0$ 取给定的值 $x_0\in H$，并且定义在 t_0 的一邻域中(问题 5a)). 但若再设 u，v 是 $x'=f(t,x)$ 的分别具有逼近度 ε_1，ε_2 的两个近似解，在含于 I 中以 t_0 为中心的开球 J 内，还满足 $u(t_0)=v(t_0)=x_0$，则对任意 $t\in J$，有

$$\|u(t)-v(t)\|\leqslant\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{1-k}|t-t_0|.$$

(用与(10.5.1)中相同的方法).

b）设 $I=]-1,1[$，$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{E}=\boldsymbol{R}$，并设 Φ 是所有这样实值函数 f 的集：它们在 $I\times H$ 中连续，并使对 I 中的 $t\neq 0$，有 $|f(t,x_1)-f(t,x_2)|\leqslant|x_1-x_2|/|t|$. 则 $x'=f(t,x)$ 至多存在一个解，在 $t=0$ 取给定的值，并且定义在 0 的一邻域中(问题 5a)). 再证明，不存在这样的函数 $\varphi(t,\varepsilon)\geqslant 0$：对任意方程 $x'=f(t,x)$，$f\in\Phi$，以及它的任意一对具有逼近度 ε 的近似解 (u,v)，对每个 $t\in I$，成立关系式 $\|u(t)-v(t)\|\leqslant\varphi(|t|,\varepsilon)$，其中 u 与 v 定义在 I 中并满足 $u(0)=v(0)$. (对任意 $\alpha\in]0,1[$，设 f 连续，且当 $|x|\leqslant t^2/(\alpha-t)$，$0\leqslant t<\alpha$ 时；它等于 x/t；当 $t\geqslant\alpha$，x 任意时，也等于 x/t；当 $t\geqslant 0$，x 取其他值时，$f(t,x)$ 与 x 无关；而且对 $t\leqslant 0$，定义 $f(t,x)=f(-t,x)$. 取 $u=0$；并设当 $|t|\leqslant\alpha$ 时，$v(t)=\varepsilon t$，而对其他 t 值，取 v 为 $x'=f(t,x)+\varepsilon$ 的解.)

7）使用 10.4 节的那些符号，设 E 是有限维的，f 在 $I\times H$ 中连续；设 (t_0,x_0) 是 $I\times H$ 中的点，J 是含于 I 中并以 t_0 为中心的开球，S 是以 x_0 为中心的开球，满足 $\bar{S}\subset H$. 设 f 在 $J\times S$ 中有界并满足下面的条件：

1° $x'=f(t,x)$ 至多存在一个解，定义在含于 J 并包含 t_0 点的开区间中，当 $t=t_0$ 时取值 x_0.

2° 存在 J 到 S 中的连续映射序列 $(u_n)_{n\geqslant 0}$，对 $n\geqslant 1$ 与 $t\in J$，有 $u_n(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,u_{n-1}(s))ds$.

3° 对每个 $t\in J$，当 $n\to+\infty$ 时，$u_{n+1}(t)-u_n(t)$ 收敛于 0.

试证：在每个包含 t_0 的紧区间 $J'\subset J$ 中，序列 (u_n) 一致收敛于 $x'=f(t,x)$ 的解，而它在 $t=t_0$ 时等于 x_0。（注意，序列 (u_n) 等度连续；用 Ascoli 定理(7.5.7)以及(3.16.4)与(8.7.8).）

8）设 E 是有限维的，ω 与 f 满足问题 5a)的条件，此外再设，对于每个 $t\in]0,a[$，函数 $z\to\omega(t,z)$ 在 $[0,+\infty[$ 中递增. 则 $x'=f(t,x)$ 至多存在一个解，定义在区间 $[0,\alpha[\subset[0,a[$ 中，当 $t=0$ 时取值 x_0（问题 5a)）. 若再附加假设，在开区间 $J=[0,\alpha[\subset[0,a[$ 中，存在 J 到 S 中的连续映射序列 $(u_n)_{n\geqslant 0}$，使对 $n\geqslant 1$ 与 $t\in J$ 有

$$u_n(t)=x_0+\int_0^t f(s,u_{n-1}(s))ds.$$

a）对每个 $t\in J$，设 $y_n(t)=\|u_{n+1}(t)-u_n(t)\|$，$z_n(t)=\sup\limits_{k\geqslant 0}y_{n+k}(t)$ 与 $w(t)=\inf\limits_{n\geqslant 0}z_n(t)$. 试证函数 z_n 与 w 在 J 中连续.（用 7.5 节问题 11).

b）设 $t,t-h$ 是 J 中的两个点 $(h>0)$；试证，对每个 $\delta>0$，存在 N，使当 $n\geqslant N$ 时有

$$|y_n(t)-y_n(t-h)|\leqslant\int_{t-h}^t\omega(s,w(s)+\delta)ds.$$

（用中值定理(8.5.1)，以及(7.5.5)).

c）从 b）推出，对 $n\geqslant N$，有

$$|z_n(t)-z_n(t-h)|\leqslant\int_{t-h}^t\omega(s,w(s)+\delta)ds.$$

（依次考虑 $z_n(t)\leqslant z_n(t-h)$ 与 $z_n(t)\geqslant z_n(t-h)$ 的情形）. 因此，$|w(t)-w(t-h)|\leqslant\int_{t-h}^t\omega(s,w(s))ds$（由(8.7.8)).

d）推证：在 J 中，$w(t)=0$（如问题 4b）与问题 5a）同样地论证)，并利用问题 7，证明序列 (u_n) 在 J 中一致收敛于 $x'=f(t,x)$ 的解，而它当 $t=0$ 时取值 x_0.

9）使用 10.4 节中那些记号，设 E 是有限维的，f 在 $I\times H$ 中连续并有界. 再设 $x'=f(t,x)$ 至多存在一个解，定义在任一包含 t_0 的开区间 $J\subset I$ 中，且当 $t=t_0$ 时等于 $x_0\in H$. 此外再假设，对任意整数 $n>0$，存在 $x'=f(t,x)$ 的具有逼近度 $1/n$ 的近似解 u_n，定义在 I 中并取值于 H 内，且满足 $u_n(t_0)=x_0$. 试证，在任一含于 I 的紧区间内，序列 (u_n) 一致收敛于 $x'=f(t,x)$ 的解 u，它取值于 H 内并满足 $u(t_0)=x_0$（用问题 7 相同的论证).

8. 解对初始条件的依赖性

(10.8.1) 若 $K=\boldsymbol{R}$，设 f 在 $I\times H$ 中是局部 Lipschitz 的(10.5.4)，若 $K=\boldsymbol{C}$，设 f 在 $I\times H$ 中连续可微．则对任意点 $(a, b)\in I\times H$，有：

a) 存在以 a 为中心的开球 $J\subset I$ 与以 b 为中心的开球 $V\subset H$，使对每个点 $(t_0, x_0)\in J\times V$，(10.4.1)存在定义于 J 中，取值于 H 内唯一的解 $t\to u(t, t_0, x_0)$，并满足 $u(t_0, t_0, x_0)=x_0$.

b) 映射 $(t, t_0, x_0)\to u(t, t_0, x_0)$ 在 $J\times J\times V$ 中一致连续．

c) 存在以 b 为中心的开球 $W\subset V$，对任意点 $(t, t_0, x_0)\in J\times J\times W$，方程 $x_0=u(t_0, t, x)$ 在 V 中有唯一解 $x=u(t, t_0, x_0)$.

a) 由假设，存在以 a 为中心的球 $J_0\subset I$ 与以 b 为中心 r 为半径的球 $B_0\subset H$，使在 $J_0\times B_0$ 中，$\|f(t, x)\|\leqslant M$，且对 $t\in J_0$ 与 B_0 中的 x_1, x_2，有 $\|f(t, x_1)-f(t, x_2)\|\leqslant k\cdot\|x_1-x_2\|$. 由(10.4.5)，存在以 t_0 为中心的开球 $J_1\subset J_0$ 与 (10.4.1) 的唯一解 v，它定义在 J_1 中取值于 H 内并满足 $v(a)=b$. 我们将看到，以 b 为中心 $r/2$ 为半径的开球 V 与以 a 为中心 ρ 为半径的开球 J，满足我们的要求，只要 ρ 足够小．应用(10.5.6)于 $\alpha=\beta=0$ 的情形；这就证明了(10.4.1)存在唯一的解，定义在 J 中，取值于 B_0 内，且在 $t_0\in J$ 处等于 $x_0\in V$，如果我们对每个 $t\in J$，有

(10.8.1.1) $\quad \|v(t)-b\|+\|v(t_0)-x_0\|e^{k|t-t_0|}<r.$

但由中值定理，对每个 $t\in J$，我们有

$$\|v(t)-b\|\leqslant M|t-a|\leqslant M\rho;$$

因为由假设 $\|x_0-b\|\leqslant r/2$，如果 ρ 满足

(10.8.1.2) $\quad M\rho+\left(M\rho+\dfrac{r}{2}\right)e^{2k\rho}<r,$

则不等式(10.8.1.1)将满足，而对 $\rho>0$ 的足够小的值，(10.8.1.2)一定能满足，因为当 ρ 趋于 0 时，(10.8.1.2)左边趋于 $r/2$.

b) 由中值定理，对 J 中的 t_0, t_1, t_2 与 V 中的 x_0，我们有

(10.8.1.3) $\|u(t_1,t_0,x_0)-u(t_2,t_0,x_0)\|\leqslant M|t_2-t_1|$.

由(10.5.1),对 J 中的 t, t_0 与 V 中的 x_1, x_2, 有

(10.8.1.4) $\|u(t,t_0,x_1)-u(t,t_0,x_2)\|\leqslant e^{2k\rho}|x_2-x_1|$.

最后,当 $t_0=t_2$ 时,由定义,(10.8.1.3)成为

$$\|u(t_1,t_2,x_0)-x_0\|\leqslant M|t_2-t_1|,$$

且因 $t\to u(t,t_2,x_0)$ 是(10.4.1)在 J 中的唯一解,在 t_1 点等于 $u(t_1,t_2,x_0)$,由(10.5.1)我们有

(10.8.1.5) $\|u(t,t_1,x_0)-u(t,t_2,x_0)\|\leqslant Me^{2k\rho}|t_2-t_1|$

对 J 中的 t, t_1, t_2 与 $x_0\in V$ 成立.三个不等式(10.8.1.3),(10.8.1.4)与(10.8.1.5)证明了 u 在 $J\times J\times V$ 中是一致连续的.

c) 由(10.8.1.3),在 $J\times J\times V$ 中我们有 $\|u(t,t_0,x_0)-x_0\|\leqslant M|t-t_0|\leqslant 2M\rho$. 设 ρ 满足(10.8.1.2)与附加的不等式 $2M\rho<r/4$; 则若W是以 b 为中心 $r/4$ 为半径的开球,对 J 中的 t, t_0 与 $x_0\in W$, 有 $u(t,t_0,x_0)\in V$. 设对 t, t_0, x_0 这样的值, $x=u(t,t_0,x_0)$; 则 $s\to u(s,t,x)$ 定义在 J 中并且是(10.4.1)的唯一解,取值于H内并在 t 点取初值 x; 但因 $s\to u(s,t_0,x_0)$ 具有这些性质,因此对 $s\in J$, 有 $u(s,t,x)=u(s,t_0,x_0)$; 特别地, $x_0=u(t_0,t_0,x_0)=u(t_0,t,x)$. 现在设 $y\in V$ 使 $u(t_0,t,y)=x_0$; 则 $s\to u(s,t,y)$ 是(10.4.1)的解,定义在 J 中,当 $s=t_0$ 时取值 x_0; 因此,对任意 $s\in J$, $u(s,t,y)=u(s,t_0,x_0)$, 特别地,当 $s=t$ 时, $y=u(t,t_0,x_0)=x$. 证毕.

(10.8.2) 使用(10.8.1)的记号,设 f 在 $I\times H$ 中是 p 次连续可微的(相应地,E 是有限维的, 而 f 是无限次可微的; E 是有限维的而 f 是解析的). 则取这样的 J 与 V,使函数 $(t,t_0,x_0)\to u(t,t_0,x_0)$ 在 $J\times J\times V$ 中是 p 次连续可微的(相应地,无限次可微的;解析的)是可能的.

事实上,若我们记 $v(s,t_0,x_0)=u(t_0+s,t_0,x_0)-x_0$, 则 $s\to v(s,t_0,x_0)$ 是方程

$$z'=f(t_0+s,x_0+z)$$

的解,在点 $s=0$ 取 0 值;于是结果由(10.7.4)与(10.7.5)得出.

对线性微分方程，有更精确的结果，方程

(10.8.3) $x' = A(t) \cdot x$

称为相应于(10.6.2)的**齐次线性微分方程**；(10.6.2)在 I 中的任意两个解的差都是(10.8.3)在 I 中的解，而(10.8.3)在 I 中的解构成 I 到 E 中所有连续映射空间 $\mathscr{C}_E(I)$ 的向量子空间 $\mathscr{H}$.

(10.8.4) 对每个 (s, x_0)，设 $t \to u(t, s, x_0)$ 是 (10.8.3) 定义在 I 中并满足 $u(s, s, x_0) = x_0$ 的唯一解.

1° 对每个 $t \in I$，映射 $x_0 \to u(t, s, x_0)$ 是 E 到自身上的线性同胚 $C(t, s) \in \mathscr{L}(E)$.

2° I 到 Banach 空间 $\mathscr{L}(E)$ 中的映射 $t \to C(t, s)$ 等于线性齐次微分方程

(10.8.4.1) $U' = A(t) \circ U$

的解，当 $t = s$ 时，它等于 I_E (E 的恒同映射).

3° 对 I 中任意三个点 r, s, t，有

(10.8.4.2) $C(r, t) = C(r, s) \circ C(s, t)$ 与 $C(s, t) = (C(t, s))^{-1}$.

很清楚，$u(t, s, x_1) + u(t, s, x_2)$ (相应地，$\lambda u(t, s, x_0)$) 是 (10.8.3) 的解，当 $t = s$ 时它等于 $x_1 + x_2$ (相应地，λx_0)；因此由(10.6.4)，它在 I 中等于 $u(t, s, x_1 + x_2)$(相应地，$u(t, s, \lambda x_0)$)，这就证明了映射 $x_0 \to u(t, s, x_0)$ 是线性的；记它为 $C(t, s)$ (我们还设有证明这个映射在 E 中是连续的).

于是，$\mathscr{L}(E) \times \mathscr{L}(E)$ 到 $\mathscr{L}(E)$ 中的双线性映射 $(X, Y) \to X \circ Y$ 是连续可微的(8.1.4)；用 $R(t)$ 记 $\mathscr{L}(E)$ 到自身中的连续线性映射 $U \to A(t) \circ U$. 从(5.7.5)立即得出

$$\|R(t) - R(t')\| \leqslant \|A(t) - A(t')\|,$$

因此，当 $K = \boldsymbol{R}$ 时，若 $t \to A(t)$ 是正则的，则 $t \to R(t)$ 也是正则的. 另一方面，若 $t \to A(t)$ 可微，则 $t \to R(t)$ 亦然，并且它在点 t 的导数(等同于 $\mathscr{L}(E)$ 中的一元素(8.4))是映射 $U \to A'(t) \circ U$ ((8.1.3)与(8.2.1))；因此若 $t \to A'(t)$ 连续，则 $t \to R'(t)$ 亦然. 于是可得出，若 $K = \boldsymbol{C}$，且 $t \to A(t)$ 在 I 中解析，则 $t \to R(t)$ 亦然(9.10.1). 在任何情形下，我们都可应用 (10.6.4) 于方

程(10.8.4.1)；设 $V(t)$ 是该方程当 $t=s$ 时等于 I_E 的解．对任意 $t\in I$，我们有((8.1.3)与(8.2.1))

$$D(V(t)\cdot x_0)=V'(t)\cdot x_0=A(t)\cdot(V(t)\cdot x_0),$$

进而，对 $t=s$，有 $V(s)\cdot x_0=I_E\cdot x_0=x_0$；因此把(10.6.4)应用于(10.8.3)得到：对任意 $x_0\in E$，$C(t,s)\cdot x_0=V(t)\cdot x_0$，因此对 $t\in I$，有 $C(t,s)=V(t)$．这就证明了 $C(t,s)\in\mathscr{L}(E)$，且 $t\to C(t,s)$ 是(10.8.4.1)的解，当 $t=s$ 时它等于 I_E．

最后，函数 $t\to C(t,r)\cdot x_0$ 是(10.8.3)的解，当 $t=s$ 时，它等于 $C(s,r)\cdot x_0$；因此，由定义，对任意 $x_0\in E$，有

$$\begin{aligned}C(t,r)\cdot x_0&=C(t,s)\cdot(C(s,r)\cdot x_0)\\&=(C(t,s)\circ C(s,r))\cdot x_0,\end{aligned}$$

这就证明了(10.8.4.2)的第一个关系式；因 $C(t,t)=I_E$，该关系式给出了 $C(t,s)\circ C(s,t)=I_E$．这表明 $C(s,t)$ 是 E 的双线性映射，它的逆映射是 $C(t,s)$（因此也属于 $\mathscr{L}(E)$）．从而(10.8.4)得证．

算子 $C(t,s)$ 称为(10.8.3)(或(10.6.2))在 I 中的**预解式**．

(10.8.5) $I\times I$ 到 $\mathscr{L}(E)$ 的映射 $(s,t)\to C(s,t)$ 是连续的．

事实上，我们可以写出 $C(s,t)=C(s,t_0)\circ(C(t,t_0))^{-1}$，于是结论就可从(10.8.4)，(5.7.5)与(8.3.2)得出．

$C(s,t)$ 的知识可以给出(10.6.2)的在 $t=t_0$ 取值 x_0 的明显解：

(10.8.6) 函数

$$u(t)=C(t,t_0)\cdot x_0+\int_{t_0}^{t}(C(t,s)\cdot b(s))ds$$

是(10.6.2)在 I 中的解，当 $t=t_0$ 时，它等于 x_0（若 $K=\mathbf{C}$，积分则沿着 t_0 为始点 t 为终点的线段计算）．

事实上，由(10.8.4.2)，并用(8.7.6)，可写出

$$\int_{t_0}^{t}(C(t,s)\cdot b(s))ds=C(t,t_0)\cdot\left(\int_{t_0}^{t}(C(t_0,s)\cdot b(s))ds\right);$$

因此我们有 $u(t)=C(t,t_0)\cdot z(t)$，这里

$$z(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}(C(t_0,s)\cdot b(s))ds,$$

于是((8.1.4)与(8.2.1))有

$$u'(t) = C'(t,t_0)\cdot z(t) + C(t,t_0)\cdot z'(t).$$

但由(10.8.4.1)，$C'(t, t_0) = A(t)\circ C(t, t_0)$，另一方面，由定义 $z'(t) = C(t_0,t)\cdot b(t)$，因此，

$$u'(t) = A(t)\cdot u(t) + b(t),$$

再因为 $u(t_0) = x_0$，证毕.

当 $E = K^n$ 时，方程(10.6.2)可写成标量线性微分方程组(10.6.5)，预解式 $C(s,t)$ 是 $n\times n$ 阶可逆方阵 $(c_{ij}(s,t))$，它的元素在 $I\times I$ 中连续，且 $t\to c_{ij}(t,s)$ 是这样的函数，当 $K=\boldsymbol{R}$ 时，它在 I 中是一正则函数的原函数，而当 $K=\boldsymbol{C}$ 时，它在 I 中是解析函数.

问　题

1) a) 在线性微分方程(10.6.2)中，设 A 与 b 在单连通开子集 $H\subset\boldsymbol{C}$ 内是解析函数. 试证，对任意 $t_0\in H$ 与任意 $x_0\in E$，(10.6.2)存在唯一的解 u，定义在 H 中并满足 $u(t_0)=x_0$.（用(9.6.3)中同类型的论证：(10.6.3)可使我们沿着 H 内一折线(5.1 节,问题 4)去定义(10.6.2)的解,并引用带有局部唯一性的(9.6.3)的论证即得出结果).

b) 试证 a) 的结果对标量微分方程 $x' = -x^2$ 是不正确的：给出任一单连通开集 $H\subset\boldsymbol{C}$，并给任意 $t_0\in H$，存在一个 $x_0\in C$，且 $x_0\neq 0$，而使该方程没有定义在 H 中并满足 $t=t_0$ 时取值 x_0 的解.

2) 假设 I 是包含0的 $\boldsymbol{R}$ 的一紧区间，H 是 E 中以0为中心的球，f 在 $I\times H$ 中是 Lipschitz 的.我们用 F_0 记 Banach 空间 $\mathscr{C}_E(I)$，用 F_1 记 I 到 E 中的连续可微映射的 Banach 空间,范数为

$$\|u\|_1 = \sup_{t\in I}|u(t)| + \sup_{t\in I}|u'(t)|.$$

设 g_1 为 $F_1\times I$ 到 F_0 的这样定义的映射,即对任意 $t\in I$，

$$g_1(u,\xi)(t) = u'(t) - \xi f(\xi t, u(t)).$$

a) 证明，$F_1\times I$ 到 $E\times F_0$ 中的映射 g：$(u,\xi)\to(u(0), g_1(u,\xi))$ 在点(0,0)对于第一个变量是强可微的(8.9 节,问题 7),并且 $g(0,0)=(0,0)$，还有 $D_1 g(0,0)$ 是 F_1 在 $E\times F_0$ 上的线性同胚.

b) 由 a) 与 10.2 节问题 11 推出，存在区间 $]-\alpha,\alpha[\subset I$ 与 H 中 0 的邻

域V,使得对任意 $x_0\in V$，方程 $x'=f(t,x)$ 存在一个解 $t\to u(t,x_0)$，定义在 $]-\alpha,\alpha[$ 中，且满足 $u(0,x_0)=x_0$；另外，u 在V中对于 x_0 是 Lipschitz 的。

9. Frobenius 定理

设 E，F 是K上的两个 Banach 空间，A 与 B 分别是 E 与 F 的开子集，U 是 $A\times B$ 到 Banach 空间 $\mathscr{L}(E;F)$ (5.7)中的映射. A 到 B 中的可微映射 u 称为**全微分方程**

(10.9.1) $y'=U(x,y)$

的解,如果对任意 $x\in A$，我们有

(10.9.2) $u'(x)=U(x,u(x))$.

当 $E=K$ 时，$\mathscr{L}(E;F)$ 与 F 是恒同的(5.7.6)，因而全微分方程成为常微分方程(10.4.1). 当 $E=K^n$ 是有限维时，E 到 F 中的线性映射 U 被它在 E 的 n 个基向量中每个上的值所确定，且由定义,(10.9.2)等价于 n 个"偏微分方程"的方程组:

(10.9.3) $D_iy=f_i(x_1,\cdots,x_n,y)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$.

一般说来,当 $n>1$ 时,即使右边的 f_i 是连续可微函数，这样的方程组也将无解. 我们说方程(10.9.1)在 $A\times B$ 中是**完全可积的**,若对每个点 $(x_0,y_0)\in A\times B$，存在 x_0 在 A 中的一开邻域，使(10.9.1)有唯一解,定义在 S 中,取值于 B 内,并满足 $u(x_0)=y_0$.

下面我们将假设 U 在 $A\times B$ 中连续可微;对每个 $(x,y)\in A\times B$，$D_1U(x,y)$ (相应地，$D_2U(x,y)$) 是 $\mathscr{L}(E;\mathscr{L}(E;F))$ 中的元(相应地，$\mathscr{L}(F;\mathscr{L}(E,F))$ 中的元)，它可等同于 $E\times E$ 到 F 中的连续双线性映射 $(s_1,s_2)\to(D_1U(x,y)\cdot s_1)\cdot s_2$，记为 $(s_1,s_2)\to D_1U(x,y)\cdot(s_1,s_2)$ (相应地，等同于 $F\times E$ 到 F 中的连续双线性映射 $(t,s)\to(D_2U(x,y)\cdot t)\cdot s$，记为 $(t,s)\to D_2U(x,y)\cdot(t,s)$) (5.7.8)；进而，由(8.2.1)与(8.1.3)，E 到 F 中的线性映射 $s_1\to(D_1U(x,y)\cdot s_1)\cdot s_2$，对每个 $s_2\in E$ 而言,是 E 到 F 中的映射 $x\to U(x,y)\cdot s_2$ 在点 (x,y) 的导数;类似地，F 到 F 中的

线性映射 $t\to(D_2U(x,y)\cdot t)\cdot s$，对每个 $s\in E$ 而言，是 F 到 F 的映射 $y\to U(x,y)\cdot s$ 在点 (x,y) 的导数.

(10.9.4) (Frobenius 定理) 若 $K=\boldsymbol{R}$，设 U 在 $A\times B$ 中是连续可微的；若 $K=\boldsymbol{C}$，设它是二次连续可微的. 为了 (10.9.1) 在 $A\times B$ 中是完全可积的，其充要条件为对每个 $(x,y)\in A\times B$，关系式

(10.9.4.1) $$D_1U(x,y)\cdot(s_1,s_2)+D_2U(x,y)\cdot(U(x,y)\cdot s_1,s_2)$$
$$=D_1U(x,y)\cdot(s_2,s_1)+D_2U(x,y)\cdot(U(x,y)\cdot s_2,s_1)$$

对任一对 $(s_1,s_2)\in E\times E$ 成立.

a) 必要性. 设 u 是 (10.9.1) 的解，在以 x_0 为中心的开球 $S\subset A$ 中，并满足 $u(x_0)=y_0$；则从(10.9.2)与假设条件可知 $u(x)$ 在 S 中可微；此外，对任意 $s_2\in E$，由(8.12.1)知映射 $x\to u'(x)\cdot s_2$ 在点 x_0 的导数是 $s_1\to u''(x_0)\cdot(s_1,s_2)$. 但由(10.9.2)，该导数也是(利用 (8.2.1)，(8.1.3) 与 (8.9.1))

$$s_1\to(D_1U(x_0,y_0)\cdot s_1)\cdot s_2+(D_2U(x_0,y_0)$$
$$\cdot(u'(x_0)\cdot s_1))\cdot s_2.$$

再利用关系式 (10.9.2)，并把 u 在点 x_0 的第二个导数表示为对称的双线性映射(8.12.2)，我们便在点 (x_0,y_0) 得到(10.9.4.1). 但由假设，该点可在 $A\times B$ 中任意地取，因此结果得证.

b) 充分性. 设 $S_0\subset A$ 是以 x_0 为中心 α 为半径的开球，$T_0\subset B$ 是以 y_0 为中心 β 为半径的开球，使 U 在 $S_0\times T_0$ 中有界，令 $\|U(x,y)\|\leqslant M$. 对每个向量 $z\in E$，我们考虑(常)微分方程(这里 $\xi\in K$)

(10.9.4.2) $$w'=U(x_0+\xi z,w)\cdot z=f(\xi,w,z),$$

并注意，若 u 在 x_0 的邻域 $\|x-x_0\|<\rho$ 中满足(10.9.2)，则 $\xi\to u(x_0+\xi z)$，$\|z\|<\rho$，是(10.9.4.2)的解，定义在K中的球 $|\xi|<1$ 内，且当 $\xi=0$ 时取值 y. (u 的唯一性由(10.5.2)已经证明). 于是，(10.9.4.2)的右边当 $|\xi|\leqslant 2$，$\|w-y_0\|<\beta$ 与 $\|z\|<\alpha/2$ 时是连续可微的，并且对这样的 ξ，w，z，我们有 $\|f(\xi,w,z)\|\leqslant$

$M\|z\|$. 应用(10.5.6)于 f 与 $g=0$，可以得到：对满足 $\|z\|<\beta/2M$ 的任意 $z\in E$，(10.9.4.2)有唯一解 $\xi\to v(\xi,z)$，定义在 $|\xi|<2$ 中，取值于 H 内，并满足 $v(0,z)=y_0$. 我们将证明，函数 $u(x)=v(1,x-x_0)$ 是(10.9.1)在球 $\|x-x_0\|<\beta/2M$ 中的解.

现在，对 $\|z\|<\beta/2M$ 与 $|\xi|<2$，由(10.7.3)可知，v 是连续可微的，并且，对 $|\xi|<2$，$\xi\to D_2v(\xi,z)$ 是线性微分方程

(10.9.4.3) $\quad V'=D_2f(\xi,v(\xi,z),z)\circ V+D_3f(\xi,v(\xi,z),z)$

的解，当 $\xi=0$ 时取值为 0．对任意 $s_1\in E$，记 $g(\xi)=D_2v(\xi,z)\cdot s_1$；由(10.9.4.3)，我们有 $g'(\xi)=D_2f(\xi,v(\xi,z),z)\cdot g(\xi)+D_3f(\xi,v(\xi,z),z)\cdot s_1$，并由 f 的定义，还可写为

$$g'(\xi)=A(\xi)\cdot(g(\xi),z)+B(\xi)\cdot s_1+\xi C(\xi)\cdot(s_1,z),$$

其中 $A(\xi)=D_2U(x_0+\xi z,v(\xi,z))$，$B(\xi)=U(x_0+\xi z,v(\xi,z))$，$C(\xi)=D_1U(x_0+\xi z,v(\xi,z))$. 我们要证明，$g(\xi)=\xi U(x_0+\xi z,v(\xi,z))\cdot s_1$，因此我们考虑差

$$\begin{aligned}h(\xi)&=g(\xi)-\xi U(x_0+\xi z,v(\xi,z))\cdot s_1\\&=g(\xi)-\xi B(\xi)\cdot s_1.\end{aligned}$$

利用关系式 $D_1v(\xi,z)=U(x_0+\xi z,v(\xi,z))\cdot z=B(z)\cdot z$，有

$$\begin{aligned}h'(\xi)=&A(\xi)\cdot(g(\xi),z)+B(\xi)\cdot s_1+\xi C(\xi)\cdot(s_1,z)\\&-B(\xi)\cdot s_1-\xi C(\xi)\cdot(z,s_1)-\xi A(\xi)\\&\cdot(B(\xi)\cdot z,s_1).\end{aligned}$$

但特别地，关系式(10.9.4.1)给出

$$\begin{aligned}C(\xi)\cdot(z,s_1)+A(\xi)\cdot(B(\xi)\cdot z,s_1)=&C(\xi)\cdot(s_1,z)\\&+A(\xi)\cdot(B(\xi)\cdot s_1,z).\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}h'(\xi)&=A(\xi)\cdot(g(\xi)-\xi B(\xi)\cdot s_1,z)\\&=A(\xi)\cdot(h(\xi),z).\end{aligned}$$

且 $h(0)=0$；但线性微分方程 $r'=A(\xi)\cdot(r,z)$ 当 $\xi=0$ 时取 0 值的唯一解是 $r(\xi)=0$ (10.6.3)，因此对 $|\xi|<2$，有 $h(\xi)=0$，这就证明了关系式

$$D_2v(\xi,z)\cdot s_1=\xi U(x_0+\xi z,\ v(\xi,z))\cdot s_1$$

对任意 $s_1\in E$ 成立，即 $D_2v(\xi,z)=\xi U(x_0+\xi z,v(\xi,z))$. 这对 $|\xi|<2$ 与 $\|z\|<\beta/2M$ 成立;特别地，对 $\xi=1$，且令 $x=x_0+z$，我们得到，对 $\|x-x_0\|<\beta/2M$，有 $u'(x)=U(x,u(x))$，证完.

(10.9.5) 若 $K=\boldsymbol{R}$,设 U 在 $A\times B$ 中连续可微；若 $K=\boldsymbol{C}$，设它二次连续可微，并满足 Frobenius 条件(10.9.4.1). 则对每个点 $(a,b)\in A\times B$，存在以 a 为中心的开球 $S\subset A$ 与以 b 为中心的开球 $T\subset B$，具有下列性质： 1° 对任意点 $(x_0,y_0)\in S\times T$，(10.9.1) 有唯一解 $x\to u(x,x_0,y_0)$，定义在 S 中并满足 $u(x_0,x_0,y_0)=y_0$; 2° u 在 $S\times S\times T$ 中连续可微. 若再设 E 与 F 是有限维的,而 U 在 $A\times B$ 中 p 次连续可微(相应地，无限次可微的，解析的),则 u 是 p 次连续可微的(相应地，无限次可微的，解析的). 最后,存在以 b 为中心的开球 $W\subset T$，使对每点 $(x,x_0,y_0)\in S\times S\times W$，方程 $y_0=u(x_0,x,y)$ 在 T 中有唯一解 $y=u(x,x_0,y_0)$.

设 $S_0\subset A$ 是以 a 为中心 α 为半径的开球，$T_0\subset B$ 是以 b 为中心 β 为半径的开球,使在 $S_0\times T_0$ 中有 $\|U(x,y)\|\leqslant M$. 考察常微分方程

(10.9.5.1) $w'=U(x_0+\xi z,y_0+w)\cdot z=f(\xi,w,z,x_0,y_0)$.

如(10.9.4)证明那样，我们看到，若 $\|x_0-a\|<\alpha/8$, $\|z\|<\inf(\alpha/4,\beta/2M)$, $\|y_0-b\|<\beta$，则上述方程有唯一解 $\xi\to v(\xi,z,x_0,y_0)$，定义在 $|\xi|<2$ 中并满足 $v(0,z,x_0,y_0)=0$. 进而,(10.7.3)表明,如果 α 与 β 已取定,而使 U 的导数在 $S_0\times T_0$ 中有界，则 v 对 ξ, z, x_0, y_0 的这些值是连续可微的. 于是(10.9.4) 表明 $u(x,x_0,y_0)=y_0+v(1,x-x_0,x_0,y_0)$ 是(10.9.1)的唯一解，定义在 S: $\|x-a\|\leqslant\alpha/8$ 中，当 $x=x_0$ 时取值 y_0，因此，$(x,x_0,y_0)\to u(x,x_0,y_0)$ 在 $S\times S\times T_0$ 中是连续可微的. 若 E 与 F 是有限维的，u 是 p 次连续可微(相应地，无限次可微，解析)的证明 (当 U 具有相应的性质时)，利用(10.7.4)或(10.7.5)代替(10.7.3)，同法可得. 最

后，定理最后的论断可用(10.8.1)的 c) 相同的论证得到.

当 $E = K^n$ 时，完全可积性的 Frobenius 条件(10.9.4.1)，对方程组(10.9.3)而言，等价于关系式

(10.9.6)
$$\frac{\partial}{\partial x_j} f_i(x_1, \cdots, x_n, y) + \frac{\partial}{\partial y} f_i(x_1, \cdots, x_n, y) \cdot f_j(x_1, \cdots, x_n, y) = \frac{\partial}{\partial x_i} f_j(x_1, \cdots, x_n, y) + \frac{\partial}{\partial y} f_j(x_1, \cdots, x_n, y) \cdot f_i(x_1, \cdots, x_n, y)$$

(这里必须记住，$\frac{\partial}{\partial y} f_i(x_1, \cdots, x_n, y)$ 是 $\mathscr{L}(F; F)$ 的元素(若 F 是有限维的，则是一矩阵)，而 $f_i(x_1, \cdots, x_n, y)$ 是 F 的元素).

第十一章 初 等 谱 论

本章主题的选择是按照下列两点考虑的：1° 它是现代泛函分析的一个主要分支——谱论的初步；2° 它实际上将利用前面每一章的概念陈述与定理证明，因而读者能确信以前各章的“抽象”发展并非无目的的推广.

与一般积分论紧密联系的一般谱论，超出本书的范围之外，并且读者除了谱的存在性证明（11.1.3）与算子的伴随的一些初等性质以外，在本章中将看不到任何结果．我们集中讨论紧线性算子理论，它也可以看成一般算子的“轻微”扰动，尽管它的意义与第十章通行的很不相同；这里所说的“可忽略的”是有限维子空间发生的东西，并且关于紧算子的主要定理(11.3.3)的实质是，当把这样的算子加到恒等算子上去时得到的仍是一线性同胚，只要限制在适当的有限余维子空间内.

Hilbert 空间中紧自伴算子的特殊意义不仅在于它的谱较一般紧算子(11.5.7)有更多的确切讯息，而且还在于它们的一般理论立即能应用于有 Hermite 核的 Fredholm积分方程（11.6)，特别地能应用于 Sturm-Liouville 古典的问题，后者被我们用来作为泛函分析方法的威力的一个特别优美的说明(11.7).

关于谱论的更多讯息与关于它的有力的应用，我们着重推荐 Courant-Hilbert 的经典著作[10]．一般谱论将在第十五章中讨论，它的更重要的应用在第二十一章（紧群的表现）与第二十二章(调和分析)以及第二十三章(线性泛函方程)中.

1. 连续算子的谱

设 E 为复赋范空间；E 到自身的一线性映射 u 常称为 E 中算

子. **连续算子**的集 $\mathscr{L}(E;E)$（简记为 $\mathscr{L}(E)$）是一复赋范空间(5.7)；它也是 $\mathbf{C}$ 上不可换**代数**，“乘积”指映射 $(u,v)\to u\circ v$，也记成 $(u,v)\to uv$. E 上恒等映射是 $\mathscr{L}(E)$ 的单位元，记成 1_E. 映射 $(u,v)\to u+v$ 与 $(u,v)\to u\circ v$ 在 $\mathscr{L}(E)\times\mathscr{L}(E)$ 中是连续的.

我们说复数 ζ 是连续算子 u 的**正则值**，若 $u-\zeta\cdot 1_E$ 在 $\mathscr{L}(E)$ 中有逆 v_ζ（即是 E 到 E 上的线性同胚）. 非正则值的复数 ζ 称为 u 的**谱值**且 u 的谱值的集称为 u 的**谱** $\mathrm{Sp}(u)$.

若 $\zeta\in\mathbf{C}$ 使 $u-\zeta\cdot 1_E$ 的核不化为 0，则 ζ 是 u 的谱值；这样的谱值称为 u 的**固有值**；$u-\zeta\cdot 1_E$ 的核中任何向量 $x\neq 0$，亦即满足 $u(x)=\zeta x$，称为 u 的相应于固有值 ζ 的**固有向量**；这些固有向量与 0 构成 E 的一个闭向量子空间，即 $u-\zeta\cdot 1_E$ 的核，称为 u 相应于固有值 ζ 的**固有空间**，并记为 $E(\zeta)$ 或 $E(\zeta;u)$.

当 E 是有限 (n) 维时，初等线性代数表明，算子 u 的任何谱值是 u 的固有值；u 的谱至多是 n 个元的有限集，它们是 u 的 n 次**特征多项式** $\det(u-\zeta\cdot 1_E)$ 的根 (A.6.9). 但若 E 是无限维时，则有非固有值的谱值.

(11.1.1) **例**. 设 E 是无穷维可分复 Hilbert 空间，$(a_n)_{n\geq 1}$ 是 E 中完全标准直交系(6.6.1). 对 E 中每个向量 $x=\sum_n\zeta_n a_n$（$\|x\|^2=\sum_n|\zeta_n|^2$）令 $u(x)=\sum_n\zeta_n a_{n+1}$；容易验明，$u$ 是线性的且 $\|u(x)\|=\|x\|$，因此，由(5.1.1) u 是连续的. 并且 $u(E)$ 是 E 中直交于 a 的子空间，因此 u 不是满射的，这表明 $\zeta=0$ 是 u 的谱值；但 $u(x)=0$ 蕴含 $x=0$，因此 0 不是 u 的固有值.

(11.1.2) 设 E 是复 Banach 空间，u 是 E 中连续算子. u 的正则元 $\zeta\in\mathbf{C}$ 的集 R_u 是 $\mathbf{C}$ 中的开集且 R_u 到 $\mathscr{L}(E)$ 中映射 $\zeta\to(u-\zeta\cdot 1_E)^{-1}$ 是解析的.

设 $\zeta_0\in R_u$，并令 $v_0=(u-\zeta_0\cdot 1_E)^{-1}$. 对任何 $\zeta\in\mathbf{C}$，可以写出，在 E 中有

$$u-\zeta\cdot 1_E=u-\zeta_0\cdot 1_E-(\zeta-\zeta_0)\cdot 1_E$$
$$=(u-\zeta_0\cdot 1_E)(1-(\zeta-\zeta_0)v_0).$$

但据(8.3.2.1)，对于$|\zeta-\zeta_0|<\|v_0\|^{-1}$，元$1_E-(\zeta-\zeta_0)v_0$在$\mathscr{L}(E)$中有逆，且等于绝对收敛级数$\sum_{n=0}^{\infty}(\zeta-\zeta_0)^n v_0^n$的和；因此对于$\zeta$的这些值，$u-\zeta\cdot 1_E$在$\mathscr{L}(E)$中可逆，且它的逆是$(1_E-(\zeta-\zeta_0)v_0)^{-1}v_0$，可写成$(u-\zeta\cdot 1_E)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(\zeta-\zeta_0)^n v_0^{n+1}$，这级数对于$|\zeta-\zeta_0|<\|v_0\|^{-1}$是绝对收敛的；证完.

(11.1.3) 设E是复 Banach 空间，E中任何连续算子u的谱是$\mathbf{C}$的含于球$|\zeta|\leqslant\|u\|$中的非空紧子集.

首先注意．对$\zeta\neq 0$，$u-\zeta\cdot 1_E=-\zeta(1_E-\zeta^{-1}u)$，因而据(8.3.2.1)对于$|\zeta|>\|u\|$，$u-\zeta\cdot 1_E$在$\mathscr{L}(E)$中有逆．此外，对于$|\zeta|>\|u\|$，$(u-\zeta\cdot 1_E)^{-1}=-\sum_{n=0}^{\infty}\zeta^{-n-1}u^n$，这里级数绝对收敛，且$\|(u-\zeta\cdot 1_E)^{-1}\|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}|\zeta|^{-n-1}\|u\|^n=(|\zeta|-\|u\|)^{-1}$；因此当$|\zeta|\geqslant 2\|u\|$时有$\|(u-\zeta\cdot 1_E)^{-1}\|\leqslant\|u\|^{-1}$．于是，若有$R_u=\mathbf{C}$，$(u-\zeta\cdot 1_E)^{-1}$将是整函数(9.9.6)，在$\mathbf{C}$中有界，这是因为它在紧集$|\zeta|\leqslant 2\|u\|$上有界且在它的余集上也有界；据 Liouville 定理(9.11.1)，$(u-\zeta\cdot 1_E)^{-1}$应为常数，因此它的逆$u-\zeta\cdot 1_E$也是常数，这是矛盾的．同时上述证明的第一部分表明$(u-\zeta\cdot 1_E)^{-1}$当$|\zeta|>\|u\|$时存在且解析，因而u的谱，作为$\mathbf{C}$中闭集，含在球$|\zeta|\leqslant\|u\|$中，且是紧集.

能给出这样的算子的例，它的谱是$\mathbf{C}$的任意紧子集(见问题3).

问　　题

1) 设E是复Banach 空间，u是$\mathscr{L}(E)$的元，$\mathrm{Sp}(u)$是它的谱.

a) 试证，若复数ζ满足，对于每一个整数$p>1$，$|\zeta|^p>\|u^p\|$，则ζ是u的正则值．(利用 11.1.3)，从级数$\sum_{n=0}^{\infty}\zeta^{-np}u^{np}$的收敛性断定级数$\sum_{n=0}^{\infty}\zeta^{-n}u^n$也

收敛.)

b) 试证,数 $\rho(u)=\inf_n\|u^n\|^{1/n}$ 等于含有 $\mathrm{Sp}(u)$ 的中心为 0 的最小圆盘的直径,进而证明序列 $(\|u^n\|^{1/n})$ 有极限 $\rho(u)$. (利用 a), 9.1 节问题 1 与(9.9.4).)(对于 $\rho(u)\neq\|u\|$ 的例,见 11.4 节,问题 4.)

2) 设 u, v 为 $\mathscr{L}(E)$ 的两个元,这里 E 是复 Banach 空间. 试证,用问题 1 的记号, $\mathrm{Sp}(vu)$, $\mathrm{Sp}(uv)$ 两者与 $\mathbf{C}-\{0\}$ 的交是相同的. (注意,若 f, g 是 $\mathscr{L}(E)$ 的两个元,使 1_E-fg 可逆,且若 $h=(1_E-fg)^{-1}$, 则 1_E+ghf 是 1_E-gf 的逆.)

3) 设 E 是可分复 Hilbert 空间, $(e_n)_{n\geq 1}$ 是 E 的标准直交基. 设 S 是 $\mathbf{C}$ 的任一无限紧子集,并设 (ρ_n) 是 S 的可数子集,在 S 中稠密 (3.10.9). 试证,存在唯一的元 $u\in\mathscr{L}(E)$ 使对每个 $n\geq 1$ 有 $u(e_n)=\rho_n e_n$; 证明 u 的谱等于 S, 而 u 的固有值是 ρ_n. 若 $\zeta\in S$, ζ 不等于任何 ρ_n, 且 $v_\zeta=u-\zeta\cdot 1_E$, 试证, $v_\zeta(E)$ 在 E 中稠密但不等于 E. (利用 (6.5.3) 证明第一部分.)

4) 试证定义于(11.1.1)中的算子 u 的谱是 $\mathbf{C}$ 中的圆盘 $|\zeta|\leq 1$; u 无固有值. 若 $v_\zeta=u-\zeta\cdot 1_E$, 试证对于 $|\zeta|<1$, $v_\zeta(E)$ 在 E 中不稠密,但对于 $|\zeta|=1$, $v_\zeta(E)$ 在 E 中稠密且与 E 不同(参看(6.5.3)).

5) 设 E 是复 Banach 空间, E_0 是 E 的稠密子空间. 试证对于任何元素 $u\in\mathscr{L}(E_0)$, u 的谱包含它到 E 上的唯一连续延拓 $\tilde{u}$ 的谱(5.5.4). 给出这些谱不相同的例子并给出算子 $u\in\mathscr{L}(E_0)$ 与 u 的谱值 ζ 的例,使得若 $v_\zeta=u-\zeta\cdot 1_E v_\zeta$ 是 E_0 到自身上的双映射 (在问题 3 中,考虑 E 的由向量 e_n 的 (有限) 线性组合所构成的子空间 E_0). 注意,若 E 是 Banach 空间,则 E 到自身的每个连续线性双射是一个同胚(12.16.8),那么本题的结论是不可能的.

6) 设 E 是复可分 Banach 空间, $(e_n)_{n\geq 0}$ 是 E 的 Hilbert 基; 设 u 是 E 上的连续线性算子,满足对每一附标对 h, k, 有 $(u(e_h)|e_k)\geq 0$.

a) 试证数 $\rho(u)$ (问题 1) b)) 属于 $\mathrm{Sp}(u)$. (注意, 对 $|\zeta|>\rho(u)$, 若 $v_\zeta=(u-\zeta\cdot 1_E)^{-1}$, 便有

$$(v_\zeta(e_k)|e_k)=-\sum_{n=0}^{\infty}(u^n(e_k)|e_k)\zeta^{-n-1},$$

并利用 9.15 节的问题 7) b) 和(12.16.4)证明,在相反的情况下,映射 $\rho'^{-n-1}u^n$ 对 $\rho'<\rho(u)$ 构成一个有界集.)

b) 再假设对某整数 $n\geq 1$, 存在整数 $k\geq 1$, 使 $(u^n(e_k)|e_k)=d>0$,

试证 $\rho(u)\geqslant d^{1/s}$（注意对每个整数 $m\geqslant 1$，$(u^{sm}(e_k)|e_k)\geqslant d^m$）。

c) 设 $\rho(u)>0$，且点 $\rho(u)$ 是函数 $\zeta\to v_\zeta$ 的极点．试证存在对应于 $\rho(u)$ 的 u 的固有向量 $x=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n e_n$，使对每个 n 有 $\xi_n\geqslant 0$．（设 N 是 v_ζ 的极点 $\rho(u)$ 的阶，且设

$$w_N=\lim_{\zeta\to\rho(u)}(\zeta-\rho(u))^N v_\zeta.$$

由假设，先证明 $(w_N(e_k)|e_k)\leqslant 0$ 对任意 h，k 与 $w_N\neq 0$ 成立，再利用 $uw_N=\rho(u)w_N$．）

d) 对每一对附标 h，k，设 $(u(e_k)|e_k)>0$（由 b），这蕴含 $\rho(u)>0$），再设 $\rho(u)$ 是 v_ζ 的极点．试证 $\rho(u)$ 是 v_ζ 的单极点．（注意，$(d/d\zeta)v_\zeta=v_\zeta^2$，并证明若 $N>1$，则有 $w_N^2=0$；这对每个 k 蕴含 $(w_N(e_k)|e_k)=0$；利用关系式 $uw_N=\rho(u)w_N$，并注意若对一个附标 h，有 $(w_N(e_h)|e_h)=0$，则 $w_N(e_k)=0$．）再证明存在相应于 $\rho(u)$ 的 u 的固有向量 $x=\sum_n\xi_n e_n$，使对每个 n 有 $\xi_n>0$．其次证明，若 $y=\sum_n\eta_n e_n$ 是相应于 $\rho(u)$ 的 u 的伴随 u^* 的固有值（参看 11.5），则对每个 n，或者 $\eta_n\geqslant 0$，或者 $\eta_n\leqslant 0$．（否则利用从 $\rho(u)\eta_n=\sum_k\eta_k(u(e_k)|e_n)$ 导出的每个 $|\eta_n|$ 的优函数可得到矛盾不等式 $\sum_n\xi_n|\eta_n|<\sum_n\xi_n|\eta_n|$）．最后推证：相应于 $\rho(u)$ 的 u 的所有固有值是 x 与纯量的乘积（交换 u 与 u^*）（Frobenius-Perron 定理）。

2. 紧 算 子

设 E,F 是两个（实或复）赋范空间；我们说 E 到 F 中的线性映射 u **是紧的**，若对 E 的任何有界子集 B，$u(B)$ 是 F 中的相对紧集．一个等价条件是，对 E 中任何有界序列 (x_n)，都存在子列 (x_{n_k}) 使序列 $(u(x_{n_k}))$ 在 F 中收敛．因相对紧集在 F 中有界 (3.17.1)，于是由 (5.5.1)，紧映射是连续的．

(11.2.1) 例．若 E 或 F 是有限维的，则 E 到 F 中的每个连续线性映射是紧的（据 (5.5.1)，(3.17.6)，(3.20.16) 与 (3.17.9)）。

(11.2.2) 若 E 是一个无限维赋范线性空间，则 E 中恒同算子不是紧的(据 F. Riesz 定理(5.9.4))。

(11.2.3) 设 $I=[a,b]$ 是 $\boldsymbol{R}$ 中的紧区间，$E=\mathscr{C}_C(I)$ 是 I 中连续复函数的 Banach 空间(7.2)，$(s,t)\to K(s,t)$ 是 $I\times I$ 上连续复函数. 对任何函数 $f\in E$，据(8.11.1)映射 $t\to\int_a^b K(s,t)f(s)ds$ 在 I 上连续；用 Uf 表示这个函数. 于是 E 到自身中的映射 $f\to Uf$ 是线性的；我们证明它是紧的.

事实上，若 $g=Uf$，则对于 $t_0\in I$，$t\in I$，我们有

(11.2.3.1) $$g(t)-g(t_0)=\int_a^b (K(s,t)-K(s,t_0))f(s)ds.$$

因 K 在 $I\times I$ 上一致连续(3.16.5)，对任何 $\varepsilon>0$ 有 $\delta>0$ 使由关系式 $|t-t_0|\leqslant\delta$ 蕴含 $|K(s,t)-K(s,t_0)|\leqslant\varepsilon$ 对任何 $s\in I$ 成立；因此，据中值定理，对任何 $f\in E$

(11.2.3.2) $$|g(t)-g(t_0)|\leqslant\varepsilon(b-a)\|f\|.$$

这证明，E 中任何有界集 B 的象 $U(B)$ 在 I 的每个点 t_0 是等度连续的(7.5)；另一方面，对任何 $t\in I$，类似地有：若在 $I\times I$ 上 $|K(s,t)|\leqslant k$，则 $|g(t)|\leqslant k\|f\|$. 据 Ascoli 定理(7.5.7)，$U(B)$ 在 E 中是相对紧的.

(11.2.4) 用与(11.2.3)中同样的记号并对 K 作同样的假设. 现在令 F 是 I 上复值规则函数空间，当看成空间 $\mathscr{B}_C(I)$ 的子空间时，它也是 Banach 空间；Uf 如(11.2.3)中那样对任何 $f\in F$ 有定义，且不等式(11.2.3.2)仍然成立. (11.2.3)中的论述证明了 U 是 F 到 E 中的紧映射.

(11.2.5) 若 u，v 是 E 到 F 中的两个紧映射，则 $u+v$ 是紧的.

设 (x_n) 是 E 中有界列；据假设，有 (x_n) 的子列 (x'_n) 使 $u(x'_n)$ 在 F 中收敛. 因序列 (x'_n) 在 E 中有界，因而有 (x'_n) 的子列 (x''_n)，使 $(v(x''_n))$ 在 F 中收敛. 于是据(3.13.10)与(5.1.5)，序列 $(u(x''_n)+v(x''_n))$ 在 F 中收敛，证完.

(11.2.6) 设 E，F，E_1，F_1 为赋范空间，f 是 E_1 到 E 的连续线性

映射，g 是 F 到 F_1 的连续线性映射. 那么，对 E 到 F 的任何紧映射 u，$u_1 = g\circ u\circ f$ 是 E_1 到 F_1 的紧映射.

因若 B_1 为 E_1 中有界集，据(5.5.1) $f(B_1)$ 是 E 中有界集，据假设 $u(f(B_1))$ 是 F 中相对紧集，因而据(3.17.9)，$g(u(f(B_1)))$是 F_1 中的相对紧集.

(11.2.7) 若 u 是 E 到 F 中的紧映射，则 u 在 E 的任何向量子空间 E_1 的限制是 E_1 到 $\overline{u(E_1)}$ 的紧映射.

因据(11.2.6)，这个限制是 E_1 到 F 的紧映射. 若 B 是 E_1 的有界子集，则 $\overline{u(B)}$ 是 F 的紧子集，又由 $\overline{u(B)}\subset\overline{u(E_1)}$，$\overline{u(B)}$ 是 $\overline{u(E_1)}$ 中相对紧集.

(11.2.8) **例**. 用与(11.2.3)中同样的记号与关于K的同样假设，现在令 G 是集 $\mathscr{C}_C(I)$ 上数性积 $(f|g)=\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$ 的准 Hilbert 空间 (6.5.1)；记范数 $(f|f)^{1/2}=\|f\|_2$ 以区别于范数 $\|f\|=\sup_{t\in I}|f(t)|$，且仍然用记号 E 表示带有范数 $\|f\|$ 的空间 $\mathscr{C}_C(I)$；E 到 G 的恒等映射 $f\to f$ 是连续的，因为据中值定理有 $\|f\|_2\leqslant(b-a)^{1/2}\|f\|$；但它不是双连续的，且 G 也不是 Banach 空间. 这里 Cauchy-Schwarz 不等式(6.2.1)写成

(11.2.8.1) $$\left|\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt\right|^2\leqslant\left(\int_a^b|f(t)|^2dt\right)\left(\int_a^b|g(t)|^2dt\right).$$

用与(11.2.3)中同样记号，从而由(11.2.3.1)与(11.2.8.1)得到，$|t_1-t_2|\leqslant\delta$ 蕴含

(11.2.8.2) $$|g(t_1)-g(t_2)|\leqslant\varepsilon\sqrt{b-a}\,\|f\|_2,$$

且类似地，对任何 $t\in I$ 有 $|g(t)|\leqslant k(b-a)^{1/2}\|f\|_2$. 因此，据与(11.2.3)同样的论证，$f\to Uf$ 是 G 到 E 的紧映射；又因 E 到 G 的恒等映射是连续的，因而据(11.2.6)，$f\to Uf$ 也是 G 到 G 的紧映射.

(11.2.9) 设 E，F 是两个 Banach 空间，E_0(相应地，F_0)是 E(相应地，F)的稠密子空间，u 是 E_0 到 F_0 的紧映射，$\tilde{u}$ 是它的自 E 到 F 的唯一连续延拓(5.5.4). 那么，$\tilde{u}(E)\subset F_0$，且 $\tilde{u}$ 是 E 到 F_0 的紧

映射.

容易看出，E中任何球 $\|x\| \leqslant r$ 含于 E_0 中任何以 0 为中心半径$>r$ 的球的闭包中 (3.13.3)，因此E中任何有界集含于 E_0 中某个有界集B的闭包中. 但据(3.11.4)，$\tilde{u}(\bar{B})$ 含于集 $\tilde{u}(B)=u(B)$ 在F中的闭包中；$u(B)$ 是 F_0 中相对紧集，亦即它在 F_0中的闭包是紧的，因此在F中是闭的，从而等于它在F中的闭包. 这就证明了 $\tilde{u}(\bar{B})$ 含于 F_0 中且在该空间中是相对紧的，证完.

(11.2.10) 设E是赋范空间，F是 Banach 空间，(u_n) 是 $\mathscr{L}(E;F)$中的映射序列(5.7)，它收敛于 $\mathscr{L}(E;F)$ 中的u. 那么，若每个 u_n 是紧的，则u是紧的.

设B是E中任何有界子集；因F是完备的，我们所要证的只是，$u(B)$是准紧的(3.17.5). 现在设B含于某个球 $\|x\| \leqslant a$ 中；对任何 $\varepsilon>0$，有 n_0，使 $n \geqslant n_0$ 时蕴含 $\|u-u_n\| \leqslant \varepsilon/2a$，因而(据 (5.7.4))，对任何 $x \in B$，$\|u(x)-u_n(x)\| \leqslant \varepsilon/2$. 但因 $u_{n_0}(B)$ 是准紧的，它可用有限个中心在 $y_j(1 \leqslant j \leqslant m)$ 半径为 $\varepsilon/2$ 的球所覆盖. 对任何 $x \in B$，因而有一个 j 使 $\|u_{n_0}(x)-y_j\| \leqslant \varepsilon/2$，因此 $\|u(x)-y_j\| \leqslant \varepsilon$，并且中心为 y_j 半径为 ε 的有限个球覆盖了 $u(B)$，证完.

特别地，据(11.2.1)和(11.2.10)任何具有有限秩的映射序列在 $\mathscr{L}(E;F)$ 中的极限是紧的. 大家知道，这样的例子，即紧线性映射并不是有限秩的映射序列在 $\mathscr{L}(E;F)$ 中的极限.

问　　题

1) 设E是有限维向量空间，A是E的有界开子集，F是 Banach 空间. 试证，对任何 $p \geqslant 1$，Banach 空间 $\mathscr{D}_F^{(p)}(A)$ (8.12 节，问题 8)到 $\mathscr{D}_F^{(p-1)}(A)$ (对于 $p=1$ 后者应代之以 $\mathscr{C}_F^{\infty}(A)$) 的恒等映射 $f \to f$ 是紧算子. (利用中值定理与 Ascoli 定理.)

2) 设u是无限维 Banach 空间E到赋范空间F的紧映射. 试证在E中存在序列 (X_n) 使对每个n有 $\|X_n\|=1$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} u(X_n)=0$.(注意存在数 $\alpha>0$ 与E中序列 (y_n) 使对每个n有 $\|y_n\|=1$ 与对 $m \neq n$ 有 $\|y_m-y_n\| \geqslant \alpha$(5.9

节，问题3，与(3.16.1))，并考虑序列 $(u((y_n)).)$

证明若球面 S: $\|x\|=1$ 在 u 下的象是 F 中的闭集，则它包含 0.

3) 设 E 是可分 Hilbert 空间，(e_n) 是 E 的直交基. 若 u 是 E 到赋范空间 F 的紧映射，试证序列 $(u(e_n))$ 趋于 0. (利用反证法，并证明序列 $(u(e_n))$ 在 F 中不可能有极限 $b\neq 0$.) 反之，若 F 是一 Banach 空间且通项为 $\|u(e_n)\|^2$ 的级数收敛，证明 u 是紧的(利用 Cauchy-Schwarz 不等式去证明球 $\|x\|\leqslant 1$ 在 u 下的象是准紧的).

4) 设 F 是具有下列性质的赋范空间：存在常数 $c>0$，使对 F 的任何有限子集 $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$，与任何 $\varepsilon>0$，都有 F 的分为两个闭子空间直接和的分解 $F=M+N$，使 M 是有限维，并对 $1\leqslant i\leqslant n$ 有 $d(a_i,M)\leqslant\varepsilon$，且若对任何 $x\in F$，$x=p(x)+q(x)$，这里 $p(x)\in M$ 且 $q(x)\in N$，则 $\|q(x)\|\leqslant c\cdot d(x,M)$. 试证，在上述假设下，赋范空间 E 到 F 的任何紧线性映射是有限秩线性映射序列在 $\mathscr{L}(E;F)$ 中的极限(利用准紧空间的定义). 试证，任何 Hilbert 空间满足上述条件，并且空间 (C_0) (5.3 节，问题5) 与 l^1 (5.7 节，问题 1) 亦然.

5) 设 $I=[a,b]$ 是 $\boldsymbol{R}$ 中的紧区间，$K(s,t)$ 是 $I\times I$ 上复值函数并满足 8.11 节问题 4 的假设. 试证，若 U 依(11.2.3)定义，则 U 仍是 $E=\mathscr{C}_{\boldsymbol{C}}(I)$ 到自己的紧映射.

3. F. Riesz 理论

我们将多次用到下列引理:

(11.3.1) 设 u 是赋范空间 E 中的连续算子，$v=1_E-u$; L, M 是 E 的两个闭向量子空间，使 $M\subset L$, $M\neq L$ 且 $v(L)\subset M$. 那么存在一点 $a\in L\cap \complement M$ 使 $\|a\|\leqslant 1$ 且使对任何 $x\in M$, $\|u(a)-u(x)\|\geqslant 1/2$.

据假设，有 $b\in L$ 使 $b\notin M$，因此 $d(b, M)=\alpha>0$. 设 $y\in M$ 使 $\|b-y\|\leqslant 2\alpha$，并取 $a=(b-y)/\|b-y\|$; 我们有 $\|a\|=1$，且对任何 $z\in M$, $a-z=(b-y-\|b-y\|z)/\|b-y\|$; 但因 $y+\|b-y\|z\in M$，我们有 $\|b-y-\|b-y\|\cdot z\|\geqslant\alpha$，因此对任何 $z\in M$, $\|a-z\|\geqslant 1/2$. 但对任何 $x\in M$，都有

$u(a)-u(x)=a-(x+v(a)-v(x))$，且由假设，$x+v(a)-v(x)\in M$；因此得所需结论.

(11.3.2) 设u是赋范空间E的紧算子，并令$v=1_E-u$. **那么:**

a) 核 $v^{-1}(0)$ 是有限维的;

b) 象 $v(E)$ 在E中是闭的;

c) $v(E)$ 在E中有有限余维;

d) 若 $v^{-1}(0)=\{0\}$，则v是E到 $v(E)$ 上的线性同胚(参看(11.3.4)).

a) 对任何 $x\in N=v^{-1}(0)$，有 $u(x)=x$，因此球 B: $\|x\|\leqslant 1$(在N中)在u下的象是B本身;由假设$u(B)$在E中相对紧，因此在N中相对紧，这是因为N在E中闭. 但据 Riesz 定理(5.9.4)这蕴含N是有限维的.

b) 设 $y\in\overline{v(E)}$；那么有E中序列(x_n)，使 $y=\lim\limits_{n\to\infty}v(x_n)$ (3.13.13). 首先，设序列 $(d(x_n,N))$无界;那么，选取一子序列便可假定 $\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,N)=+\infty$. 令 $z_n=x_n/d(x_n,N)$；我们立即有 $d(z_n,N)=1$，因而有 $t_n\in N$ 使 $\|z_n-t_n\|\leqslant 2$. 令 $s_n=z_n-t_n$，并注意到，据定义，我们有 $v(s_n)=v(z_n)=v(x_n)/d(x_n,N)$，且 $d(s_n,N)=1$. 由假设，立即推出 $\lim\limits_{n\to\infty}v(s_n)=0$. 但序列 (s_n) 在E中有界;因u是紧的，有子序列(s_{n_k})使 $(u(s_{n_k}))$ 收敛于一点 $a\in E$. 因 $\lim\limits_{n\to\infty}(s_n-u(s_n))=0$，亦有 $\lim\limits_{k\to\infty}s_{n_k}=a$，因此，由 $x\to d(x,N)$ 为连续的，有 $d(a,N)=1$. 但 $v(a)=\lim\limits_{k\to\infty}v(s_{n_k})=0$，故这与$N$的定义相矛盾.

因而我们可以假设序列 $(d(x_n,N))$ 以 $M-1$ 为界；于是，存在序列x'_n使 $x_n-x'_n\in N$ 与 $\|x'_n\|\leqslant M$；因 $v(x'_n)=v(x_n)$，故可以假设 $\|x_n\|\leqslant M$. 于是因u是紧的，则有子序列 (x_{n_k}) 使 $(u(x_{n_k}))$ 收敛于一点 $b\in E$；因 $x_{n_k}-u(x_{n_k})=v(x_{n_k})$ 趋于 y，则 (x_{n_k}) 趋于 $b+y$，且据连续性有 $v(b+y)=y$，这证明了 $y\in v(E)$，故 $v(E)$ 是闭的.

c) 我们说 $v(E)$ 在 E 中有无限余维，指的是，有 E 的无限点列 (a_n) 使 a_n 不属于由 $v(E)$ 与 $a_1, \cdots, a_{n-1}$（对每个 n）产生的子空间 V_{n-1}. 由于 $v(E)$ 是闭的，每个 V_n 也是闭的(利用(5.9.2)). 据(11.3.1)由归纳法可以定义序列 (b_n) 使 $b_n \in V_n$，$b_n \bar{\in} V_{n-1}$，$\|b_n\| \leqslant 1$ 且对任何 $j \leqslant n-1$，$\|u(b_n) - u(b_j)\| \geqslant 1/2$. 这蕴含序列 $(u(b_n))$ 无触点，与 u 的紧性假设相矛盾.

d) 为证明当 $v^{-1}(0) = \{0\}$ 时 v 是 E 到 $v(E)$ 上的同胚，只须证明，对任何闭集 $A \subset E$，$v(A)$ 在 E 中为闭(因此在 $v(E)$ 中闭)(3.11.4). 但这恰好可用与 b) 中同样论述来证明，只要把 E 处处换成 A（并把 N 换成 $\{0\}$).

(11.3.3) 在与(11.3.2)的同样假设下，归纳地定义 $N_1 = v^{-1}(0)$，$N_k = v^{-1}(N_{k-1})$ 对 $k > 1$，$F_1 = v(E)$，$F_k = v(F_{k-1})$ 对 $k > 1$. 那么，

a) N_k 构成有限维子空间的增序列，F_k 构成有限余维闭子空间的减序列.

b) 存在最小整数 n 使对 $k \geqslant n$ 有 $N_{k+1} = N_k$; 于是对 $k \geqslant n$ 有 $F_{k+1} = F_k$，且 E 是 F_n 与 N_n 的拓扑直和(5.4)，且 v 在 F_n 上的限制是 F_n 到自身上的线性同胚.

a) 据归纳法定义 $v_1 = v$，$v_k = v_{k-1} \circ v$; 则可断定 $v_k = 1_E - u_k$，这里 u_k 是紧的. 这可由对 k 用归纳法来证明，因为 $v_k = (1_E - u_{k-1}) \circ (1_E - u) = 1_E - u_{k-1} - u + u_{k-1} \circ u$，结果立即由归纳法假设与(11.2.6)，(11.2.5)得到，于是据定义 $N_k = v_k^{-1}(0)$ 且 $F_k = v_k(E)$，我们的论断由(11.3.2)得到.

b) 假定对每个 k，$N_k \neq N_{k+1}$. 我们有，对 $k \geqslant 1$，$v(N_{k+1}) \subset N_k$; 据(11.3.1)，则有 E 的无限点列 (x_k) 使对 $k > 1$，$x_k \in N_k$，$x_k \bar{\in} N_{k-1}$，$\|x_k\| \leqslant 1$ 且对任何 $j < k$，$\|u(x_k) - u(x_j)\| \geqslant 1/2$. 这蕴含序列 $(u(x_n))$ 无触点，与 u 是紧的假设相矛盾.

类似地，设对每个 k，$F_{k+1} \neq F_k$. 对 $k \geqslant 1$，我们有 $v(F_k) \subset F_{k+1}$; 据(11.3.1)，将有 E 的无限点列 (x_k) 使对 $k \geqslant 1$，$x_k \in F_k$，$x_k \bar{\in} F_{k+1}$，$\|x_k\| \leqslant 1$，且对任何 $j > k$，$\|u(x_k) - u(x_j)\| \geqslant 1/2$.

这又得出矛盾，因此有最小整数 $m \geqslant n$ 使对 $k \geqslant m$，$F_{k+1} = F_k$.

其次我们证明 $N_n \cap F_n = \{0\}$：若 $y \in F_n \cap N_n$，则有 $x \in E$ 使 $y = v_n(x)$，另一方面 $v_n(y) = 0$；但这蕴含 $v_{2n}(x) = 0$，因此 $x \in N_{2n} = N_n$，且 $y = v_n(x) = 0$.

据定义，我们有 $F_m \subset F_n$ 且 $v(F_m) = F_m$；我们证明 $F_n = F_m$. 不然的话，将有 $m > n$；令 $z \in F_{m-1} \subset F_n$，且 $z \notin F_m$；因 $v(z) \in F_m = v(F_m)$，故有 $t \in F_m$ 使 $v(z) = v(t)$，亦即 $z - t \in N_1 \subset N_n$；但因 $z - t \in F_n$，我们断定 $z = t$，从而原假定导致矛盾.

对每个 $x \in E$ 有 $v_n(x) \in F_n = F_m$，且因据 m 的定义，$v_n(F_n) = F_n$，故有 $y \in F_n$ 使 $v_n(x) = v_n(y)$，因此 $x - y \in N_n$，从而 $E = F_n + N_n$. 后面的和是直接和，因为 $F_n \cap N_n = \{0\}$；F_n 是闭的且 N_n 是有限维的，因而(5.9.3) E 是 F_n 与 N_n 的拓扑直和. 最后，v 在 F_n 上的限制是满射的且它的核是 $F_n \cap N_1 \subset F_n \cap N_n = \{0\}$，因此也是单射的. 据(11.3.2.d))这限制是 F_n 到自身上的同胚，这就完成了证明.

(11.3.4) 在与(11.3.2)的同样假设下，若 v 是单射的(亦即 $v^{-1}(0) = \{0\}$)，则 v 是满射的，因此是 E 到自身上的线性同胚.

因为这假定蕴含对每个 k，$N_k = \{0\}$，因此 $n = 1$ 且 N_1 化为 0，于是据(11.3.3) $F_1 = E$ 且结果由(11.3.3)得到.

问　　题

1) 设 E, F 是两个 Banach 空间，f 是 E 到 F 的连续线性映射，设 $f(E) = F$；则存在数 $m > 0$ 使对任何 $y \in F$，有 $x \in E$ 满足 $f(x) = y$ 且 $\|x\| \leqslant m\|y\|$(12.16.12).

a) 若 (y_n) 是 F 中的点列，收敛于点 b，试证，存在子序列 (y_{n_k}) 与 E 中点列 (x_k)，收敛于一点 a 并满足对每个 k，$f(x_k) = y_{n_k}$. (取 (y_{n_k}) 使通项为 $\|y_{n_{k+1}} - y_{n_k}\|$ 的级数收敛.)

b) 设 u 为 E 到 F 的紧映射，并令 $v = f - u$. 试证，$v(E)$ 在 F 中闭并在 F 中有有限余维. (如果 ${}^t v = {}^t f - {}^t u$ 是 v 的转置映射，则 ${}^t f$ 是 F' 到 E'

的闭子空间上的线性同胚，并且 ${}^t u$ 是 F' 到 E' 中的紧映射；问题 2) 表明 ${}^t v(F')$ 在 Banach 空间 E' 中是闭的；Banach 的一定理推出，在这些条件下，$v(E)$ 在 F 中是闭的.)

c) 归纳地定义 $F_1 = v(E)$，对 $k \geqslant 1$，$F_{k+1} = v(f^{-1}(F_k))$；试证，有整数 n 使对 $k \geqslant n$ 有 $F_{k+1} = F_k$ (与 (11.3.3) 同样方法).

d) 取 $E = F$ 为可分 Hilbert 空间，并设 $(e_n)_{n \geqslant 1}$ 是 E 的直交基. 定义 f 与 u 使 $f(e_n) = e_{n-3}$，$n \geqslant 4$；$f(e_n) = 0$，$n \leqslant 3$；$u(e_n) = e_{n-2}/n$，$n \geqslant 6$；$u(e_1) = u(e_3) = 0$，$u(e_2) = -e_2$，$u(e_4) = e_1$，$u(e_5) = e_2 + (e_3/5)$. 归纳地定义 $N_1 = v^{-1}(0)$，对 $k \geqslant 1$，$N_{k+1} = v^{-1}(f(N_k))$；试证 N_k 全不相同且是有限维的.

2) 设 E, F 是两个赋范空间，f 是 E 到 F 的闭子空间 $f(E)$ 上的线性同胚，u 是 E 到 F 的紧映射，并令 $v = f - u$.

a) 试证 $v^{-1}(0)$ 是有限维且 $v(E)$ 在 F 中闭；此外，若 $v^{-1}(0) = \{0\}$，v 是 E 到 $v(E)$ 上的线性同胚. (用与(11.3.2)相同的方法.)

b) 归纳地定义 $N_1 = v^{-1}(0)$，对 $k \geqslant 1$，$N_{k+1} = v^{-1}(f(N_k))$；试证有整数 n 使对 $k \geqslant n$ 有 $N_{k+1} = N_k$.

c) 给出一个例子，满足当 $F_1 = v(E)$ 且对 $k \geqslant 1$，$F_{k+1} = v(f^{-1}(F_k))$ 时，F_k 全不相同(取 $E = F$ 为可分 Hilbert 空间，且取 f 与 u 为问题 1d) 中所指映射 f 与 u 的共轭(11.5)).

3) 设 E 是 Banach 空间，g 是 E 到自身的连续线性映射，满足 $\|g\| < 1/2$；则 $f = 1_E - g$ 是 E 到自身上的线性同胚 (8.3.2.1). 设 u 是 E 中紧算子，并令 $v = f - u$；则(11.3.2)与(11.3.3)中的结果全正确. (首先证明相应于 (11.3.1) 的结果：若 $M \subset L$, $M \neq L$，且 $v(L) \subset M$，有 $a \in L \cap \complement M$ 使 $\|a\| \leqslant 1$ 且对任何 $x \in M$ 满足 $\|x\| \leqslant 1$，有 $\|u(a) - u(x)\| \geqslant (1 - 2\|g\|)/2$.)

4) 在空间 $E = l^1$ (5.7节问题 1；保持该问题中记号)，设 f 是 E 的自同构使 $f(e_{2k}) = e_{2k+2} (k \geqslant 0)$，$f(e_1) = e_0$，当 $k \geqslant 1$ 时，$f(e_{2k+1}) = e_{2k-1}$，并设 u 是紧映射使对 $n \neq 1$，$u(e_n) = 0$，且 $u(e_1) = e_0$. 若 $v = f - u$，且 F_k 与 N_k 如(11.3.3)中那样定义，试证对每个 k，$N_{k+1} \neq N_k$ 且 $F_{k+1} \neq F_k$.

4. 紧算子的谱

(11.4.1) 设 u 是复赋范空间 E 中紧算子. 那么：

a) u 的谱 S 是 $\mathbf{C}$ 的至多可数紧子集，除 0 可能例外，它的每一点是孤立的；若 E 是无限维，则 0 属于 S.

b) 谱中每个数 $\lambda \neq 0$ 是 u 的固有值.

c) 对 S 中每个 $\lambda \neq 0$，有 E 的唯一分解为两子空间 $F(\lambda)$，$N(\lambda)$（也记成 $F(\lambda;u)$，$N(\lambda;u)$）的拓扑直和，使得：

(i) $F(\lambda)$ 是闭的，$N(\lambda)$ 是有限维的；

(ii) $u(F(\lambda))\subset F(\lambda)$，且 $u-\lambda\cdot 1_E$ 在 $F(\lambda)$ 上的限制是那个空间到自身上的线性同胚；

(iii) $u(N(\lambda))\subset N(\lambda)$ 且存在最小整数 $k=k(\lambda)$，称为 λ 的阶（也记成 $k(\lambda;u)$），使 $(u-\lambda\cdot 1_E)^k$ 在 $N(\lambda)$ 上的限制是 0.

d) u 相应于固有值 $\lambda \neq 0$ 的固有空间含在 $N(\lambda)$ 中（因此为有限维的）.

e) 若 λ，μ 是 S 的两不同点，异于 0，则 $N(\mu)\subset F(\lambda)$.

f) 若 E 是 Banach 空间，则在 $\mathbf{C}-S$ 上定义并解析的函数 $\zeta \to (u-\zeta\cdot 1_E)^{-1}$ 在 S 的每一点 $\lambda \neq 0$ 有 $k(\lambda)$ 阶极点.

设 $\lambda \neq 0$ 是任何复数；因 $\lambda^{-1}u$ 是紧的，可应用 Riesz 理论(11.3). 据(11.3.4)，若 λ 非 u 的固有值，则 $1_E-\lambda^{-1}u$ 是 E 到自身上的线性同胚，自然对 $u-\lambda\cdot 1_E=-\lambda(1_E-\lambda^{-1}u)$ 同样结论亦成立，即 λ 是 u 的正则值，b) 得证. 反之，设 λ 是 u 的固有值；则 E 具有性质 (i)，(ii)，(iii) 的分解 $F(\lambda)+N(\lambda)$，以及 d) 由(11.3.3) 得到.（$E(\lambda)$ 是(11.3.3)中 N_1 的核）. 为证明 c)，只须证明 $F(\lambda)$ 与 $N(\lambda)$ 的唯一性. 设有具同样性质的另一分解 $E=F'+N'$，并写 $v=u-\lambda\cdot 1_E$. 那么，任何 $x\in N'$ 可写成 $x=y+z$，这里 $y\in F(\lambda)$，$z\in N(\lambda)$；据假设存在 $h>0$ 使 $v^h(x)=0$，因此 $v^k(y)=0$；因为 v^k 在 $F(\lambda)$ 上的限制据假设是同胚，故 $y=0$ 且 $x\in N(\lambda)$，这证明了 $N'\subset N(\lambda)$. 类似的论述可证明 $N(\lambda)\subset N'$. 其次，若 $x=y+z\in F'$，$y\in F(\lambda)$，$z\in N(\lambda)$，则有 $v^k(x)=v^k(y)$，因此 $v^k(F')\subset F(\lambda)$；但因 $v(F')=F'$，这蕴含 $F'\subset F(\lambda)$，且包含式 $F(\lambda)\subset F'$ 可类似地证明.

用 u_1，u_2 分别表示 u 在 $F(\lambda)$ 与 $N(\lambda)$ 上的限制. 据关系式

$(u_2-\lambda\cdot 1_{N(\lambda)})^k=0$,(A.6.10 与 6.12)可得,存在 $N(\lambda)$ 的基使 $u_2-\lambda\cdot 1_{N(\lambda)}$ 的矩阵关于这个基是三角阵且对角元为 0;若 $d=\dim(N(\lambda))$,则 $u_2-\zeta\cdot 1_{N(\lambda)}$ 的行列式等于 $(\lambda-\zeta)^d$,这证明了当 $\zeta\neq\lambda$ 时 $u_2-\zeta\cdot 1_{N(\lambda)}$ 可逆. 另一方面,让我们证明 $u_1-\zeta\cdot 1_{F(\lambda)}$ 对足够小的 $\zeta-\lambda$ 是可逆的:写 $u_1-\zeta\cdot 1_{F(\lambda)}=v_1+(\lambda-\zeta)\cdot 1_{F(\lambda)}$,这里 $v_1=u_1-\lambda\cdot 1_{F(\lambda)}$. 由 c) 知 v_1 可逆;据 (5.7.4) 在 $F(\lambda)$ 中有 $\|v_1^{-1}(x)\|\leqslant\|v_1^{-1}\|\|x\|$,它也可写成 $\|v_1(x)\|\geqslant c\|x\|$,$c=\|v_1^{-1}\|^{-1}$. 那么若 $\zeta\neq 0$ 且 $u_1-\zeta\cdot 1$ 不可逆,由 b)(利用 (11.2.7) 于 $F(\lambda)$ 与 u_1),这蕴含,将存在 $F(\lambda)$ 中的 $x\neq 0$ 使 $u_1(x)=\zeta x$,因此 $|\zeta-\lambda|\cdot\|x\|=\|v_1(x)\|\geqslant c\|x\|$,而当 $|\zeta-\lambda|<c$ 时,这是不可能的. 这表明对于 $\zeta\neq 0$,$\zeta\neq\lambda$ 与 $|\zeta-\lambda|<c$,$u-\zeta\cdot 1_E$ 是可逆的(因它在 $F(\lambda)$ 与 $N(\lambda)$ 上的限制也是这样),即 ζ 不在 S 中;因而 S 中所有点 $\lambda\neq 0$ 都是孤立的,这样 S 至多可数.同样,我们看到(用 E 代替 $F(\lambda)$),u 的异于零的正则值的集是开的. 由 b),对 S 中每个 $\lambda\neq 0$,有 E 中的 $x\neq 0$ 使 $u(x)=\lambda x$,因此,据(5.7.4),$|\lambda|\cdot\|x\|\leqslant\|u\|\cdot\|x\|$,且 $|\lambda|\leqslant\|u\|$,这证明了 S 是紧的. 为完成 a) 的证明,设 E 是无穷维的;若 u 是 E 到自身上的同胚,球 B: $\|x\|\leqslant 1$ 的象 $u(B)$ 将是 E 中 0 的邻域,又因它是 E 中相对紧集,这与 Riesz 定理(5.9.4)相抵触.

若 μ 是 S 中与 0,λ 均不同的点,且 $x\in N(\mu)$,我们能写 $x=y+z$,$y\in F(\lambda)$,$z\in N(\lambda)$. 由上已知 $w=u-\mu\cdot 1_E$ 在 $N(\lambda)$ 上的限制是同胚;因对充分大的 h,$w^h(x)=0$,且 $w^h(y)\in F(\lambda)$,$w^h(z)\in N(\lambda)$,必有 $w^h(y)=w^h(z)=0$,这证明了 c).

若 E 是 Banach 空间,$(u-\zeta\cdot 1_E)^{-1}$ 在 $\mathbf{C}-S$ 中的解析性据 (11.1.2) 可得. 用上面同样记号,λ 不在 u_1 的谱中,因此(据 (11.2.7)) $(u_1-\zeta\cdot 1_{F(\lambda)})^{-1}$ 在 λ 的某一邻域中是解析的;特别地,有数 $\rho>0$ 与 $M>0$ 使对 $x\in F(\lambda)$ 与 $|\zeta-\lambda|\leqslant\rho$,有 $\|(u_1-\zeta\cdot 1_{F(\lambda)})^{-1}(x)\|\leqslant M\cdot\|x\|$. 另一方面,我们可写 $u_2-\zeta\cdot 1_{N(\lambda)}=(\lambda-\zeta)\cdot 1_{N(\lambda)}+v_2$,而 $v_2=u_2-\lambda\cdot 1_{N(\lambda)}$,且我们知道,对于 $\zeta\neq\lambda$,$u_2-\zeta\cdot 1_{N(\lambda)}$ 可逆;再者,可以写

(11.4.1.1) $(u_2-\zeta\cdot 1_{N(\lambda)})^{-1}=-\sum_{h=1}^{k}(\zeta-\lambda)^{-h}v_2^{h-1}$,

这是因为 $v_2^k=0$. 由此知存在数 $M'>0$ 使对 $|\zeta-\lambda|<\rho$, $\zeta\neq\lambda$ 与对任何 $x\in N(\lambda)$, $|\zeta-\lambda|^k\cdot\|(u_2-\zeta\cdot 1_{N(\lambda)})^{-1}(x)\|\leqslant M'\|x\|$. 因任何 $x\in E$ 可以写成 $x=y+z$, $y\in F(\lambda)$, $z\in N(\lambda)$, 且有常数 $a>0$ 使对任意 x, $\|y\|\leqslant a\|x\|$ 与 $\|z\|\leqslant a\|x\|$(5.9.3); 因而知,对 $|\zeta-\lambda|\leqslant\rho$, $\zeta\neq\lambda$ 与任何 $x\in E$, 有 $|\zeta-\lambda|^k\|(u-\zeta\cdot 1_E)^{-1}(x)\|\leqslant a(M\rho^k+M')\|x\|$. 换句话说,对于 $\zeta\neq\lambda$ 与 $|\zeta-\lambda|\leqslant\rho$, $|\zeta-\lambda|^k\cdot\|(u-\zeta\cdot 1_E)^{-1}\|\leqslant a(M\rho^k+M')$; 据(9.15.2), 这蕴含 λ 是 $(u-\zeta\cdot 1_E)^{-1}$ 的阶数 $\leqslant k$ 的极点. 但据定义有 $x\in N(\lambda)$ 使 $v_2^{k-1}(x)\neq 0$, 因此 $(\zeta-\lambda)^{k-1}((u-\zeta\cdot 1_E)^{-1}(x))$ 当 $\zeta\neq\lambda$ 而趋于 λ 时无界, 这证明了 λ 是 k 阶极点, (11.4.1)得证.

我们说 $N(\lambda)$ 的维数是 u 的固有值 λ 的**代数重数**, 而说固有空间 $E(\lambda)$ 的维数是它的**几何重数**; 它们当且仅当 $k(\lambda)=1$ 时相等;当 E 是 Banach 空间时,这相当于说 λ 是 $(u-\zeta\cdot 1_E)^{-1}$ 的**简单极点**.

(11.4.2) 设 E 是 Banach 空间, E_0 是 E 的稠密子集, u 是 E_0 中紧算子, $\tilde{u}$ 是它的到 E 上的唯一连续延拓. 则 u 与 $\tilde{u}$ 的谱相同, 且对 u 的每一固有值 $\lambda\neq 0$, $N(\lambda,u)=N(\lambda,\tilde{u})$, $E(\lambda,u)=E(\lambda,\tilde{u})$ 且 $k(\lambda,u)=k(\lambda,\tilde{u})$.

据(11.2.9)我们知道 $\tilde{u}$ 是紧的且映 E 到 E_0 中; 若 $\lambda\neq 0$ 是 $\tilde{u}$ 的一个固有值,任何相应于 λ 的固有向量 x 满足 $x=\lambda^{-1}\tilde{u}(x)\in E_0$, 因此 λ 是 u 的固有值且 $E(\lambda,\tilde{u})\subset E(\lambda,u)$; 它的逆是明显的,对每一固有值 $\lambda\neq 0$, 我们有 $\mathrm{Sp}(\tilde{u})=\mathrm{Sp}(u)$ 且 $E(\lambda,u)=E(\lambda,\tilde{u})\subset E_0$. 类似地考虑 $(u-\lambda\cdot 1_{E_0})^k$ 的核与它的延拓 $(\tilde{u}-\lambda\cdot 1_E)^k$ 的核便可看出它们相等, 因此 $k(\lambda,u)=k(\lambda,\tilde{u})$ 且 $N(\lambda,u)=N(\lambda,\tilde{u})\subset E_0$.

问　　题

1）设E是复 Banach 空间，u是E中的紧算子；我们保持（11.4.1）的记号，此外，令p_λ（或$p_{\lambda,u}$）与$q_\lambda = 1_E - p_\lambda$为$E$的直和分解$F(\lambda) + N(\lambda)$中在$N(\lambda)$与$F(\lambda)$上的射影.

a）试证对每个$\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$，$\lambda \neq 0$，$-p_\lambda$是半纯函数$(u - \zeta \cdot 1_E)^{-1}$在极点$\lambda$的残数(9.15.2).

b）若$\lambda_1, \cdots, \lambda_r$是谱$\mathrm{Sp}(u)$的不同的点，证明射影$p_{\lambda_j}(1 \leqslant j \leqslant r)$是可换的，且$p_{\lambda_1} + \cdots + p_{\lambda_r}$是$E$在子空间与$F(\lambda_1) \cap \cdots \cap F(\lambda_r)$的直和分解中到$N(\lambda_1) + \cdots + N(\lambda_r)$上的射影.

2）设E是无限维复 Banach 空间，u是E中的紧算子，$(u_n)_{n \geqslant 1}$是E中紧算子叙列，它收敛于 Banach 空间$\mathscr{L}(E)$的u.

a）证明对E的任何有界子集B，并$\bigcup_n u_n(B)$在E中是相对紧的（证明它是准紧的）.

b）若$\lambda \in C$不属于$\mathrm{Sp}(u)$，证明有中心在λ的开圆盘D与整数n_0使得对$n \geqslant n_0$交$S(u_n) \cap D = \phi$（利用(8.3.2.1)）且对$\zeta \in D$，$(u_n - \zeta \cdot 1_E)^{-1}$一致收敛于$(u - \zeta \cdot 1_E)^{-1}$.

c）设(μ_n)为复数列，使对每个n，$\mu_n \in \mathrm{Sp}(u_n)$；这样的序列总是有界的. 若$\lambda$是$(\mu_n)$的触点，证明$\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$.（我们可假设$\lambda = \lim_{n \to \infty} \mu_n \neq 0$；于是有$x_n \in E$使$\|x_n\| = 1$且$u_n(x_n) = \lambda_n x_n$；再利用 a).）

d）反之，设$\lambda \neq 0$属于$\mathrm{Sp}(u)$. 试证，对每个n，（至少）有一个$\mu_n \in \mathrm{Sp}(u_n)$使$\lambda = \lim_{n \to \infty} \mu_n$.（否则，可假定有中心为$\lambda$半径为$r$的开圆盘$D$，使$D \cap \mathrm{Sp}(u) = \{\lambda\}$且$D \cap \mathrm{Sp}(u_n) = \phi$（由$(u_n)$选取适当的子序列）. 于是令$\gamma$为定义在$[0, 2\pi]$中的路径$t \mapsto \lambda + \gamma e^{it}$；考虑积分$\int_\gamma (u_n - \zeta \cdot 1_E)^{-1} (\zeta - \lambda)^{-1} d\zeta = 0$，并利用 b) 引出矛盾.）

e）设$\lambda \neq 0$属于$\mathrm{Sp}(u)$，并令D为中心是λ半径是$> \rho$的开圆盘使$D \cap \mathrm{Sp}(u) = \{\lambda\}$；则存在$n_0$使当$n \geqslant n_0$时$\mathrm{Sp}(u_n)$与圆周$|\zeta - \lambda| = \rho$的交是空的（利用 c)）. 设$\mu_1, \cdots, \mu_r$为$D \cap \mathrm{Sp}(u_n)$的点，并写$k_n = \sum_{j=1}^{r} k(\mu_j; u_n)$. 试证存在$n_1$使对于$n \geqslant n_1$，有$k_n \geqslant k(\lambda; u)$.（利用与 d)同样的方

法，用适当的ζ的k_n次多项式乘$(u_n-\zeta\cdot 1_E)^{-1}$.）给出例子使对每个$n$，$k_n>k(\lambda;u)$。

f）利用e）中记号，令$p=p_{\lambda,u}$，$p_n=\sum_{j=1}^{r}p_{\mu_j,u_n}$；试证，在Banach空间$\mathscr{L}(E)$中$\lim_{n\to\infty}p_n=p$（利用b）与问题1）。由此结果导出，存在$n_2$，使对$n\geqslant n_2$，$N_n=N(\mu_1;u_n)+\cdots+N(\mu_r;u_n)$为$F(\lambda;u)$在$E$中的余。（设$n$满足$\|p-p_n\|\leqslant 1/2$；若有点$x_n\in F(\lambda)\cap N_n$使$\|x_n\|=1$，则关系式$p(x_n)=0$，$p_n(x_n)=x_n$将与上面不等式矛盾。类似地证明，$N(\lambda;u)$与子空间$F(\mu_1;u_n)\cap\cdots\cap F(\mu_r;u_n)$的交化为0.）

3）设u为无限维复Banach空间E中紧算子，并设$p(\zeta)$为不含常数项的多项式；令$v=p(u)$。试证，谱$\mathrm{Sp}(v)$与数集$p(\lambda)(\lambda\in\mathrm{Sp}(u))$恒等；进而，对每个$\mu\in\mathrm{Sp}(v)$，$N(\mu;v)$为子空间$N(\lambda_k;u)$的（直接）和，使$p(\lambda_k)=\mu$，且$F(\mu;v)$为相应子空间$F(\lambda_k;u)$的交。（设$V$为$E$的任何闭子空间，使$u(V)\subset V$，并令$u_V$为$u$在$V$上的限制。试证存在与$V$，$n$无关的常数$M$，使$\|(p(u_V))^n\|\leqslant M^n\|u_V^n\|$。应用此附注与11.1节的问题1，取$V$为形如$F(\lambda;u)$的有限个子空间的适当的交.）

4）设E为可分Hilbert空间，$(e_n)_{n\geqslant 0}$为E的直交基。试证由$u(e_n)=e_{n+1}/(n+1)$ $(n\geqslant 0)$定义的算子u是紧的并证明$\mathrm{Sp}(u)$化为0（更确切地说，u没有固有值）。

5）设u为复Banach空间E中的连续算子。u的Riesz点指谱$\mathrm{Sp}(u)$中的这样的点λ，使得：1° λ是$\mathrm{Sp}(u)$中孤立点；2° E是闭子空间$F(\lambda)$与有限维子空间$N(\lambda)$的直和，使得$u(F(\lambda))\subset F(\lambda)$，$u(N(\lambda))\subset N(\lambda)$，$u-\lambda\cdot 1_E$在$F(\lambda)$上的限制是线性同胚并且$u-\lambda\cdot 1_E$在$N(\lambda)$上的限制是幂零的。

a）若λ与μ是$\mathrm{Sp}(u)$中两个Riesz点，试证$N(\mu)\subset F(\lambda)$且$F(\lambda)$是$N(\mu)$与$F(\lambda)\cap F(\mu)$的直和。

b）**Riesz算子**u定义为这样的连续算子，使谱$\mathrm{Sp}(u)$中一切$\neq 0$的点都是Riesz点。对任何$\varepsilon>0$，使$|\lambda|\geqslant\varepsilon$的点$\lambda\in\mathrm{Sp}(u)$的集是有限集$\{\mu_1,\cdots,\mu_r\}$；设$p_i$是$E$到$N(\mu_i)$上的射影，这里$E=N(\mu_i)+F(\mu_i)(1\leqslant i\leqslant r)$是$E$的直和分解$(1\leqslant i\leqslant r)$，并令$v=\mu-\sum_{i=1}^{r}u\circ p_i$。试证，$\mathrm{Sp}(v)$含于圆盘$|\zeta|\leqslant\varepsilon$，因此（11.1节，问题1）$\lim_{n\to\infty}\|v^n\|^{1/n}\leqslant\varepsilon$。

c) 在 Banach 空间$\mathscr{L}(E)$中，令$\mathscr{K}$为一切紧算子的闭(11.2.10)子空间. 试证，为使 $u\in\mathscr{L}(E)$ 为 Riesz 算子，必须且只须 $\lim_{n\to\infty}(d(u^n,\mathscr{K}))^{1/n}=0$. (为证明条件是必要的，利用b)，注意 $u^n=v^n+w_n$，这里w_n是有限秩算子，因而是紧的. 为证明条件是充分的，利用 11.3 节问题 3 的结果，它可依下述方式解释：若 $\|g\|<1/2$，则 $\lambda=1$ 或不属 $\mathrm{Sp}(g+u)$ 或是 $g+u$ 的 Riesz 点).

5. Hilbert 空间的紧算子

设E为准 Hilbert 空间，u为E中算子. 称u**有伴随**，若存在E中算子u^*，使对任何点偶$x,y\in E$有

(11.5.1) $(u(x)|y)=(x|u^*(y))$.

易知伴随u^*是唯一的(当它存在时)，且(据(6.1.(V)))$(u^*)^*$存在并等于u. 类似地易知，当算子u与v都有伴随时，则$u+v$, λu与uv分别有等于 u^*+v^*, $\bar{\lambda}u^*$ 与 v^*u^* 的伴随.

(11.5.2) 若 u 连续并有伴随，则 u^* 连续且在 $\mathscr{L}(E)$ 中有 $\|u^*\|=\|u\|$. 若E是 Hilbert 空间，则E中每个连续算子都有伴随.

由(11.5.1)与 Cauchy-Schwarz 不等式(6.2.4)得出，对任何点偶x,y，

$$|(x|u^*(y))|\leqslant\|u(x)\|\cdot\|y\|\leqslant\|u\|\cdot\|x\|\cdot\|y\|;$$

取 $x=u^*(y)$，得到，对任何 $y\in E$, $\|u^*(y)\|\leqslant\|u\|\cdot\|y\|$，这证明了$u^*$的连续性与不等式 $\|u^*\|\leqslant\|u\|$；相反不等式由上述证明中交换 u 与 u^* 而得. 若E为 Hilbert 空间且u连续，则对任何$y\in E$，线性型 $x\to(u(x)|y)$ 是连续的，且据(6.3.2)，存在唯一的向量$u^*(y)$使(11.5.1)成立. 由$u^*(y)$的唯一性，我们断定u^*是线性的，从而u的伴随亦然. (11.5.2)的第二个论断不能推广到准 Hilbert 空间(问题 2).

称准 Hilbert 空间E中算子u为**自伴的**(或 Hermite 的)，若它有伴随且 $u^*=u$；于是映射 $(x,y)\to(u(x)|y)=\overline{(u(y)|x)}$ 是E上 Hermite 型；自伴算子u称为**正的**(相应地，**非退化的**)，若

相应的 Hermite 型是正的(相应地,非退化的);这样我们记 $u \geqslant 0$.
对于任何有伴随的算子 u, $u+u^*$ 与 $i(u-u^*)$ 是自伴算子.

(11.5.3) (i) 若准 Hilbert 空间 E 中连续算子 u 有伴随,则 u^*u 与 uu^* 是自伴正算子,且 $\|u^*u\| = \|uu^*\| = \|u\|^2 = \|u^*\|^2$. 特别,若 u 自伴,则 $\|u^2\| = \|u\|^2$.

(ii) 若 P 是 E 在完备向量子空间 F 上的直交射影(6.3),则 P 是正 Hermite 算子. 反之,若 E 是 Hilbert 空间,则 E 中每个 Hermite **幂等**(也就是 $P^2=P$)连续算子 P 是 E 在闭向量子空间 $P(E)$ 上的直交射影(这样的算子称为在 $\mathscr{L}(E)$ 中的直交射影).

(i) u^*u 与 uu^* 为自伴的事实由关系式 $(u^*)^*=u$ 与 $(uv)^* = v^*u^*$ 得知, 再者, $(u^*u(x)|x) = (u(x)|u(x)) \geqslant 0$ 对任何 $x \in E$ 成立,且类似的可证明 uu^* 是正的. 进而,后面的关系式证明了 $\|u(x)\|^2 \leqslant \|u^*u(x)\| \cdot \|x\|$ (据 Cauchy-Schwarz 不等式),因此(据(5.7.4)) $\|u\|^2 \leqslant \|u^*u\|$. 另一方面, 据(5.7.5)与(11.5.2), $\|u^*u\| \leqslant \|u^*\| \cdot \|u\| = \|u\|^2$,论断(i)得证.

(ii) 若 P 是 E 在完备子空间 F 上的直交射影, 则对 $x \in E$, $y \in E$, 有 $(P \cdot x|y - P \cdot y) = 0$, 因此 $(P \cdot x|y) = (P \cdot x|P \cdot y) = (x|P \cdot y)$, 故 P 是 Hermite 的, 且因 $(P \cdot x|x) = (P \cdot x|P \cdot x) \geqslant 0$, 所以它是正的. 反之, 设 E 是 Hilbert 空间, 且 $P^2 = P = P^*$; 则对 E 中任何 x, y, 有 $(P \cdot x|y - P \cdot y) = (x|P \cdot y - P^2 \cdot y) = 0$; 因关系式 $y = P \cdot x$ 蕴含 $P \cdot y = P^2 \cdot x = P \cdot x = y$, $P(E)$ 是 $1_E - P$ 的核, 因此是闭向量子空间; 此外, 对任意 $y \in E$, $y - P \cdot y$ 与每个 $P \cdot x$ 直交, 也就是与 $P(E)$ 直交, 于是(ii)得证.

(11.5.4) 若 E 为 Hilbert 空间, E 中任何紧算子的伴随是紧算子.

因 E 是完备的,只要证明球 B: $\|y\| \leqslant 1$ 的象 $u^*(B)$ 是准紧的就够了. 令 $F = u(B)$,这是 E 的紧子空间,并在空间 $\mathscr{C}_C(F)$ (7.2)中考虑这样的集 H,它由 E 到 $\mathbf{C}$ 中线性连续映射 $x \to (x|y)$ 在 F 上的限制所组成,这里 $y \in B$;我们要证明, H 在 $\mathscr{C}_C(F)$ 中是

相对紧的. 其实，据 Cauchy-Schwarz 不等式有 $|(x-x'|y)|\leqslant\|x-x'\|$，因 $\|y\|\leqslant 1$，这证明H是等度连续的；另一方面，F含在球 $\|x\|\leqslant\|u\|$ 中，因此对任何 $y\in B$ 与任何 $x\in F$ 有 $|(x|y)|\leqslant\|u\|$；于是 Ascoli 定理(7.5.7)证明了我们的论断. 因此，对任何 $\varepsilon>0$，存在B中有限个点 $y_j(1\leqslant j\leqslant m)$ 使对任何 $y\in B$，有附标 j 满足 $|(u(x)|y-y_j)|\leqslant\varepsilon$ 时任何 $x\in B$ 成立. 但据(11.5.1)后面的不等式可写为 $|(x|u^*(y)-u^*(y_j))|\leqslant\varepsilon$，故或 $u^*(y)=u^*(y_j)$ 或 $u^*(y)\neq u^*(y_j)$，而可取 $x=z/\|z\|$，这里 $z=u^*(y)-u^*(y_j)$；因此断定 $\|u^*(y)-u^*(y_j)\|\leqslant\varepsilon$，证完.

注意，当E不完备时上面证明 $u^*(B)$ 为准紧的证法仍然有效；但可能发生下述情况：在准 Hilbert 空间E中，一紧算子有一非紧的伴随.

(11.5.5) 设u是复准 Hilbert 空间E中的紧算子，有一紧的伴随 u^*. 则：

a) 谱 $\mathrm{Sp}(u^*)$ 是 $\mathrm{Sp}(u)$ 在映射 $\xi\to\bar{\xi}$ 下的象.

b) 对 $\mathrm{Sp}(u)$ 中每个 $\lambda\neq 0$，$k(\lambda;u)=k(\bar{\lambda};u^*)$.

c) 若 $v=u-\lambda\cdot 1_E$，则 $v^*(E)$ 是 $v^{-1}(0)=E(\lambda;u)$ 的直交余(6.3)，并且固有空间 $E(\lambda;u)$ 与 $E(\bar{\lambda};u^*)$ 的维数相同.

d) 子空间 $F(\bar{\lambda};u^*)$ 是 $N(\lambda;u)$ 的直交余，且 $N(\lambda;u)$ 与 $N(\bar{\lambda};u^*)$ 的维数相同.

我们有 $v^*=u^*-\bar{\lambda}\cdot 1_E$，因此由(11.5.1)有 $(v(x)|y)=(x|v^*(y))$，从而关系式 $v(x)=0$ 蕴含 x 与子空间 $v^*(E)$ 直交. 那么，把(11.4.1)应用于u^*，则 $v^*(E)$是$F(\bar{\lambda};u^*)$ 与 $N(\bar{\lambda};u^*)$ 的子空间 $v^*(N(\bar{\lambda};u^*))$ 的拓扑直和，并从线性代数得知 $v^*(E)$ 的余维数等于 $v^{*-1}(0)=E(\bar{\lambda};u^*)$ 的维数；因此有 $\dim E(\lambda;u)\leqslant\dim E(\bar{\lambda};u^*)$. 但 $u=(u^*)^*$，故有 $\dim E(\lambda;u)=\dim E(\bar{\lambda};u^*)$；进而，$E(\lambda;u)$ 的直交余包含 $v^*(E)$ 且与 $v^*(E)$ 有同样的余维数，因此两者相等，这证明了 c). 这也证明，对u的任何固有值 $\lambda\neq 0$，$\bar{\lambda}$ 是 u^* 的固有值，且因其逆由关系式 $u=(u^*)^*$ 得到，我们也证明了 a).

同样论证可用于 v 的逐次迭代 v^h，因而证明了 E 在 $v^{*h}=(v^h)^*$ 下的象是 v^h 的核的直交余. 利用(11.3.2)，(11.4.1)与关系式 $u=(u^*)^*$，这立即证明了 b) 与 d).

定理(11.4.1)与(11.5.5)可以转换成方程 $u(x)-\lambda x=y$ 的解的判别法：

(11.5.6) 在(11.5.5)的假设下：

(i) 若 λ 不在 u 的谱中，则方程 $u(x)-\lambda x=y$ 对每个 $y\in E$ 在 E 中有唯一解.

(ii) 若 $\lambda\neq 0$ 在 u 的谱中，则欲使方程 $u(x)-\lambda x=y$ 对于 $y\in E$ 在 E 中有解的充要条件是，y 与方程 $u^*(x)-\bar{\lambda}x=0$ 的解直交.

对有限维空间，这化为数值线性方程组解的存在性的经典判别法.

(11.5.7) 设 u 为复 Hilbert 空间 E 中紧自伴算子. 则：

a) 谱 $\mathrm{Sp}(u)$ 的每个元是实的且对 u 的每个固有值 $\lambda\neq 0$，$k(\lambda)=1$.

b) 若 λ,μ 是 u 的两个不同固有值，则固有空间 $E(\lambda)$ 与 $E(\mu)$ 直交.

c) 设 (μ_n) 是正的固有值的严格递减序列(有限或无限)，(ν_n) 是负的固有值的严格递增序列(有限或无限). 对每个使 μ_k (相应地，ν_k) 有定义的 k，令 F'_k (相应地，F''_k) 是 $E(\mu_1)+\cdots+E(\mu_{k-1})$ (相应地，$E(\nu_1)+\cdots+E(\nu_{k-1})$) 的直交余；那么 μ_k (相应地，ν_k) 是函数 $x\to(u(x)\,|\,x)$ 在 F'_k (相应地，F''_k) 中球面 $\|x\|=1$ 上的最大(相应地，最小)值，并且球面上满足 $(u(x)\,|\,x)=\mu_k$ (相应地，$(u(x)\,|\,x)=\nu_k$) 的点属于 $E(\mu_k)$ (相应地，$E(\nu_k)$). 进而，$\|u\|=\sup(\mu_1,-\nu_1)$ 若 $u\neq 0$.

d) 空间 E 是子空间 $E(\mu_n)$，$E(\nu_n)$ 与 $E(0)=u^{-1}(0)$ 的 Hilbert 和 (6.4).

(可能发生，或 μ_n 或 ν_n 不出现，但由 c) 得知，没有非零的固有值的仅有情形就是 $u=0$ 情形.)

对 u 的任何固有值 $\lambda \neq 0$，我们有，对相应于 λ 的一个固有向量 x，$(u(x)|x)=\lambda(x|x)$；但 $(u(x)|x)=(x|u(x))=\overline{(u(x)|x)}$ 对任何 $x\in E$ 是实的，因此，由 $(x|x)$ 是实的且不等于 0，则 λ 是实的．若 $v=u-\lambda\cdot 1_E$，则我们有 $v^*=v$，因此据(11.5.5)，$v(E)$ 是 $E(\lambda)=v^{-1}(0)$ 的直交余；这蕴含 v 在 $v(E)$ 上的限制是单射的，因此，据定义(见(11.3.3)) $N(\lambda)=E(\lambda)$，$F(\lambda)=v(E)$ 因而 $k(\lambda)=1$．这证明了 a)．又因据(11.4.1)，对任何固有值 $\mu\neq\lambda$，有 $E(\mu)=N(\mu)\subset F(\lambda)$，我们也证明了 b)．

首先我们证明 c) 的后一部分．令 $\rho=\sup(\mu_1,-\nu_1)$．那么据(11.1.2)映射 $\zeta\to(u-\zeta\cdot 1_E)^{-1}$ 对于 $|\zeta|>\rho$ 是解析的，从而立即得知映射 $\xi\to(1_E-\xi u)^{-1}$ 对于 $|\xi|<1/\rho$ 是解析的．现在，对于 0 的充分小邻域中的 ξ，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\xi^n u^n$ 在 $\mathscr{L}(E)$ 中收敛于 $(1_E-\xi u)^{-1}$(8.3.2.1)；据(9.9.4)此幂级数对满足 $|\xi|<1/\rho$ 的每个 ξ 收敛．此外，对每个满足 $0<r<1/\rho$ 的 r，若 M 表示 $\|(1_E-\zeta u)^{-1}\|$ 在 $|\zeta|=r$ 上的最大值，由 Cauchy 不等式(9.9.5)得出 $\|u^n\|\leqslant M/r^n\leqslant M\rho^n$．特别，若利用(11.5.3)，则得对每个 $n\geqslant 1$，$\|u\|^{2^n}\leqslant M\rho^{2^n}$；取 2^n 次根并令 $n\to+\infty$，据(4.3)得 $\|u\|\leqslant\rho$．另一方面，据(11.1.3)我们有 $\rho\leqslant\|u\|$，因此 $\|u\|=\rho$．

现在用 (ρ_n) 记 u 的固有值的绝对值的严格递减序列，于是 $\rho_1=\rho=\sup(\mu_1,-\nu_1)$；并令 G_n 等于使 $|\lambda|=\rho_n$ 的 $E(\lambda)$ 的和（当然这种固有值 λ 或仅有一个或两个）．其次令 F_n 是 $G_1+\cdots+G_{n-1}$ 的直交余；据 a)有 $u(F_n)\subset F_n$，我们证明，u 在 F_n 上的限制 u_n 满足 $\|u_n\|<\rho_{n-1}$．否则，据上面刚刚看到的(并据(11.2.7))在 F_n 中将有固有向量 x 使 $u(x)=\lambda x$ 且 $|\lambda|\geqslant\rho_{n-1}$，这与 F_n 的定义相矛盾．对每个 $x\in F_n$，$y\in F_{n+1}$ 与 $z\in G_n$ 写 $x=y+z$；据 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$-\|u_{n+1}\|\cdot\|y\|^2+(u(z)|z)\leqslant(u(x)|x)\leqslant\|u_{n+1}\|\cdot\|y\|^2+(u(z)|z).$$

设 $\rho_n=\mu_h=-\nu_k$，因而写 $z=z_1+z_2$，$z_1\in E(\mu_h)$，$z\in E(\nu_k)$；

这得出 $(u(x)|z)=\rho_n(\|z_1\|^2-\|z_2\|^2)$. 因 $\|x\|^2=\|y\|^2+\|z_1\|^2+\|z_2\|^2$，利用上面不等式与不等式 $\|u_{n+1}\|<\rho_n$，我们立即看出，在 F_n 中球面 $\|x\|=1$ 上，$(u(x)|x)$ 的最大值是 ρ_n 且仅在 $E(\mu_h)$ 中的点达到，最小值是 $-\rho_n$ 且仅在 $E(\nu_k)$ 中的点达到. 若或没有 k 使 $\rho_n=-\nu_k$ 或没有 h 使 $\rho_n=\mu_h$，则结果是类似的且更简单些. 最后，若我们注意，当 $\mu_h=\rho_n$ 且 s 是满足 $\rho_n<-\nu_k$ 的 k 的最大值，$F'_h=F_n+E(\nu_1)+\cdots+E(\nu_s)$，并且类似的，当 $\nu_k=-\rho_n$ 且 r 为满足 $\rho_n<\mu_h$ 的 h 的最大值，$F''_k=F_n+E(\mu_1)+\cdots+E(\mu_r)$，几乎不变的论证即得 c) 的证明.

现在令 F_∞ 是由一切 F_n 的交所成的闭子空间；据定义，$u(F_\infty)\subset F_\infty$，且 u 在 F_∞ 上的限制不能有非 0 的固有值；据c)这蕴含在 F_∞ 中 $u(x)=0$. 此外，若向量 $x\in E$ 与 F_∞ 直交且与一切 $E(\mu_k)$ 与 $E(\nu_k)$ 直交，据定义它与一切 G_n 直交，因此属于 F_∞，且与 F_∞ 直交，它是 0，这证明（据 (6.3.1)）了，子空间 $E(\mu_k)$，$E(\nu_k)$ 与 F_∞ 的代数和在 E 中稠密；因此，据(6.4.2)，E 是这些子空间的 Hilbert 和，因而任何 $x\in E$ 可以唯一地写成 $x=\sum_k x'_k+\sum_k x''_k+x_0$，这里 x'_k，x''_k 与 x_0 分别是 x 在 $E(\mu_k)$，$E(\nu_k)$ 与 F_∞ 上的直交射影，当附标集是无限集时，这个和是 E 中收敛级数（x 的典则分解）；我们断定 $u(x)=\sum_k\mu_k x'_k+\sum_k\nu_k x''_k$，且由表示的唯一性，可知 $u(x)=0$ 蕴含 $x\in F_\infty$；换句话说，$F_\infty=u^{-1}(0)$，这证明了(11.5.7).

(11.5.8)**附注.** 设 E_0 是准 Hilbert 空间，它是 Hilbert 空间 E 的稠密子空间（可以证明，对任何准 Hilbert 空间 E_0，都有一 Hilbert 空间 E 具有此性质[16]；在(6.6.2)中我们已证明了当 E_0 为可分空间时定理的特殊情形）. 设 u 是 E_0 中紧自伴算子；那么定理(11.5.7)的 a)，b) 与 c) 的结果不用改变，对 u 都成立. 因为由恒等延拓原则得知，u 到 E 的唯一连续延拓 $\tilde{u}$ 是自伴的，且容易验明 $\|\tilde{u}\|=\|u\|$；于是由(11.4.2)即得我们的论断. 关于(11.5.7)的部分 d)，很清楚 u 的核是 E_0 与 $\tilde{u}$ 的核的交，从而是 E_0 的垂直于一切固有空间 $E(\lambda)$，$\lambda\neq 0$ 的向量的子空间. 但若考虑元 $x\in E_0$ 的典则分解 $x=$

$\sum_k x'_k + \sum_k x''_k + x_0$，右边的和与元 x_0 未必属于 E_0（问题 14）.

(11.5.9) 若 $x = \sum_k x'_k + \sum_k x''_k + x_0$，$y = \sum_k y'_k + \sum_k y''_k + y_0$ 是 E 的两个向量的典则分解，则

$$(u(x)\mid y) = \sum_k \mu_k (x'_k \mid y'_k) + \sum_k \nu_k (x''_k \mid y''_k),$$

右边级数绝对收敛(6.4). 这公式立即表明，自伴算子 u 是正的当且仅当没有负的固有值ν_k，并表明它是非退化的当且仅当$u^{-1}(0)=\{0\}$. 若 u 是非退化的，且若在每个固有空间 $E(\lambda)(\lambda \neq 0)$ 中，取一直交基 B_λ（由有限个向量组成），则 B_λ 的并是可数集，它构成 E 中完全直交系(6.5).

(11.5.10) 在(11.5.8)的假设下，应注意，下述情况是完全可能的：E_0 中自伴紧算子是非退化的，而它在 E 上的连续延拓是退化的（换句话说，u 的核在 $\tilde{u}$ 的核中未必稠密）；这即使当 u 是正自伴算子时也有可能.

对 Hilbert 空间 E 中紧自伴算子，(11.5.7) 给出 E 中方程 $u(x) - \lambda x = y$ 的解的公式：

(11.5.11) 设 $y = \sum_k y'_k + \sum_k y''_k + y_0$ 是 y 在 E 中的典则分解. 那么：

a) 若 $\lambda \neq 0$ 不在 $\mathrm{Sp}(u)$ 中，方程 $u(x) - \lambda x = y$ 的唯一解 x 由它的典则分解

(11.5.11.1) $$x = \sum_k \frac{1}{\mu_k - \lambda} y'_k + \sum_k \frac{1}{\nu_k - \lambda} y''_k - \frac{1}{\lambda} y_0$$

给出.

b) 若 λ 是固有值 μ_k（相应地，ν_k）中之一，那么，为了方程 $u(x) - \lambda x = y$ 有解，必须且只须 $y'_k = 0$（相应地，$y''_k = 0$）. 解由公式(11.5.11.1) 给出，其中相应于 μ_k（相应地，ν_k）的项应以 $E(\mu_k)$（相应地，$E(\nu_k)$）的任一元代替.

c) 为使方程 $u(x) = y$ 有解，必须且只须 $y_0 = 0$ 且级数 $\sum_k (1/\mu_k^2)\|y'_k\|^2$ 与 $\sum_k (1/\nu_k^2)\|y''_k\|^2$ 收敛；解由

(11.5.11.2) $x = \sum_k \frac{1}{\mu_k} y'_k + \sum_k \frac{1}{\nu_k} y''_k + x_0$

给出，x_0 是 $u^{-1}(0)$ 中任一元.

结果 a) 与 b) 立刻由(11.5.7)与(11.5.6)得到，所述公式利用典则分解的唯一性得到. 同样论证证明，若 $u(x) = y$ 有解，它们必然由(11.5.11.2)给出，因而得知条件的必要性；且若这些条件满足，则(11.5.11.2)右边是 E 的一个元(据(6.4))它满足 $u(x) = y$.

问 题

1) 设 E 是定义在 R 的区间 $[0,1]$ 上一切无穷次可微复值函数 x 的向量空间，使得 $x(0) = x(1)$(8.12 节)；据 Hermite 式

$$(x|y) = \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}dt,$$

使 E 成为准 Hilbert 空间. 设 u 是 E 到自身中的线性映射，满足 $u(x) = ix'$. 试证，u 是自伴的但在 E 中不连续. (考虑序列 (x_n)，$x_n(t) = (\sin n\pi t)/n$.)

2) 设 F 为可分 Hilbert 空间，$(e_n)(n \geqslant 1)$ 是 F 的一直交基，v 是 F 中紧算子，满足 $v(e_n) = (e_1 + e_n)/n$ (11.2 节，问题 3). 设 $E = v(F)$，并设 u 是 v 在 E 上的限制，它满足 $u(E) \subset E$. 试证在准 Hilbert 空间 E 中，u 是无伴随的紧算子.

3) a) 设 E 是复 Hilbert 空间，f 是 $E \times E$ 上连续 Hermite 型；试证有常数 c 使 $|f(x,y)| \leqslant c\|x\| \cdot \|y\|$ (参看(5.5.1))，并证明存在 E 中唯一连续 Hermite 算子 U，使 $f(x,y) = (Ux|y)$.

b) 设 E 是可分的，并设 $(e_n)_{n \geqslant 1}$ 是 E 的直交基；设 V 是 E 中连续线性算子，定义如下：$Ve_1 = \sum_{n=1}^{\infty} e_n/n$，$Ve_i = 0$，$i > 1$，并令 $W = VV^*$. 设 E_0 是 E 的子空间，由 (e_n) 的(有限)线性组合组成，并设 f 是映射 $(x,y) \to (Wx|y)$ 在 $E_0 \times E_0$ 上的限制. 试证 f 是 $E_0 \times E_0$ 上的连续 Hermite 型，但无 E_0 中线性算子 U 使在 $E_0 \times E_0$ 中有 $f(x,y) = (Ux|y)$.

c) 若 u 是问题 1 中定义的算子，试证 Hermite 型 $(x,y) \to (u(x)|y)$ 在 $E \times E$ 中不连续.

4) 设 E 是复 Hilbert 空间，u 是 E 中 Hermite 算子. 证明 u 必须连续. (假定相反，证明能够由归纳法定义出 E 中的序列 (x_n) 使对每个 n，$\|x_n\| = 1$，

以及标准直交序列 (e_n) 使得：$1°$ x_n 与 $u(e_1), \cdots, u(e_{n-1})$ 直交；$2°$ 若 y_n 是 $u(x_n)$ 在与 $e_1, \cdots, e_{n-1}$ 直交的子空间 V_n 上的直交射影，则 $\|y_n\| \geqslant 2n^3$ 且 $\|y_n\| \geqslant 2n^2 \left|\left(u\left(\sum_{k=1}^{n-1} x_k/k^2\right) \middle| e_n\right)\right|$；$3°$ $e_n = y_n/\|y_n\|$。然后考虑 E 中的点 $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n/n^2$ 并由证明对每个 n，$|(u(x)|e_n)| \geqslant n$ 引出矛盾；为此，把 x 分解为 $x_n' + \frac{x_n}{n^2} + x_n''$，$x_n' = \sum_{k=1}^{n-1} x_k/k^2$ 且 $x_n'' = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k/k^2$，并一直利用恒等式 $(u(y)|z) = (y|u(z))$（滑动驼峰法）。）参看问题 3c）与(12.16.7)。

5）设 E 是复准 Hilbert 空间；若 U, V 是 E 中两个 Hermite 算子，且 $U - V$ 是正的，即若对任何 $x \in E$，有 $(Ux|x) \geqslant (Vx|x)$。记成 $U \geqslant V$。

a）设 E 是 Hilbert 空间，且有数 $m > 0$，使 $U \geqslant m \cdot 1$。试证，U 是 E 到自身上的线性同胚。（首先注意，对任何 $x \in E$，$\|Ux\| \geqslant m\|x\|$，因此（问题 4）U 是 E 到 E 的一闭子空间 M 上的线性同胚；其次注意，若点 $x \in E$ 与 M 直交，则 $x = 0$。）

b）设 F 是问题 1 中定义的准 Hilbert 空间 E 的子空间，由一切复系数多项式（在点 0 与 1，为零）在 $[0,1]$ 上的限制所组成。设 U 是这样的算子，使每个多项式 $x \in F$ 对应于多项式 $(1+t)x(t)$。试证 U 是 F 中满足 $U \geqslant 1_E$ 的连续 Hermite 算子，但 $U(F)$ 在 F 中稠密且异于 F。

6）a）若 U 是复准 Hilbert 空间 E 中正 Hermite 算子，试证，对任何 $x \in E$，

$$\|Ux\|^4 \leqslant (Ux|x)(U^2x|Ux)$$

（考虑正 Hermite 型 $(x, y) \to (Ux|y)$ 并应用(6.2.1)）。

b）再设 U 是连续的（参看问题 3c）与 4）。
由 a）导出

$$\|Ux\|^2 \leqslant \|U\| \cdot (Ux|x),$$

$$\|U\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} (Ux|x).$$

7）设 F, G 是两个可分复 Hilbert 空间，(a_n)（相应地，(b_n)）$(n \geqslant 1)$ 是 F（相应地，G）的标准直交基，L 是 F 与 G 的 Hilbert 和(6.4)。设 v 是 L 中连续算子，由 $v(a_n) = 0$，$v(b_n) = a_n/n$ 定义，并令 $E = v(G) + v^*(v(G))$。设 u 是 v 在 E 上的限制。证明 u 是紧的并有一伴随 u^*，但 u^* 是非紧的。（注意 $v(G)$

在 F 中稠密但在 F 中不闭;若 (x_n) 是 $v(G)$ 的有界点列,收敛于 F 的一点,但不在 $v(G)$ 中,试证,序列 $(u^*(x_n))$ 收敛于 L 的一点,它不在 E 中,利用 v^* 在 F 上的限制是单射这一事实.)

8) 记号与假定如(11.5.7). 设 (λ_n) 是递减的正数列,使对每个 k,附标 n 满足 $\lambda_n=\mu_k$ 的个数等于 $\dim(E(\mu_k))$; 设 (a_n) 是 E 中直交系,使对 $\lambda_n=\mu_k$ 的那些附标 n, a_n 构成 $E(\mu_k)$ 的基. 我们说 (λ_n) 是 u 的严格正固有值的完满序列.

a) 试证, λ_n 是 $(u(x)|x)$ 的最大值, 这里 x 在 E 的满足 $\|x\|=1$, $(x|a_k)=0$ $(1\leqslant k\leqslant n-1)$ 的子集上变动;进而,最大值对 $x=a_n$ 达到(利用(11.5.7.d)).

b) 设 $z_1,\cdots,z_{n-1}$ 是 E 中任意向量, 用 $\rho_n(z_1,\cdots,z_{n-1})$ 表示 $(u(x)|x)$ 的上确界, 这里 x 在 E 的满足 $\|x\|=1$, $(x|z_k)=0$ $(1\leqslant k\leqslant n-1)$ 的子集中变化. 试证 $\lambda_n=\rho_n(a_1,\cdots,a_{n-1})\leqslant\rho_n(z_1,\cdots,z_{n-1})$ ("极大极小原理;")取 x 属于由 $a_1,\cdots,a_n$ 生成的子空间并验明关系 $(x|z_k)=0$, 对 $1\leqslant k\leqslant n-1$).

c) 设 u', u'' 是两个紧自伴算子,并设 $u=u'+u''$; 设 (λ'_n), (λ''_n) 分别是 u' 与 u'' 的严格正固有值的完满序列, (a'_n) 与 (a''_n) 为相应的直交系. 试证,若 λ'_p, λ''_q 与 λ_{p+q-1} 有定义, 则 $\lambda_{p+q-1}\leqslant\lambda'_p+\lambda''_q$ (考虑 $\rho_n(a'_1,\cdots,a'_{p-1},a''_1,\cdots,a''_{q-1})$). 若序列 (λ''_n) 是有限的且有 N 项, 且若 λ'_p 与 λ_{p+N} 有定义, 则 $\lambda_{p+N}\leqslant\lambda'_p$ (同样方法, 注意若对 $1\leqslant j\leqslant N$, $(x|a''_j)=0$, 则有 $(u''(x)|x)\leqslant 0$).

d) 在与 c) 同样假设下,试证,若 λ'_p 与 λ_p 已定义, 则 $|\lambda_p-\lambda'_p|\leqslant\|u''\|$ (利用关系 $\lambda_p=\rho_n(a_1,\cdots,a_{p-1})$). 进而,若 $u''\geqslant 0$ (相应地, $u''\leqslant 0$), 则 $\lambda_p\geqslant\lambda'_p$ (相应地, $\lambda_p\leqslant\lambda'_p$) (同样方法).

e) 当 E 是有限维时, 转述关于 $E\times E$ 上 Hermite 型的 b), c), d) 结果 (见问题 3). 应用于下列问题: 设 $f_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 是紧区间 $I=[a,b]$ 上的正则函数, 并令 $I'=[c,d]$ 是含于 I 中的一区间; 令 $\Delta=\det\left(\int_a^b f_i\bar{f}_j dt\right)$, $\Delta'=\det\left(\int_c^d f_i\bar{f}_j dt\right)$ 是相应于 I 与 I' 的 Gram 行列式;表示 Gram 行列式为固有值的乘积,试证 $\Delta'\leqslant\Delta$.

9) a) 设 u 是复 Hilbert 空间中紧自伴算子. 令 H 是 E 的闭子空间, 并令 p 为 E 到 H 上的直交射影(6.3). 试证 $p\circ u$ (或 $p\circ u\circ p$) 在 H 上的限制是

紧的与自伴的且对 $y \in H$，$(v(y)|y) = (u(y)|y)$（利用关系式 $p^* = p$）。设 (λ_n)，(μ_n) 分别是 u 与 v 的严格正固有值的完满序列。试证若 λ_n 与 μ_n 有定义，则 $\mu_n \leqslant \lambda_n$（利用问题 8b)）。

b) 再设 u 是正的。试证对 E 的任何有限点列 $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$，$\det((u(x_i)|x_j)) \leqslant \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\det((x_i|x_j))$（应用 a) 于由 $x_1, \cdots, x_n$ 生成的子空间 H）。

10) a) 设 u 是复准 Hilbert 空间 E 中的 Hermite 算子。试证对任何整数 $n > 0$ 与任何 $x \in E$，$\|u^n(x)\|^2 \leqslant \|u^{n-1}(x)\| \cdot \|u^{n+1}(x)\|$（利用 Cauchy-Schwarz 不等式）。

b) 设 E 是 Hilbert 空间，u 是紧自伴算子。若 $u(x) \neq 0$，试证对任何整数 $n>0$，$u^n(x) \neq 0$，且正数列 $\alpha_n = \|u^{n+1}(x)\|/\|u^n(x)\|$ 递增并趋于一极限，它等于 u 的某个固有值的绝对值。用 x 的典则分解刻画固有值；问何时向量列 $u^n(x)/\|u^n(x)\|$ 在 E 中有极限？（利用(11.5.7)。）

11) 设 u 是复 Hilbert 空间 E 中紧自伴算子，并设 f 是谱 $\mathrm{Sp}(u)$ 上定义且连续的复值函数。试证有唯一连续算子 v 使得（用(11.5.7)的记号）v 在 $E(\mu_k)$ 上的限制（相应地，$E(\nu_k)$，$E(0)$）是映射 $y \to f(\mu_k)y$（相应地，$y \to f(\nu_k)y$，$y \to 0$）。这算子记为 $f(u)$；我们有 $(f(u))^* = \bar{f}(u)$。若 g 是 $\mathrm{Sp}(u)$ 中连续的第二个函数，且 $h = f + g$（相应地，$h = fg$），则 $h(u) = f(u) + g(u)$（相应地，$h(u) = f(u)g(u)$）。为使 $f(u)$ 是自伴的（相应地，正自伴的），必须且只须，$f(\zeta)$ 在 $\mathrm{Sp}(u)$（相应地，在 $\mathrm{Sp}(u)$ 中 $f(\zeta) \geqslant 0$）是实的；为使 $f(u)$ 是紧的，必须且只须 $f(0) = 0$，或 E 是有限维的。

12) 设 u 是复 Hilbert 空间 E 中紧正 Hermite 算子。试证存在 E 中唯一的紧正 Hermite 算子 v 使 $v^2 = u$；v 称为 u 的平方根（见问题 11）。

13) 设 E 是可分复 Hilbert 空间，$(e_n)_{n \geqslant 1}$ 是 E 的直交基。设 u 是 E 中紧算子，由 $u(e_1) = 0$，$u(e_n) = e_{n-1}/n$，$n > 1$ 定义。试证不存在 E 中连续算子 v 使 $v^2 = u$。（注意，u 与 u^2 的核是不同的，u 的核的维数是 1。）

14) 设 E 为可分复 Hilbert 空间，$(e_n)_{n \geqslant 0}$ 是一标准直交基，u 是 E 中紧正 Hermite 算子，由 $u(e_0) = 0$，$u(e_n) = e_n/n$，$n \geqslant 1$ 定义。点 $a = \sum_{n=1}^{\infty} (e_n/n)$ 不属于 $u(E)$。设 E_0 是 E 的稠密子空间，它是 $u(E)$ 与一维子空间 $\mathbf{C}(e_0 + a)$ 的直和。证明 u 在 E_0 上的限制 v 是紧正 Hermite 算子，它是非退化的，虽然它在 E 上的连续延拓 $\bar{v} = u$ 是退化的；此外，在向量 $e_0 + a \in E_0$ 的典则分解(11.5.8)中，被加项不全属于 E_0。

15) a) 设 u 是复 Hilbert 空间 E 中紧算子，并用 R 与 L 分别表示紧正

Hermite 算子 U^*U 与 UU^* 的相应平方根(问题 12). 试证存在 E 中唯一的连续算子 V, 它在 $F=\overline{R(E)}$ 上的限制是到 $\overline{U(E)}$ 上的等距, 它在 F 的直交余 F' 上的限制是0,并且它满足 $U=VR$ (注意 $\|Ux\|=\|Rx\|$, 对每个 $x\in E$). 证明 $R=V^*U=RV^*V$, 且 $L=VRV^*$.

b) 设 (α_n) 是 R 的严格正固有值的完满序列, (a_n) 为相应的直交系(问题 8). 若 $b_n=Va_n$, 试证 (b_n) 是标准直交系, 且对任何 $x\in E$, $Ux=\sum_n \alpha_n(x|a_n)b_n$, 这里右边级数收敛(若 $R_nx=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(x|a_k)a_k$, 利用(11.5.7)的证明,试证 $\lim_{n\to\infty}\|R-R_n\|=0$, 并应用 a)). 由此结果导出, (α_n) 也是 L 的严格正固有值完满序列,且 (b_n) 是相应的直交系. 序列 (α_n) 也称为 U 的**奇异值的完满序列**.

c) 设 (μ_n) 是 U 的非零相异固有值序列,排成下列次序,对每个 n, $|\mu_n|\geqslant|\mu_{n+1}|$, 若 μ_{n+1} 有定义;令 d_n 是 $N(\mu_n)$ 的维数, 并设 (λ_n) 是这样的序列,使 $\lambda_1=\mu_1$, 且对每个 n, λ_{n+1} 有定义时, $|\lambda_n|\geqslant|\lambda_{n+1}|$, 且对每个 k 使 μ_k 有定义时,满足 $\lambda_n=\mu_k$ 的附标 n 构成 N 的一个区间,有 d_k 个元. 试证,对于使 λ_n 与 α_n 有定义的每个附标 n, $\prod_{j=1}^{n}|\lambda_j|\leqslant\prod_{j=1}^{n}\alpha_j$. (设 V 是子空间 $N(\mu_k)$, $1\leqslant k\leqslant r$ 的(直接)和,并设 U_V 是 U 在 V 上的限制;试证在 V 中有标准直交基 $(e_j)_{1\leqslant j\leqslant m}$ 使对 $k>j$, $(U(e_j)|e_k)=0$; 对 $n\leqslant m$, 若 W_n 是 V 的子空间,以 $e_1,\cdots,e_n$ 为基,令 U_n 为 U 在 W_n 上的限制, 并令 P_n 为 E 在 W_n 上的直交射影. 试证 $\prod_{j=1}^{n}|\lambda_j|^2$ 等于 $U_n^*U_n=P_nU^*UP_n$ 的行列式,并应用问题 9a).)

d) 设 T 是 E 中任意连续算子,并令 (γ_n) (相应地, (δ_n)) 是 UT(相应地, TU)的奇异值的完满序列. 试证,对于使 α_n,γ_n 与 δ_n 有定义的一切值 n, $\gamma_n\leqslant\alpha_n\|T\|$(相应地, $\delta_n\leqslant\alpha_n\|T\|$)(若 $S=TU$,注意 $S^*S\leqslant\|T\|^2U^*U$ 并应用问题 8d)).

e) 设 T 还是紧算子, 并设 (β_n) 是它的奇异值的完满序列. 试证 $\prod_{j=1}^{n}\gamma_j\leqslant\left(\prod_{j=1}^{n}\alpha_j\right)\left(\prod_{j=1}^{n}\beta_j\right)$ 对一切使 α_n, β_n 与 γ_n 有定义的值 n 成立 (应用问题 9b)).

16) 设 E 是复 Hilbert 空间, (a_n) 是 E 中的点列, (λ_n) 为实数列. 试证,

若级数 $u(x)=\sum_n \lambda_n(x|a_n)a_n$ 对每个 $x\in E$ 在 E 中收敛，则 u 是 E 中 Hermite 算子．若一般项为 $\lambda_n\|a_n\|^2$ 的级数绝对收敛，上述收敛条件总能满足．如果 (a_n) 还是标准直交系，则当序列 (λ_n) 有界时收敛条件也满足．当 $\lambda_n\geqslant 0$ 且收敛条件满足，u 是正 Hermite 算子．

17）设 E 是复 Hilbert 空间，E_0 是 E 的稠密向量子空间；$(x|y)$ 与 $\|x\|$ 表示 E 中的纯量积与 E 的范数．设在 E_0 上给出第二个范数 $\|x\|_0$，它使 E_0 成为 Banach 空间，并且对每个 $x_0\in E$，满足 $\|x\|\leqslant a\cdot\|x\|_0$，这里 a 是常数（换句话说，具有范数 $\|x\|_0$ 的 E_0 到具有由 E_0 的准 Hilbert 空间的构造导出的范数 $\|x\|$ 的 E_0 的恒等映射 I_{E_0} 是连续的）．

a）设 U 是 E_0 中的 Hermite 算子（事先并不假定它连续）；试证若 U 关于范数 $\|x\|_0$ 连续，则它对范数 $\|x\|$ 也连续．（若 E_0 的范数由 $\|x\|_0$ 给出时 $\|U\|_0$ 是 $\mathscr{L}(E_0)$ 的范数，试证，对每个整数 n，当 $x\in E_0$ 时有 $\|Ux\|/\|x\|\leqslant\left(\frac{a\|x\|_0}{\|x\|}\right)^{2^{-n}}\|U\|_0$．利用不等式 $\|U^kx\|^2\leqslant\|x\|\cdot\|U^{2k}x\|$（问题 10)a)）．）

b）设 $\tilde{U}$ 是 U 到 E 上的连续延拓，它是 E 中的 Hermite 算子，试证 $\tilde{U}$ 的谱含于 U 的谱中（当 U 看成关于范数 $\|x\|_0$ 的 Banach 空间 E_0 的自同态时）．（若 ζ 是关于 U 的正则值，注意 $(U-\zeta\circ I_{E_0})^{-1}$ 可连续延拓到 E，利用 a)．）

c）U 的每个固有值是实的；若 $V=U-\lambda\cdot 1_{E_0}$ 且 $E(\lambda)=V^{-1}(0)$ 在 E_0 中是有限维的，则 $V(E_0)$ 对于 E_0 的准 Hilbert 构造正交于 $E(\lambda)$．又设 U 是紧的且 $\lambda\neq 0$；则 $V(E_0)$ 是 E_0 的余集，并且它关于范数 $\|x\|_0$ 是闭的；由 (12.16.8) 得知 V 在 $V(E_0)=F(\lambda)$ 上的限制是 $F(\lambda)$ 到自身的关于范数 $\|x\|_0$ 的线性同胚．试证，若 $\tilde{V}=\tilde{U}-\lambda\cdot 1_E$，则在 E 中有 $\tilde{V}^{-1}(0)=E(\lambda)$ 与 $\tilde{V}(E)=\overline{F(\lambda)}$（应用 a) 于 V 在 $F(\lambda)$ 上的限制的逆）．

d）由 c) 推证，若 U（或 U 的幂）是 E_0 中的紧算子（关于范数 $\|x\|_0$），则 $\tilde{U}$ 是紧算子（若 (λ_n) 是 U 的固有值序列，由 b) 与 c) 推证直交于所有子空间 $E(\lambda_n)$ 的 E 的子空间是 $\tilde{U}$ 的核．）

18）设 E 是无穷维复 Hilbert 空间．对 E 中正 Hermite 算子 T，下列条件等价：1° $T(E)$ 在 E 中稠密；2° $T^{-1}(0)=\{0\}$；3° $(Tx|x)>0$ 对任何 $x\neq 0$ 成立（对 $(Tx|y)$ 应用 Cauchy-Schwarz 不等式）；4° T 是非退化的．我们说 E 中连续算子 U 是拟 **Hermite** 的，若存在非退化的正 Hermite 算子 T 使 $TU=U^*T$．

a）试证 U 的每个固有值是实的；若 U 是紧的，又设 $V=U-\lambda\cdot 1_E$ 且

$V^{-1}(0)$ 是有限维的，则 E 是 $V(E)$ 与 $V^{-1}(0)$ 的拓扑直和，且 λ 是 $(U-\zeta I_E)^{-1}$ 是单极点. (考虑用纯量积 $(Tx|y)$ 将 E 完备化所得的 Hilbert 空间，并应用问题 17.)

b) 设 (α_n) 是满足 $\sum_n \alpha_n^2 \leqslant 1$ 的不同实数的无穷序列. 设 E 是维数为 $\dim(E_n)=n(n\geqslant 1)$ 的有限维 Hilbert 空间序列 E_n 的 Hilbert 和. 在 E_n 中，设 $(e_{in})_{1\leqslant i\leqslant n}$ 是 Hilbert 基，U_n 是 E_n 中的这样的算子：当 $i\leqslant n-1$ 时 $U_n e_{in}=\alpha_i e_{in}+e_{i+1,n}$，而 $U_n e_{nn}=\alpha_n e_{nn}$. 试证 $\|U_n\|\leqslant 2$，而对满足 $|\zeta|=1$ 的任意复数 ζ，有 $\|(U_n+\zeta\cdot 1_{E_n})^{-1}\|\geqslant \frac{1}{2}\sqrt{n}$. 存在 E 上唯一的连续算子 U，它在每个 E_n 上的限制是 U_n；证明 U 是拟 Hermite 的，并且 α_n 是它的固有值，且它的谱包含圆周 $|\zeta|=1$.

c) 设 U 是紧拟 Hermite 算子. 试证若 $U\neq 0$，则 U 的谱不会退化为点 0，U 的固有值 $\lambda_n\neq 0$ 是 $(U-\zeta\cdot 1_E)^{-1}$ 的单极点，且有 $N(\lambda_n;U)=E(\lambda_n;U)$ 与 $T(E(\lambda_n;U))=E(\lambda_n;U^*)$. 进而，子空间 $F(\lambda_n;U)$ 的交等于 $U^{-1}(0)$，且 $U^{-1}(0)$ 与 $\overline{U(E)}$ 的交退化为0，(a)的方法).

d) 设 E 是可分的，U 是 E 中具有下述性质的紧连续算子：存在 U^* 的实固有值序列 (λ_n)，使 $E(\lambda_n;U^*)$ 的和在 E 中稠密. 试证 U 是拟 Hermite 的. (证明存在 E 中的全序列 (b_n) 使 $U^*b_n=\lambda_{k(n)}b_n$ (对适当的 $k(n)$)，并定义 T，使 $Tx=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(x|b_n)b_n$，对适当的 $\alpha_n>0$ 成立. 问题 16.)

e) 设 E 是可分的，U 是 E 中满足下述性质的紧算子：(1) U 的所有固有值 λ_n 是实的，且对每个 n 有 $k(\lambda_n;U)=1$；(2) 子空间 $F(\lambda_n;U)$ 的交等于 $U^{-1}(0)$；(3) $U^{-1}(0)$ 与 $\overline{U(E)}$ 的交是$\{0\}$. 试证 U 是拟 Hermite 的(利用 (11.5.5)与 d)).

f) 设 E 是可分的，$(e_n)_{n\geqslant 0}$ 是 E 的 Hilbert 基. 试证由

$$Ue_{2n}=0,\ Ue_{2n+1}=\frac{1}{n+1}\left(e_{2n}+\frac{1}{n+1}e_{2n+1}\right),\ n\geqslant 0$$

定义的算子 U 是紧的、拟 Hermite 的，但和 $U^{-1}(0)+U(E)$ (它是一代数直和)不是拓扑直和(参看 6.5 节问题 2).

g) 用 f) 中同样记号，设 U 是由 $Ue_0=\sum_{n=1}^{\infty}e_n/n$，$Ue_n=e_n/n^2$ $(n\geqslant 1)$ 定义的算子；试证 U 是紧的、拟 Hermite 的，但和 $U^{-1}(0)+U(E)$ 在 E 中不

稠密；推证 U^* 不是拟 Hermite 的。

19）设 E 是 Hilbert 空间，U 是 E 中的连续算子，设存在 E 中一元素 $a\neq 0$，使(1)对 $n\geqslant 0$，元素 $a_n = U^n a(U^0 a = a)$ 形成 E 中的全序列；(2)在 Hermite 算子 $V = U + U^*$ 之下 E 的象是一维子空间 $D = Ka$。

设 E_0 是 E 的闭向量子空间，不退化为 0，且满足 $U(E_0)\subset E_0$；又设 U_0 是 U 在 E_0 上的限制，而 P_0 是 E 到 E_0 上的直交投影。

a）试证 E_0 不能与 D 直交。（注意对任意与 D 直交的 y，$Uy = -U^*y$，并推证若 E_0 与 D 直交，则对每个 $y\in E_0$ 有 $U^n y = (-1)^n U^{*n} y$；再证这与假设条件 $U^n a$ 形成 E 中的全序列相矛盾.）

b）试证对每个 $x\in E_0$，$U_0^* x = P_0 U_0^* x = P_0 U^* x$。

c）试证在 $V_0 = U_0 + U_0^*$ 之下 E_0 的象不退化为 0，因而是一维子空间 $D_0 = P_0(D)$（利用 $P_0 a\neq 0$ 与 b）的结果）。

d）试证元素 $U_0^n(P_0 a)$ 组成 E_0 中的全序列．（设 F_0 是由此序列生成的 E_0 的闭向量子空间，且 F_0' 是 F_0 在 E_0 中的直交余．证明 F_0' 与 D 直交且 $U_0(F_0') = U(F_0')\subset F_0'$；如 a）中那样推证．）

20）设 E 是可分 Hilbert 空间，U 是 E 中的紧算子，它的谱由下列元素组成：0 与满足 $k(\lambda_n) = 1$ 的互不相同且 $\neq 0$ 的固有值的无限序列 (λ_n)，且对每个 n，$E(\lambda_n)$ 是一维的，又对每个 n 设 a_n 是相应于 λ_n 的 U 的固有向量，b_n 是相应于 $\bar{\lambda}_n$ 的 U^* 的固有向量(见(11.5.5))；并选 a_n, b_n 使 $(a_n|b_n) = 1$。

a）设 A 与 B 是分别由 a_n 与 b_n 生成的 E 的闭向量子空间，B' 与 A' 分别为 B 与 A 的直交余．试证 B' 关于 U 是稳定的，包含 $U^{-1}(0)$ 的，且 U 在 B' 上的限制具有退化为 0 的谱。

b）设一般项为 $|\lambda_n|\cdot\|a_n\|\cdot\|b_n\|$ 的级数是收敛的．试证对任意 $x\in A$，

$$Ux = \sum_n \lambda_n (x|b_n) a_n,$$

这里级数在 E 中收敛；$U^{-1}(0)$ 包含 $A\cap B'$。

c）给出 $A\cap B'$ 是无限维且 $U(A\cap B') = A\cap B'$ 的例子．可以利用下面的方法：设 E 是三个无限维 Hilbert 空间 F, R, S 的 Hilbert 和，而它们分别有 Hilbert 基 (f_n)，(r_n) 与 (s_n)；在 $F + R$ 中定义一个序列 (a_n)，使 f_n 是 a_n 在 F 中的射影，且由 a_n 生成的闭向量子空间是 $F + R$．为此，注意在具有 Hilbert 基 $(e_n)_{n\geqslant 0}$ 的 Hilbert 空间 H 中，由 $e_0 + e_n (n\geqslant 1)$ 生成的闭向量子空间等于 H．我们将把 $F + R$ 取为每一个等于 H 的 Hilbert 空间的无穷和．定义 U，使对 $n\geqslant 1$，$Ua_n = \lambda_n a_n$，$Ur_n = \mu_n r_{n-1}$，$Ur_1 = 0$，$Us_n = \mu_n s_{n+1}$，

这里序列 (λ_n) 与 (μ_n) 足够快地趋于 0（参看 11.2，问题 3）．因此可得到 $B = F$，$A = F + R$ 与 $A \cap B' = R$．

6. Fredholm 积分方程

现在我们应用前面的理论于例(11.2.8)．这里考虑 $I = [a,b]$ 上连续复值函数的准 Hilbert 空间，$(f|g) = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$，且算子 U 使 Uf 为函数

$$t \to \int_a^b K(s,t)f(s)ds.$$

我们说算子 U 由**核函数** K 所定义．

(11.6.1) G 中紧算子 U 有紧伴随，它由核函数 K^*，$K^*(s,t) = \overline{K(t,s)}$，定义．

我们对 $a \leqslant x \leqslant b$ 证明恒等式

(11.6.1.1) $$\int_a^x \overline{g(t)}dt \int_a^b K(s,t)f(s)ds = \int_a^b f(s)ds \overline{\int_a^x \overline{K(s,t)}g(t)dt},$$

由此取 $x = b$，据定义，即得所需结果．据(8.7.3)与 Leibniz 法则(8.11.2)，(11.6.1.1)两边是 $x \in [a,b]$ 的可微函数；它们当 $x = a$ 时为 0，且据(8.7.3)与(8.11.2)它们的导数在每个 $x \in [a,b]$ 相等，因此它们在 $[a,b]$ 中处处相等(8.6.1)．

关于特殊情形（Fredholm 交替组）的判别法(11.5.6)的表示，我们留给读者．

若 $\overline{K(t,s)} = K(s,t)$（这时称核 K 是 Hermite 的），紧算子 U 是自伴的．因准 Hilbert 空间 G 是可分的((7.4.3)或(7.4.4))，它能看成 Hilbert 空间 $\hat{G}$ 的稠密子空间(6.6.2)，因而可对算子 U 应用(11.5.8)的结果．我们将用 (λ_n) 表示 U 的(正或负)固有值序列，重复者按重复次数照算，并依 $|\lambda_n| \geqslant |\lambda_{n+1}|$ 的方式编序；又用 (φ_n) 表示 G 中标准直交系，使得若满足 $\lambda_n = \mu_k$（相应地，$\lambda_n = \nu_k$）的 n 的值是 $m, m+1, \cdots, m+r$，则 $\varphi_m, \varphi_{m+1}, \cdots, \varphi_{m+r}$ 构成

固有空间$E(\mu_k)$(相应地,$E(\nu_k)$)的基;因而有对每个n,$U(\varphi_n)=\lambda_n\varphi_n$。称$\varphi_n$为核$K$的**固有函数**.

(11.6.2) 若K为 Hermite 核,则级数$\Sigma_n\lambda_n^2$收敛且

$$\Sigma_n\lambda_n^2\leqslant\int_a^b dt\int_a^b |K(s,t)|^2 ds.$$

其实,若对函数$s\to K(s,t)$与标准直交系(φ_n)应用 Bessel 不等式(6.5.2),我们得到,对任何N

$$\sum_{n=1}^{N}\left|\int_a^b K(s,t)\overline{\varphi_n(s)}ds\right|^2\leqslant\int_a^b |K(s,t)|^2 ds$$

亦即,对每个$t\in I$,

(11.6.2.1) $$\sum_{n=1}^{N}\lambda_n^2|\varphi_n(t)|^2\leqslant\int_a^b |K(s,t)|^2 ds.$$

两边在I上积分并利用关系式$(\varphi_n|\varphi_n)=1$便得结果.

任何函数$f\in G$在$\overline{G}$中的**典则分解**可写成$f=\Sigma_n c_n\varphi_n+f_0$,这里$c_n=(f|\varphi_n)=\int_a^b f(t)\overline{\varphi_n(t)}dt$;但如已看到的,$f_0$可能不在$G$中(见问题 4);另一方面,级数$\Sigma_n c_n\varphi_n$在 Hilbert 空间$\overline{G}$中收敛,但在 Banach 空间$E=\mathscr{C}_c(I)$中不一定收敛(换句话说,级数$\Sigma_n c_n\varphi_n(t)$未必对每个$t\in I$收敛)(见问题 3). 然而:

(11.6.3) 若K是 Hermite 核,且对某个函数$g\in G$有$f=Ug$(即$f(t)=\int_a^b K(s,t)g(s)ds$),则级数$\Sigma_n c_n\varphi_n(t)$在$I$上绝对且一致收敛于$f(t)$.

在$\overline{G}$中我们已有典则分解$g=\Sigma_n d_n\varphi_n+g_0$;因$U$是$G$到$E=\mathscr{C}_c(I)$的连续线性映射(11.2.8),$U$连续地延拓到$\overline{G}$,且$Ug_0=0$,我们有$f=Ug=\Sigma_n\lambda_n d_n\varphi_n$,这里收敛指$E$中收敛意义;即级数$\Sigma_n\lambda_n d_n\varphi_n(t)$在$I$中一致收敛于$f(t)$;因$c_n=(f|\varphi_n)=(Ug|\varphi_n)=(g|U\varphi_n)=\lambda_n(g|\varphi_n)=\lambda_n d_n$,这样除了绝对收敛性以外我们已证明了(11.6.3). 但对任何整数N,据 Cauchy-Schwarz 不等式(对有限维空间)

$$\left(\sum_{n=1}^{N}|c_n\varphi_n(t)|\right)^2\leqslant\left(\sum_{n=1}^{N}|d_n|^2\right)\left(\sum_{n=1}^{N}\lambda_n^2|\varphi_n(t)|^2\right)$$

且据 Bessel 不等式(6.5.2)与(11.6.2.1)，右边以与N无关的数为界.

(11.6.4) 若K是 Hermite 的,又若λ不在U的谱中且$\lambda\neq0$，对任何$g\in G$，方程$Uf-\lambda f=g$的唯一解f满足

$$f(t)=-\frac{1}{\lambda}g(t)+\sum_n\frac{\lambda_n}{\lambda(\lambda_n-\lambda)}d_n\varphi_n(t),$$

这里级数在I中绝对且一致收敛,并有$d_n=(g|\varphi_n)$.

我们知道，$Uf-\lambda f=g$在$\bar{G}$中的解属于G，这是因为$g\in G$ (11.5.6)且据(11.5.11)有$c_n=(f|\varphi_n)=d_n/(\lambda_n-\lambda)$. 因$g+\lambda f=Uf$，可以应用(11.6.3)，这就证明了结果.

若K是 hermite 的，且$\lambda\neq0$在U的谱中，则对$g\in G$，方程在$\bar{G}$中有解当且仅当$(g|\varphi_m)=0$对所有的整数m(有限数)成立，且$\lambda=\lambda_m$. 解由(11.6.4)的公式给出，其中对任何满足$\lambda=\lambda_m$的m，我们把$\lambda_m d_m/\lambda(\lambda_m-\lambda)$换成任意复数;级数在$I$中绝对且一致收敛.

(11.6.5) 在与(11.6.4)的同样假设下，$Uf-\lambda f=g$的唯一解可写成$f(t)=-\frac{1}{\lambda}g(t)+\int_a^b R(s,t;\lambda)g(s)ds$，这里$R(s,t;\lambda)=-\frac{1}{\lambda^2}K(s,t)+\Sigma_n\frac{\lambda_n^2}{\lambda^2(\lambda_n-\lambda)}\overline{\varphi_n(s)}\varphi_n(t)$，而级数对$(s,t)\in I\times I$绝对且一致收敛.

由(11.6.3)的证明，有$\Sigma_n\lambda_n d_n\varphi_n(t)=Ug(t)$，级数在$I$中绝对且一致收敛. 因

$$\frac{1}{\lambda(\lambda_n-\lambda)}+\frac{1}{\lambda^2}=\frac{\lambda_n}{\lambda^2(\lambda_n-\lambda)},$$

(11.6.4)中公式给出

$$f(t)=-\frac{1}{\lambda}g(t)-\frac{1}{\lambda^2}\int_a^b K(s,t)g(s)ds$$

$$+\sum_{n}\frac{\lambda_n^2}{\lambda^2(\lambda_n-\lambda)}\varphi_n(t)\int_a^b g(s)\overline{\varphi_n(s)}ds.$$

为证明定理，只要证明级数 $\Sigma_n\lambda_n^2|\varphi_n(s)|^2$ 的一致收敛性即可．事实上，有 $\delta>0$ 使对每个 n，$|\lambda_n-\lambda|\geqslant\delta$，因此据 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\sum_{n=p}^{q}\frac{\lambda_n^2}{|\lambda|\cdot|\lambda_n-\lambda|}|\varphi_n(s)\varphi_n(t)|\leqslant\frac{1}{\delta|\lambda|}\sum_{n=p}^{q}\lambda_n^2|\varphi_n(s)\varphi_n(t)|$$

$$\leqslant\frac{1}{\delta|\lambda|}\left\{\left(\sum_{n=p}^{q}\lambda_n^2|\varphi_n(s)|^2\right)\left(\sum_{n=p}^{q}\lambda_n^2|\varphi_n(t)|^2\right)\right\}^{1/2},$$

这就证明了级数 $\Sigma_n\dfrac{\lambda_n^2}{\lambda(\lambda_n-\lambda)}\overline{\varphi_n(s)}\varphi_n(t)$ 在 $I\times I$ 中绝对且一致收敛；于是结论由(8.7.8)得出．

现在考虑函数 $H(s,t)=\int_a^b K(u,s)K(t,u)du$；对每个固定的 $t\in I$，我们可以对它应用(11.6.3)，并且看到

$$H(s,t)=\Sigma_n\lambda_n^2\varphi_n(s)\overline{\varphi_n(t)},$$

这里级数对任何偶 $(s,t)\in I\times I$ 收敛．特别，对任意 $s\in I$，$H(s,s)=\Sigma_n\lambda_n^2|\varphi_n(s)|^2$ 且 $H(s,s)$ 连续；据 Dini 定理(7.2.2)，收敛性在 I 中是一致的．证完．

(11.6.6)　若 K 为 Hermite 的，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\left|K(s,t)-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\overline{\varphi_k(s)}\varphi_k(t)\right|^2dt=0$$

对 $s\in I$ 一致成立．

用(11.6.5)证明中记号，我们有

$$(11.6.6.1)\quad\lim_{n\to\infty}\left(H(s,s)-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2\overline{\varphi_k(s)}\varphi_k(s)\right)=0$$

对 $s\in I$ 一致成立；如果利用 φ_k 是 U 的固有向量以及它们是直交的事实去计算(11.6.6)中所述积分，我们得到(11.6.6.1)左边的表示式，从而得到结果．

一般地，级数 $\Sigma_n\lambda_n\overline{\varphi_n(s)}\varphi_n(t)$ 不是对一切 $(s,t)\in I\times I$ 收

敛;但我们有特殊结果:

(11.6.7) (Mercer 定理) 设紧算子 U 由 Hermite 核定义,且是正的. 则我们有 $K(s,t)=\Sigma_n\lambda_n\overline{\varphi_n(s)}\varphi_n(t)$,这里级数在 $I\times I$ 上绝对且一致收敛.

我们记住,这里对一切 n,有 $\lambda_n>0$ (11.5.9). 首先我们证明,对每个 $s\in I$,级数 $\Sigma_n\lambda_n|\varphi_n(s)|^2$ 收敛. 对任何 $s\in I$,有 $K(s,s)\geqslant 0$. 否则,将存在 s 在 I 中的邻域 V,使对 $(s',t)\in V\times V$ 有 $\mathscr{R}(K(s',t))\leqslant-\delta<0$. 设 φ 为 I 到 $[0,1]$ 的连续映射,在点 s 等于 1,在 $I-V$ 上等于 0 (4.5.2). 则据(8.5.3)有

$$\int_a^b\overline{\varphi(t)}dt\int_a^b K(s,t)\varphi(s)ds\leqslant-\delta\left(\int_a^b\varphi(t)dt\right)^2<0.$$

但左边是 $(U\varphi|\varphi)$,因而这与 U 是正算子的假定相违.

现在注意,对任何有限个固有值 $\lambda_k(1\leqslant k\leqslant n)$, $K_n(s,t)=K(s,t)-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\overline{\varphi_k(s)}\varphi_k(t)$ 是正算子 U_n 的核函数,因我们有

$$(U_nf|f)=(Uf|f)-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k|(f|\varphi_k)|^2;$$

但容易验明,此方程的右边可写成 $(Ug|g)$,这里 $g=f-\sum_{k=1}^{n}(f|\varphi_k)\varphi_k$,因此据假设它是正的. 故据(5.3.1),由 $K_n(s,s)\geqslant 0$ 得知,级数 $\Sigma_n\lambda_n|\varphi_n(s)|^2$ 收敛,且对一切 $s\in I$ 有 $\Sigma_n\lambda_n|\varphi_n(s)|^2\leqslant K(s,s)$. 据 Cauchy-Schwarz 不等式,我们断定,对一切$(s,t)\in I\times I$ 有

(11.6.7.1) $$\sum_{n=p}^{q}\lambda_n|\varphi_n(s)\varphi_n(t)|$$

$$\leqslant\left\{\left(\sum_{n=p}^{q}\lambda_n|\varphi_n(s)|^2\right)\left(\sum_{n=p}^{q}\lambda_n|\varphi_n(t)|^2\right)\right\}^{1/2}$$

$$\leqslant\left\{K(t,t)\left(\sum_{n=p}^{q}\lambda_n|\varphi_n(s)|^2\right)\right\}^{1/2}.$$

由 $K(t,t)$ 在 I 中有界，对固定的 $s \in I$，级数 $\sum_n \lambda_n \overline{\varphi_n(s)}\varphi_n(t)$ 对 $t \in I$ 一致收敛. 据(11.6.6)，(8.7.8)与(8.5.3)，我们断定对一切 $(s,t) \in I \times I$ 有 $\Sigma_n \lambda_n \overline{\varphi_n(s)}\varphi_n(t) = K(s,t)$，这是因为 $t \mapsto |K(s,t) - \sum_n \lambda_n \overline{\varphi_n(s)}\varphi_n(t)|^2$ 在 I 中连续且它在 I 上的积分为 0.

特别地，有 $K(s,s) = \Sigma_n \lambda_n |\varphi_n(s)|^2$；因而据 Dini 定理(7.2.2)，级数 $\Sigma_n \lambda_n |\varphi_n(s)|^2$ 在 I 中一致收敛，且(11.6.7.1)证明了级数 $\Sigma_n \lambda_n \overline{\varphi(s)}\varphi_n(t)$ 在 $I \times I$ 中绝对且一致收敛，这就完成了证明(见问题 3 与 8).

(11.6.8) **附注.** (11.6.7)的结果当仅假定 U 有有限个固有值 $\nu_k < 0 (1 \leqslant k \leqslant m)$ 时仍是正确的. 因为(11.5.7c))证明，在与 G 内 $E(\nu_1) + \cdots + E(\nu_m)$ 的直交余空间 F'_{m+1} 中，算子 U 的限制是正的，并且我们应用(11.6.7)于这个算子，容易验明，它对应于核函数 $K(s,t) - \Sigma_h \lambda_h \overline{\varphi_h(s)}\varphi_h(t)$，这里 h 取遍一切满足 $\lambda_h < 0$ 的附标(有限个数). 结论立即得到.

(11.6.9) 我们能在较大的准 Hilbert 空间中考虑算子 U，即正则函数的空间 $F_+(7,6)$；它是右连续的(亦即满足对 $a \leqslant t < b$，有 $f(t+0) = f(t)$) 且满足 $f(b) = 0$；对这样的函数，关系 $\int_a^b |f(t)|^2 dt = 0$ 蕴含 $f(t) = 0$ 在 $I = [a,b]$ 中处处成立，因为它蕴含除了一个可数子集 D 外，$f(t) = 0$ (据(8.5.3))，并且满足 $a \leqslant t < b$ 的每个 t 都是 $I - D$ 中递减点列的极限. 空间 G 可以等同于 F_+ 的一子空间，由最终改变连续函数 $f \in G$ 在点 b 的值而做到；容易证明(利用(7.6.1))，G 在 F_+ 中稠密. 于是(11.2.8)的论证表明，U 是 F_+ 到 Banach 空间 $E = \mathscr{C}_c(I)$ 的紧映射(从而更加是准 Hilbert 空间 F_+ 到自身的紧映射). 当 G 用 F_+ 代替时，所有已证结果对 G 中算子 U 仍然正确.

问　　题

1) 推广 11.6 节的结果(除(11.6.7)以外)到 $K(s,t)$ 满足 8.11 节问题 4 的假设下的情形(利用那个问题以及 11.2 节问题 5)。

2) 在 11.6 节的准 Hilbert 空间 G 中，令 (f_n) 是全标准直交系 (6.5)；令 $K_n(s,t)=\sum_{k=1}^{n} f_k(s)\overline{f_k(t)}$，并令 $H_n(s)=\int_a^b |K_n(s,t)|\,dt$ (标准直交系 (f_n) 的第 n Lebesgue 函数)。对任何函数 $g\in G$，令 $s_n(g)=\sum_{k=1}^{n}(g|f_k)f_k$，以致 $s_n(g)(x)=\int_a^b K_n(x,t)g(t)\,dt$ 对任何 $x\in I$ 成立。

a) 试证，若对某个 $x_0\in I$，序列 $(H_n(x_0))$ 是无界的，则有函数 $g\in G$ 使序列 $(s_n(g)(x_0))$ 无界。(利用反证法，并证明，在相反假定下可定义严格递增整数序列 (n_k)，以及 G 中函数序列 (g_k)，具有下列性质：

1° 令 $c_k=\sup_n\left|\int_a^b K_n(x_0,t)g_k(t)\,dt\right|$ (据假设它是一有限数)，令 $d_k=c_1+\cdots+c_{k-1}$，且 $m_k=\int_a^b |K_{n_k}(x_0,t)|\,dt$，并令 $q_k=\sup(m_1,\cdots,m_{k-1})$；则

$$m_k\geqslant 2^{k+1}(q_k+1)(d_k+k);$$

2° 设 φ_k 是连续函数，满足 $\varphi_k(a)=\varphi_k(b)=0$，在 I 中 $|\varphi_k(t)|\leqslant 1$ 且 $\left|\int_a^b K_{n_k}(x_0,t)\varphi_k(t)\,dt\right|\geqslant m_k/2$ (见 8.7 节问题 8)；则 $g_k=\varphi_k/(2^k(q_k+1))$。于是证明函数 $g=\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ 在 I 中连续且与假设矛盾：为计算积分 $\int_a^b K_{n_k}(x_0,t)g(t)\,dt$，分解 g 为 $\sum_{i<k} g_i+g_k+\sum_{i>k} g_i$，将第二个积分极小化而将另两个积分极大化(滑动驼峰法)。)

b) 试证，对 $I=[-1,1]$ 中三角系(6.5)，第 n-Lebesgue 函数是常数 h_n，且 $\lim_{n\to\infty} h_n=+\infty$ (注意 $\int_{(k-1)/n}^{k/n}\left|\frac{\sin n\pi t}{\sin\pi t}\right|dt\geqslant\frac{2}{k\pi}$，对于 $2\leqslant k\leqslant n$)。断定对任何 $x_0\in I$，存在 I 中连续函数 g，使 $g(-1)=g(1)=0$，对于它，g 的“Fourier 级数”部分和 $\sum_{k=-n}^{n}\left(\int_{-1}^{1} g(t)e^{-ik\pi t}\,dt\right)e^{ik\pi x}/2$ 对 $x=x_0$ 无界。

3）设 g 是 $I=[-1,1]$ 上定义且连续的复值函数，满足 $g(-1)=g(1)=0$；延拓 g 为 $\mathbf{R}$ 上以 2 为周期的连续函数．设 $K(s,t)$ 为 $g(s-t)$ 在 $I\times I$ 上的限制；若 $g(-t)=\overline{g(t)}$，用核 $K(s,t)$ 定义的紧算子 U 是自伴的．试证函数 $\varphi_n(t)=e^{n\pi it}/\sqrt{2}$ 是 U 的固有向量，相应的固有值是 g 的"Fourier 系数" $a_n=\int_{-1}^{1}g(t)e^{-n\pi it}dt$．

利用这结果与问题 2，给出 Hermite 核函数 K 的例，关于它以 $\lambda_n\overline{\varphi_n(s)}\varphi_n(t)$ 为通项的级数对某些 s 与 t 的值有无界部分和，并给出一个正 Hermite 核函数 K，关于它有函数 $f\in G$ 使级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(f|\varphi_n)\varphi_n(t)$ 对某些 t 的值有无界部分和。

4）设 $I=[-2\pi,2\pi]$，在 $I\times I$ 上定义 $K(s,t)$ 如下，对 $0\leqslant s\leqslant 2\pi$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 它等于绝对收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin ns\sin nt$，对于 $I\times I$ 中的其它 (s,t) 值它等于 0。给出函数 $f\in G$ 的例使在 f 的典则分解中，f_0 不属于 G．（K 的固有函数是满足 $\varphi_n(t)=0$（对 $-2\pi\leqslant t\leqslant 0$），$\varphi_n(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt$（对 $0\leqslant t\leqslant 2\pi$）的函数 φ_n，取 f 为 I 上的连续函数，使在 $[0,2\pi]$ 上等于 $2\pi-t$，并证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(f|\varphi_n)\varphi_n(t)$ 在 I 中处处收敛，但有不连续和.）

5）用 11.6 节的一般记号，设 K 是定义在 $I\times I$ 上的 Hermite 核，并设 U 是 G 上相应的紧自伴算子．试证，对每个 $h>0$，U^h 对应于 Hermite 核 K_h，它由归纳法如下定义：$K_1=K$，且

$$K_h(s,t)=\int_a^b K_{h-1}(s,u)K(u,t)du.$$

证明对 $h\geqslant 2$，$K_h(s,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^h\overline{\varphi_n(s)}\varphi_n(t)$，级数在 $I\times I$ 中绝对且一致收敛．再证 $A_h=\int_a^b ds\int_a^b|K_h(s,t)|^2dt=\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^{2h}$，而序列 (A_{h+1}/A_h) 是递增的，且有极限等于 $|\lambda_1|^2$，这里 λ_1 是 U 的固有值的最大绝对值（利用 Cauchy-Schwarz 不等式）．

6）用 11.6 节的记号，令 K 为 $I\times I$ 上任意连续核函数，并令 U 是 G 中相应的紧算子．令 M 是 G 中满足 $U(M)\subset M$ 的有限维子空间；设 $(\psi_k)_{1\leqslant k\leqslant m}$ 是

空间M的标准直交基，记$U\phi_h=\sum_{k=1}^{n}a_{hk}\phi_k$.证明$\sum_{h,k}|a_{hk}|^2\leqslant\int_a^b dt\int_a^b|K(s,t)|^2ds$.（对每个$t\in I$，应用 Bessel 不等式(6.5.2)于函数$s\to K(s,t)$与$G$中标准直交系$(\bar{\Phi}_h)$.）

设(λ_n)是11.5节问题15c)中定义的(关于算子U)的序列．证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^2$收敛，且$\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^2\leqslant\int_a^b dt\int_a^b|K(s,t)|^2ds$.(用11.5节问题15c)的记号，应用前面结果于子空间$N(\mu_h)$的任何和.）

7）给出 Hermite 核$K(s,t)$的例，使得：若U是G中相应的紧算子，V是U^2的平方根(11.5节问题12)，没有 Hermite 核与紧算子V相对应．若存在这样的核，Mercer 定理(11.6.7)应能应用于它；于是取K为问题3中的第一个例子.）

8）试证为使由 Hermite 核$K(s,t)$定义的紧算子U是正的，其充要条件为，K是(在$I\times I$中)一个正型函数(6.3节，问题4)．(为证必要性，对于在I的有限个点$x_i(1\leqslant i\leqslant n)$的任意小邻域之外为0的函数$f$，写出不等式$\int_a^b\overline{f(t)}dt\int_a^b K(s,t)f(s)ds\geqslant0$．为证充分性，利用与8.7节问题1相同的方法)．由此性质与6.3节问题8，6.6节问题5给出 Mercer 定理的新证法。

9）a）定义在$I\times I$上（$I=[a,b]$）并满足8.11问题4假设的核函数$K(s,t)$称为 Volterra 核，若对$s>t$，$K(s,t)=0$．令$M=\sup_{s,t\in I\times I}|K(s,t)|$．若$U$是$G$中相应于$K$的紧算子(问题1)，试证$U^n$对应于一个 Volterra 核$K_n$，满足对$n>1$与$s\leqslant t$，$|K_n(s,t)|\leqslant M^n(t-s)^{n-1}/(n-1)!$（利用对$n$的归纳法)．由此推出，$U$的谱化为0，且对任何$\zeta\in\mathbf{C}$，$\|(1_G-\zeta U)^{-1}-1_G\|\leqslant M|\zeta|e^{M(b-a)|\zeta|}$.

b）取$a=0$，$b=1$，对$s\leqslant t$，$K(s,t)=1$而$s>t$，$K(s,t)=0$．试证，对这样的核，(11.6.5)中的函数$R(s,t,\lambda)$，当$s\leqslant t$时等于$-\lambda^{-2}\exp((t-s)/\lambda)$，而当$s>t$时等于0．(利用(8.14.2)计算$U^n$.）

10）设F_+是(11.6.9)中定义的对于区间$I=[0,1]$的准 Hilbert 空间，U是问题9b)中定义的算子，因而对每个函数$x\in F_+$，$y=Ux$是函数$t\to\int_0^t x(s)ds$．空间F_+在 Hilbert 空间E中是稠密子空间(6.6.2)；U被连续地延拓成为E中的紧算子，并仍记为U(11.2.9)．在本问题中，将确定E的一个闭子空间E_0，它不等于0与E，且满足$U(E_0)\subset E_0$.

a）试证(利用(7.4.1))，算子U满足11.5节问题19的条件，在那里取a为在I中等于1的常函数；设$a_0\in E_0$使$P_0a=s_0a_0$，其中$s_0>0$，$\|a_0\|=1$，使$0<s_0<1$．对每个$x\in E_0$，$V_0x=s_0^2(x|a_0)a_0$（11.5节问题19的记号）．

b）对每个非零$\zeta\in \mathbf{C}$，设$f(\zeta)=1-s_0^2((U_0-\zeta I)^{-1}a_0|a_0)$，试证对$\zeta\neq 0$，有$f(-\zeta)\overline{f(\bar{\zeta})}=1$．（为计算这个积，利用从a)推出的关系式$V_0(U_0+\zeta I)^{-1}a_0=s_0^2((U_0+\zeta I)^{-1}a_0|a_0)$，并化为表示式$(U_0^*-\zeta I)^{-1}(U_0+U_0^*)(U_0+\zeta I)^{-1}$.）从上述关系式与问题9)a)推证，$f(\zeta^{-1})$是$\mathbf{C}$中非零整函数．利用问题9)a)的控制与10.2节问题8)c)，推证　$f(\zeta^{-1})=\exp(s_0^2\zeta)$．

c）由b)与问题9b)推证，函数a_0在$0\leqslant t<1-s_0^2$中等于0，而在$1-s_0^2\leqslant t\leqslant 1$时等于1，并且$E_0$是由在区间$0\leqslant t<1-s_0^2$中为0的$F_+$中的函数生成的子空间在$E$中的闭包．

11）对定义在$[0,1]$中的任意两实值连续函数f，g，用$f*g$记定义在$[0,1]$中的函数$h(x)=\int_0^x f(x-y)g(y)dy$．试证$f*g$是连续的，且等于$g*f$；若$f_1$，$f_2$，$f_3$是定义在$[0,1]$中的三个连续函数，试证$(f_1*f_2)*f_3=f_1*(f_2*f_3)$，记为$f_1*f_2*f_3$．对每个整数$n>0$，可归纳地定义$f^{*n}$为$f^{*n}=f*(f^{*(n-1)})$；则$f^{*m}*f^{*n}=f^{*(m+n)}$．

设f在$[0,1]$中连续且$f(0)\neq 0$．试证，若对定义在$[0,1]$中的连续函数g有$f*g=0$，则$g=0$（"Titchmarsh 定理"）．注意，用问题10)的记号，$Uf=a*f$，并由问题10)推证，存在s，使$0\leqslant s\leqslant 1$且由f与U^nf，$n\geqslant 1$生成子空间在E中的闭包，也是这样的在$[0,s]$中为0连续函数的集的闭包；假设条件$f(0)\neq 0$蕴含$s=0$．最后注意，函数$t\mapsto g(1-t)$属于E且与每个$U^nf(n\geqslant 0)$直交．

12）设$E\subset \mathbf{C}^X$是具有再生核K的 Hilbert 空间(6.3节，问题4；参见9.13节问题)．设U在E上连续且U^*是它的伴随．

a）证明，对任意$y\in X$，函数$U^*\cdot K(\cdot,y)$属于E；若令$L(x,y)=(U^*\cdot K(\cdot,y))(x)$，则对任意函数$f\in E$，我们有$(U\cdot f)(y)=(f|L(\cdot,y))$．我们说算子$L$是算子$U$的核函数．

b）证明，函数$(x,y)\to\overline{L(y,x)}$是算子$U^*$的核函数．如果$U$是唯一的，则我们有

$$(L(\cdot,x)|L(\cdot,y))=K(y,x).$$

c）假设E可分．如果(f_n)是E的 Hilbert 基，且U是唯一的，则$g_n=U\cdot f_n$构成E的 Hilbert 基，并且对于U的核函数，我们有$L(x,y)=\Sigma_n f_n(x)\overline{g_n(y)}$．

7. Sturm-Liouville 问题

我们考虑在 $\boldsymbol{R}$ 的紧区间 $I=[a,b]$ 的二阶线性微分方程

(11.7.1) $y''-q(x)y+\lambda y=f(x)$,

这里 $q(x)$ 是 I 上的实值连续函数，$f(x)$ 是 I 上复值正则函数，它除了有限个内点外是连续的，并且 λ 是复数. (11.7.1)的解指的是一连续可微复值函数 $y(x)$，使 $y'(x)$ 是仅具有限个不连续点的正则函数的原函数，且关系式

$$y''(x)-q(x)y(x)+\lambda y(x)=f(x)$$

在 $\mathring{I}$ 的有限子集关于 $\mathring{I}$ 的余集上成立. Sturm-Liouville 问题是去找方程的解，使它还满足两个边界条件

(11.7.2) $h_1y(a)+k_1y'(a)=0$, $h_2y(b)+k_2y'(b)=0$,

这里 h_1, k_1, h_2, k_2 是实数，且 h_i, k_i 不全为 $0(i=1,2)$.

下面我们假定已有了线性微分方程的初等理论（见(10.8)）. 首先考虑齐次方程

(11.7.3) $y''-q(x)y+\lambda y=0$.

注意，对于(11.7.3)的任何解 y'' 在 I 中连续.

(11.7.4) 存在数 $r>0$ 使对实数 $\lambda\leqslant -r$，(11.7.3)的满足边界条件(11.7.2)的仅有解是 0.

因 q, λ, h_i, k_i 都是实的，很清楚，若(11.7.3)的解满足(11.7.2)，它的实部与虚部也是满足同样边值条件的解；因而可限于考虑实的解. 首先设 $k_1k_2\neq 0$，因此可设 $k_1=k_2=-1$. 于是还可以设 $y(a)\neq 0$，否则我们将有 $y'(a)=0$，且据存在定理(10.6.3)与(10.8)，我们得到定理的证明. 用适当常数乘 y，便可假设 $y(a)=1$, $y'(a)=h_1$. 注意若对 $y(x)\neq 0$ 令 $z=y'/y$，则有

(11.7.4.1) $z'=q(x)-\lambda-z^2$.

令 $M=\sup\limits_{x\in I}|q(x)|$，并设 $\lambda\leqslant -M-h_1^2-1$; 那么有 $z'(a)=$

$q(a)-\lambda-h_1^2\geqslant 1$，因而 z 在 a 关于 I 的某个邻域中严格递增．我们证明在 I 中 $y(x)\neq 0$ 且对一切 $x>a$ 有 $z(x)>h_1$．首先设 $y(x)$ 在 I 上为零，并令 x_1 为 $y(x)=0$ 满足 $>a$ 的最小解．则对 $a\leqslant x<x_1, y(x)>0$，因此 $y'(x_1)<0$（它不能为 0，否则 y 将在 I 中恒等于 0，这是由于唯一性定理(10.6.3)）并且因对任意 $x\in I$，$q(x)-\lambda>0$，所以据(11.7.3)对 $a\leqslant x<x_1$，$y''(x)>0$，因此 y' 对 $a\leqslant x<x_1$ 递增，从而在这区间上 <0；于是知当 $x<x_1$ 趋于 x_1 时，$z(x)$ 将趋于 $-\infty$．因 z 对 $a\leqslant x<x_1$ 连续，在这区间上应有最小数 $x_2>a$ 使 $z(x_2)=h_1$ 且对 $a<x<x_2$，$h_1<z(x)$．这蕴含 $z'(x_2)\leqslant 0$；但我们有 $z'(x_2)=q(x_2)-\lambda-h_1^2\geqslant 1$，这样得出矛盾，这就证明了我们的两个论断．同样可知，若 $\lambda\leqslant -M-h_2^2-1$，则在 I 中 $z(x)\leqslant h_2$．这样函数 z 在 I 中将满足 $|z(x)|\leqslant c=\sup(|h_1|,|h_2|)$，这里 c 与 λ 无关．现在由(11.7.4.1)得到 $z'(x)\geqslant -M-\lambda-c^2=\mu$，因此，据中值定理，$h_2-h_1=z(b)-z(a)\geqslant\mu(b-a)$．若取 λ 满足

$$\lambda\leqslant -M-c^2-\frac{|h_2-h_1|}{b-a}-1,$$

我们得到一个矛盾，这就完成了(11.7.4)当 $k_1k_2\neq 0$ 时的证明．

其次，设 $k_1=0, k_2\neq 0$（因此我们能假设 $k_2=-1$）．那么，用适当常数乘 y，可以设 $y(a)=0$，$y'(a)=1$；于是当 $x>a$ 趋于 a 时 z 趋于 $+\infty$．设 $\lambda\leqslant -M-2$；我们首先证明在 I 中 $y'(x)\geqslant 1$．因据(11.7.3)对 $x>a$ 在 a 的一邻域中有 $y''(x)>0$，故 $y'(x)>1$ 对 $x>a$ 在 a 的这一邻域中成立．设对某个 $x>a$，有 $y'(x)=1$，并令 x_1 为此方程的最小解．则对 $a<x\leqslant x_1$ 有 $y'(x)\geqslant 1$，因此在这区间上 $y(x)>0$ 且据(11.7.3) $y''(x)>0$；但我们应有 $y''(x_1)\leqslant 0$，这是一个矛盾．这样，y 在 I 上是严格增加的，因此 z 对 $a<x\leqslant b$ 是有限的．我们证明 $z(x)>\sqrt{-M-\lambda-1}$；否则，将有最小的 x_2 满足 $z(x_2)=\sqrt{-M-\lambda-1}$，且在这点处将有 $z'(x_2)\leqslant 0$．但由(11.7.4.1)得出 $z'(x_2)\geqslant -M-\lambda-z^2(x_2)\geqslant 1$，因而又得矛盾．如果设 λ 满足 $h_2^2<-M-\lambda-1$，则可

见关系式 $z(b)=h_2$ 是不可能的，因此定理在这情形得证．$k_2=0$，$k_1\neq 0$ 的情形可类似处理．最后，若 $k_1=k_2=0$，我们又可设 $y(a)=0$，$y'(a)=1$，且前面论证表明一旦 $\lambda\leqslant -M-2$，y 在 I 上便严格递增；这当然同条件 $y(b)=0$ 矛盾，证完．

如有必要，用 $q(x)+r$ 代替 $q(x)$ 并用 $\lambda+r$ 代替 λ，我们可从现在开始假设没有对 $\lambda\leqslant 0$ 满足两个边值条件（11.7.2）的（11.7.3）的非平凡解．

我们将利用下列恒等式

(11.7.5) $$\int_a^b (u''v-v''u)dt=(u'(b)v(b)-u(b)v'(b))-(u'(a)v(a)-u(a)v'(a)),$$

它是(8.14.1)的特殊情形 $p=2$ 的直接推论（u'' 与 v'' 都假定为 I 中的正则函数）．

(11.7.6) 对任何满足 $a<t<b$ 的 t，有 I 上实值连续函数 $x\to K_t(x)$，满足下列性质：

a）在区间 $a\leqslant x<t$，$t<x\leqslant b$ 的每一个中，K_t 是两次连续可微并且是 $y''-q(x)y=0$ 的解．

b）K_t 满足边值条件(11.7.2)．

c）在点 $x=t$，$K_t'(x)$ 有右极限与左极限，且 $K_t'(t+)-K_t'(t-)=-1$．

据线性微分方程的基本理论，有满足条件 $h_1u_1(a)+k_1u_1'(a)=0$（相应地，$h_2u_2(b)+k_2u_2'(b)=0$）的方程 $y''-q(x)y=0$ 的解 $u_1\neq 0$(相应地，$u_2\neq 0$)，且u_1 与 u_2 是不成比例的(否则将有对 $\lambda=0$ 满足两个边值条件(11.7.2)的(11.7.3)的非平凡解)；因此$y''-q(x)y=0$ 的任何解能唯一地写成 $y=c_1u_1+c_2u_2$，c_1，c_2 为常数，且函数 $u_1(x)u_2'(x)-u_2(x)u_1'(x)$ 是一常数 $d\neq 0$（据(8.14.1)）．我们仅需选择常数 c_1,c_2，使函数 K_t，对 $a\leqslant x\leqslant t$，等于 c_1u_1，对 $t\leqslant x\leqslant b$，等于 c_2u_2，在点 t 定义且连续，并满足条件 c)，它得出关系式

$$c_1u_1(t)-c_2u_2(t)=0,$$

$$c_1u_1'(t) - c_2u_2'(t) = 1,$$

从而给出 $c_1 = -u_2(t)/d$，$c_2 = -u_1(t)/d$，作为我们问题的解.

我们说(说得含糊些) K_t 是方程 $y'' - q(x)y = 0$ 相应于奇点 t 的**基本解**;函数 $(t,x) \to K_t(x)$ 也记成 $K(t,x)$ 并称为相应于所论 Sturm-Liouville 问题的 **Green 函数**. 它仅对 $a < t < b$, $a \leqslant x \leqslant b$ 定义，对 $x \leqslant t$ 等于 $-u_2(t)u_1(x)/d$，对 $x \geqslant t$ 等于 $-u_1(t)u_2(x)/d$，因此是连续的. 进而可以取 $K(a,x) = -u_1(a)u_2(x)/d$ 与 $K(b,x) = -u_2(b)u_1(x)/d$ 将它延拓使得对 $t = a$ 与 $t = 0$ 连续;此外它有对称性质

(11.7.7) $K(t,x) = K(x,t)$.

这可立即由它的表示推出.

(11.7.8) 为使函数 $y(x)$ 为方程 $y'' - q(x)y = f(x)$ 的解并满足边值条件(11.7.2),充要条件是 $y(x) = -\int_a^b K(t,x)f(t)dt$ (f 是 I 上复值正则函数,它除了 $\mathring{I}$ 的有限个点外是连续的).

a) 充分性. 因

$$y(x) = \frac{u_1(x)}{d}\int_x^b u_2(t)f(t)\,dt + \frac{u_2(x)}{d}\int_a^x u_1(t)f(t)dt,$$

微分方程(在 f 的连续点)与边界条件的验证化为导数的常规计算(并利用(8.7.3)).

b) 必要性. 应用恒等式(11.7.5)对两个区间 $a \leqslant t \leqslant x$ 与 $x \leqslant t \leqslant b$, $u(t) = y(t)$ 与 $v(t) = K_x(t)$; 关系式 $y(x) = -\int_a^b K(t,x)f(t)dt$ 立即由 Green 函数的性质(11.7.6)得到.

由(11.7.8)得到, Sturm-Liouville 问题的任何解是具有 Hermite 核的 Fredholm 积分方程的解:

(11.7.9) $y(x) - \lambda \int_a^b K(t,x)y(t)dt = g(x)$,

这里

$$g(x) = -\int_a^b K(t,x)f(t)dt,$$

其逆亦然. 相应于核函数 K，(11.2.8)中定义的准 Hilbert 空间 G 中算子 U 的非零固有值的逆 λ_n，称为 Sturm-Liouville 问题的固有值. 我们现在叙述下面的定理，它解决每种情形的 Sturm-Liouville 问题.

(11.7.10) 对紧区间 $I=[a,b]$ 上的任何实值连续函数 $q(x)$：

a) Sturm-Liouville 问题有一个无穷严格递增的固有值序列 (λ_n)，它们是实数，满足 $\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty$ 且级数 $\Sigma_n 1/\lambda_n^2$ 收敛.

b) 对每个固有值 λ_n，齐次 Sturm-Liouville 问题有一个实值的解 $\varphi_n(x)$，满足 $\int_a^b \varphi_n^2(x)dx=1$，且每个其它的解为 φ_n 的常数倍.

c) 序列 (φ_n) 是准 Hilbert 空间 G 中全标准直交系(用(11.6)的记号).

d) 设 w 是 I 上复值连续函数，它是一个正则函数 w' 的原函数，满足：(i) w' 在 I 上除了有限个内点外是连续的；(ii) w' 在它的每个连续的区间上是只有有限个不连续点的正则函数 w'' 的原函数；(iii) w 满足边界条件(11.7.2). 那么，若 $c_n=(w|\varphi_n)=\int_a^b w(t)\varphi_n(t)dt$，则我们有 $w(x)=\Sigma_n c_n\varphi_n(x)$，这里级数在 I 上绝对且一致收敛.

e) 若 λ 不是任一固有值 λ_n，则对每个在 I 上除了有限个点以外连续的正则函数 f，Sturm-Liouville 问题有唯一解 w，使 $c_n=(w|\varphi_n)$ 由公式 $c_n=d_n/(\lambda-\lambda_n)$ 给出，这里 $d_n=\int_a^b f(t)\varphi_n(t)\cdot dt$.

f) 对 $\lambda=\lambda_n$，为使 Sturm-Liouville 问题有解的充要条件是 $\int_a^b f(t)\varphi_n(t)dt=0$. 于是，对任何解 w，$c_n=(w|\varphi_n)$ 是任意的，且对 $m\neq n$，c_m 由 e) 中同样公式给出.

齐次 Sturm-Liouville 问题不能有两个线性独立的解，否则它将有这样的解 y，使 $y(a)$ 与 $y'(a)$ 是任意的，这是个矛盾；这证明

了 b). 一切固有值 λ_n 为实数的事实是由于(11.7.7)与(11.5.7); 此外，由(11.7.4)得知，至多有限个 λ_n 是负的. 据 Mercer 定理((11.6.7)与(11.6.8)),对 Green 函数有

$$K(t,x)=\sum_n \frac{1}{\lambda_n}\varphi_n(t)\varphi_n(x), \tag{11.7.10.1}$$

这级数在 $I\times I$ 上绝对且一致收敛(我们可以假设 0 不是任一个 λ_n). 我们注意到,当附加假定 w' 在 I 上连续时, d)由(11.6.4a)与(11.7.8)推得. 为证明 d) 在一般情形下亦真，令 $t_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 是 $\mathring{I}$ 的点,在那里 w' 不连续,并令 $a_i=w'(t_i+)-w'(t_i-)$. 于是函数 $v=w+\sum_{i=1}^{m}a_iK_{t_i}$ 满足 d) 的所有条件并且据(11.7.6)还有连续导数. 利用(11.7.10.1)我们完成 d) 的证明. 据 $E=\mathscr{C}_c(I)$ 到 G 的恒等变换为连续一事实推出，对满足 d) 中条件的函数 w，我们也可写 $w=\sum_n c_n\varphi_n$,这序列在准 Hilbert 空间 G 中收敛. 为证明 c),只须证明这些函数 w 的集 P 在 G 中稠密便可. 那么,对任何函数 $u\in G$,考虑连续函数 w_m,它在 $\left[a+\frac{1}{m},\ b-\frac{1}{m}\right]$ 中等于 u, 在 $\left[a,a+\frac{1}{2m}\right]$ 中 $\left(\text{相应地}, \left[b-\frac{1}{2m},b\right]\right)$ 等于线性函数 $x\to\alpha x+\beta$ 并满足第一(相应地，第二)边界条件(11.7.2),且在区间 $\left[a+\frac{1}{2m},\ a+\frac{1}{m}\right]$ 与 $\left[b-\frac{1}{m},\ b-\frac{1}{2m}\right]$ 的每一个上都分别等于线性函数. 此外还可以假设 w_m 在点 a, b 处的值是 0 或 1; 于是明显地，在区间 $\left[a,a+\frac{1}{m}\right]$ 与 $\left[b-\frac{1}{m},\ b\right]$ 的每一个上，当 m 充分大时，则有 $|u(x)-w_m(x)|\leqslant\|u\|+2$,因而据中值定理, $\|u-w_m\|_2$ 可任意小; 因 w_m 满足 d) 中一切条件，便证明了我们的论断. 这样一旦 c) 被证明，明显地全序列 (φ_n) 必然是无限的，而(应用(11.6.2)) a) 也得证. 最后, e) 与 f) 立即由(11.5.11)得到.

附注. 可能得到 φ_n 与 λ_n 的更精确讯息，且特别地可证明 λ_n/n^2 趋于一个有限极限(见问题 3 与 4).

当我们不再假设 Sturm-Liouville 问题对 $\lambda\leqslant 0$ 没有非平凡解时，我们已看到，存在 $r>0$，使得当 $q(x)$ 换成 $q(x)+r$ 时，相应的 Sturm-Liouville 问题对 $\lambda\leqslant 0$ 没有非平凡解. 若 (λ'_n) 是这后一问题的固有值序列，那么，我们说 $\lambda_n=\lambda'_n-r$ 是原来的 Sturm-Liouville 问题的固有值.

问　　题

1) 设 $I=[a,b]$ 是 $\boldsymbol{R}$ 中的紧区间，且令 H_0 为 I 上所有的实值连续可微函数的实向量空间；用数积

$$(x|y)=\int_a^b(x'y'+xy)dt$$

将 H_0 作成一个实的准 Hilbert 空间.

a) 试证 H_0 是可分的(用多项式(7.4.1)逼近函数 $x\in H_0$ 的导数)；因而 H_0 是 Hilbert 空间 H(6.6.2)的稠密子空间.

b) 若 (x_n) 是准 Hilbert 空间 H_0 中的 Cauchy 序列，试证序列 (x_n) 一致收敛于 I 上连续函数 v，且若 (y_n) 是 H_0 中具有同样极限(在 H 中)的第二个 Cauchy 序列，则 (y_n) 在 I 上一致收敛于同一函数 v；这样，H 的元能与 I 上某个连续函数恒同，然而它未必在 I 的每一点可微. (注意对每个函数 $x\in H_0$，在 I 上 $|x(t)-x(a)|\leqslant\sqrt{t-a}\left(\int_a^b x'^2dt\right)^{1/2}$.) 试证对任何函数 $z\in H_0$，它在 I 上两次连续可微且满足 $z'(a)=z'(b)=0$，我们有

$$(v|z)=-\int_a^b vz''dt+\int_a^b vzdt.$$

c) 设 α,β 为两个实数，q 是 I 上连续函数. 试证在 H_0 中，函数 $x\to\Phi(x)=\int_a^b(x'^2+qx^2)dt-\alpha(x(a))^2-\beta(x(b))^2$ 连续. 设 A 为 H 的子集，由满足 $\int_a^b x^2dt=1$ 的函数 x 组成(注意它不是 Hilbert 空间 H 中的有界集). 试证在 $A\cap H_0$ 中 $\Phi(x)$ 的下确界是有限的. (我们只须考察 $\alpha>0$，$\beta>0$ 的情形. 假定有序列 $(x_n)\subset A\cap H_0$ 使 $\lim\limits_{n\to\infty}\Phi(x_n)=-\infty$，$\lim x_n(a)=+\infty$ 且若 $\gamma_n=\left(\int_a^b x_n'^2dt\right)^{1/2}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n=\infty$；考虑函数列 $y_n=x_n/\gamma_n$，并从下述事

实推出矛盾：一方面 $\lim_{n\to\infty}\int_a^b y_n^2 dt = 0$，且另一方面，有一区间 $[a, c]\subset I$ 与一数 $\rho>0$ 使对每个 n 与每点 $t\in[a,c]$ 有 $|y_n(t)|\geqslant\rho$.)

d) 设 μ_1 为 $\Phi(x)$ 在 $A\cap H_0$ 中的下确界. 试证，若 (x_n) 是 $A\cap H_0$ 中的序列满足 $\lim_{n\to\infty}\Phi(x_n)=\mu_1$，则 (x_n) 在 H 中有界(与 c) 中方法相同)). 由此结果推出，选取适当的子序列，我们可以假定序列 (x_n) 在 I 上一致收敛于一函数 u（然而它并不事先属于 H）(利用 Ascoli 定理(7.5.7)).

e) $\Phi(x)$ 是 H_0 上的二次式，即 $\Phi(x+y)=\Phi(x)+\Phi(y)+2\Psi(x, y)$，这里 Ψ 是双线性的；对于 I 上两次连续可微的任何函数 z，满足 $z'(a)=z'(b)=z(a)=z(b)=0$，我们有 $\Psi(x,z)=-\int_a^b xz''dt+\int_a^b qxzdt$；$\Psi(v, z)$ 能对 I 上任何连续函数 v 用同样公式定义. 试证对任何这样的函数 z 与任何实数 ξ，有 $\lim_{n\to\infty}(\Phi(x_n+\xi z)/\int_a^b(x_n+\xi z)^2dt)\geqslant\mu_1$ 并由此结果推出

$$\int_a^b(uz''-quz+\mu_1 uz)dt=0.$$

因此，若 w 是两次连续可微函数，满足 $w''=qu-\mu_1 u$，据分部积分有 $\int_a^b(u-w)z''dt=0$；可肯定 $u-w$ 是次数 $\leqslant 1$ 的多项式(注意，由 $u-w$ 减去一个适当的 $\leqslant 1$ 次多项式 p，有函数 z 满足 $z''=u-w-p$，$z(a)=z(b)=z'(a)=z'(b)=0$)。因此 u 是两次连续可微的，满足微分方程

$$u''-qu+\mu_1 u=0,$$

并满足 $\int_a^b u^2dt=1$；此外，$u'(a)=-\alpha u(a), u'(b)=\beta u(b)$.（为证明后一论断，对任何 $z\in H_0$ 与任何实数 ξ 写出 $\Phi(u+\xi z)\geqslant\mu_1\int_a^b(u+\xi z)^2dt$.

2) a) 用(11.7.10)的记号，首先设 $k_1k_2\neq 0$，并令 $\alpha=h_1/k_1$，$\beta=-h_2/k_2$. 试证 φ_n 能用下列条件定义（准确到符号）：1° φ_1 满足，在 G 中球面 $A:(y|y)=1$ 上，函数 Φ（在问题 1c) 中定义的）对于 $y=\varphi_1$ 达到它的最小值，且最小值等于 λ_1；2° 对 $n>1$，令 A_n 是 A 与超平面 $(y|\varphi_k)=0$，$1\leqslant k\leqslant n-1$ 的交；则 φ_n 满足，在 A_n 上 Φ 对于 $y=\varphi_n$ 达到它的最小值且最小值等于 λ_n.（φ_1 的表征立可由问题 1 的结果推得；利用同样的论述去表征 φ_n.），

b) 若 $k_1=0$，$k_2\neq 0$，证明类似的结果，在 Φ 中用 0 代替 α，但对球 A 则用它与 G 中超平面 $y(a)=0$ 的交代替. 对于 $k_1\neq 0$ 与 $k_2=0$ 或 $k_1=k_2=0$ 情形类似地作一下.

c) 在 a) 的假设下，令 $z_1,\cdots,z_{n-1}$ 是 I 上 $n-1$ 个二次连续可微函数，并令 $B(z_1,\cdots,z_{n-1})$ 是 A 与 $n-1$ 个超平面 $(y|z_k)=0$ $(1\leqslant k\leqslant n-1)$ 的交. 试证，在 $B(z_1,\cdots,z_{n-1})$ 中，函数 Φ 在 $B(z_1,\cdots,z_{n-1})$ 的一点达到最小值 $\rho(z_1,\cdots,z_{n-1})$，且 λ_n 是 $\rho(z_1,\cdots,z_{n-1})$ 当 z_i 在 I 上两次连续可微函数的集中变动时的上确界(极大极小原理;用与 a) 中同样方法证明最小值的存在性;用 11.5 节问题 8)中同样方法证明不等式). 推广这结果到 $k_1k_2=0$ 的情形.

3) a) 在同一区间 I 考虑两个二阶线性微分方程 $y''-q_1y+\lambda y=0$, $y''-q_2y+\lambda y=0$, 带有同一边界条件(11.7.2); 设 $(\lambda_n^{(1)})$, $(\lambda_n^{(2)})$ 为这两个 Sturm-Liouville 问题的两个严格递增的固有值序列. 试证，若 $q_1\leqslant q_2$，则对每个 n，$\lambda_n^{(1)}\leqslant\lambda_n^{(2)}$，并且若在 I 上 $|q_1(t)-q_2(t)|\leqslant M$，则对每个 n，$|\lambda_n^{(1)}-\lambda_n^{(2)}|\leqslant M$ (利用极大极小原理).

b) 由 a) 断定存在常数 c 使对每个 n，有

$$|\sqrt{\lambda_n}-n\pi/l|\leqslant c,$$

这里 $l=b-a$. (研究 Sturm-Liouville 问题，当 q 为常数的特殊情形).

4) a) 设 y 是(11.7.3)在 $I=[a,b]$ 上对 $\lambda\geqslant\lambda_0>0$ 的任何解. 试证存在两个常数 A, ω，使 y 为 Volterra 积分方程

$$(*)\quad y(t)=A\sin\sqrt{\lambda}(t+\omega)+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_a^t q(s)y(s)\sin\sqrt{\lambda}(t-s)ds$$

的解 (11.6 节，问题 8).

试证存在与 λ 无关的常数 B，使 $A^2\leqslant B(y|y)$ (利用 Cauchy-Schwarz 不等式使(*)右边积分极大化).

b) 由 a) 推证，若在 Sturm-Liouville 问题中，$k_1\neq0$，则有两个常数 C_0, C_1，使对每个 n 与每个 $t\in I$，有

$$\left|\varphi_n(t)-\sqrt{\frac{2}{l}}\cos\sqrt{\lambda_n}t\right|\leqslant C_0/n$$

与

$$\left|\varphi_n'(t)-\sqrt{\frac{2}{l}}\sqrt{\lambda_n}\sin\sqrt{\lambda_n}t\right|\leqslant C_1,$$

这里 $l=b-a$ (利用 a) 与问题 3b) 的结果). 当 $k_1=0$ 时，相应结果如何?

附录　线性代数概要

在数学中，除了布尔代数(1.2)之外，没有比线性代数使用得更为普遍的理论了；尽管一批教授与教科书作者用关于矩阵的十分荒谬的计算掩盖了它的简洁性，却很难有任何较为初等的理论．我们将给出在本书中所用的线性代数概念与结果的简要概述．至于更完整的论述，读者可参考 Halmos [11]，Jacobson [13] 或 Bourbaki [4] 的著作．

1. 向 量 空 间

(A.1.1)　在整个附录中，用K表示固定的(可换)域，它的元素称为纯量．K上的向量空间(或简称向量空间，如果关于K不会有混淆的话)是指赋予如下两个映射所定义的结构的集合E：

$E\times E$ 到E的　　$(x, y)\rightarrow x+y$　　(称为加法)，

$K\times E$ 到E的　　$(\lambda, x)\rightarrow \lambda x$　　(称为乘法)，

它们具有性质：

(I.1)　$x+(y+z)=(x+y)+z$　　(记为 $x+y+z$)；

(I.2)　$x+y=y+x$；

(I.3)　存在一零元素 $0\in E$，使对每个 $x\in E$ 有 $x=0+x$[1]；

(I.4)　对每个 $x\in E$，存在元素 $-x\in E$ 使 $x+(-x)=0$；

(II.1)　$(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$；

(II.2)　$\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$；

(II.3)　$\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$；

(II.4)　$1\cdot x=x$.

---

1)　经验表明：与某些作者的意见相反，用同一符号 0 来表示所有向量空间的零元素没有混淆的危险(特别是与K中的零元素)．

(在这些条件中，x, y, z 是 E 的任意元素，而 λ, μ 是 K 中的任意元素)。

条件 (I.1) 到 (I.4) 表示 E 是关于加法的一可换群. 可以得出：如果 $(x_i)_{i\in H}$ 是 E 中元素的有限族，则和 $\sum_{i\in H} x_i$ 是唯一确定的. (读者记住，约定 $\sum_{i\in\phi} x_i = \phi$.)

由 (I.3) 与 (II.2) 可推出 $\lambda x = \lambda(x+0) = \lambda x + \lambda 0$，因此对所有 $\lambda\in K$，有 $\lambda 0 = 0$. 从 (II.1) 得到 $\lambda x = (\lambda+0)x = \lambda x + 0x$，故对所有 $x\in E$，有 $0x = 0$. 最后，从上面两个关系式与 (I.4)，(II.1) 以及 (II.2)，我们得到 $\lambda x + \lambda(-x) = \lambda 0 = 0$ 且 $\lambda x + (-\lambda)x = 0x = 0$，从而 $(-\lambda)x = \lambda(-x) = -(\lambda x)$.

E 中元素通常称为**向量**.

(A.1.2) 由单一元素 0 组成的加法群是向量空间；纯量乘法是 $K\times\{0\}$ 到 $\{0\}$ 的唯一的映射.域 K 是它自身上的向量空间，纯量乘法就是 K 中的乘法. 若 K' 是 K 的子域，且若 E 是 K 上的向量空间，则如果我们定义纯量乘法为映射 $(\lambda, x)\to\lambda x$ 在 $K'\times E$ 上的限制，E 也是 K' 上的向量空间.

(A.1.3) 若 E 是向量空间，E 的向量子空间(或简称子空间)定义为 E 中这样的子集 F：使对任意纯量 λ, μ，关系 $x\in F$，$y\in F$ 蕴含 $\lambda x + \mu y\in F$.

E 中加法(相应地，纯量乘法)在 $F\times F$ 上的(相应地，$K\times F$ 上的)限制是到 F 的映射，因此 F 是关于这些映射的向量空间. 这术语是合理的.

如果 $(x_i)_{1<i<n}$ 是 F 中向量的任一有限族，且 $(\lambda_i)_{1<i<n}$ 是纯量族，则由关于 n 的归纳法我们看到 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\in E$. 形如 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$ (这里 $x_i\in E$，$\lambda_i\in K$) 的向量称为 x_i 的**线性组合**. (线性组合总是指有限和，甚至，当 E 是，例如，赋范空间(5.1)，其中一定的无限和有定义(5.3)时也如此).

在向量空间E中，$\{0\}$与E是向量子空间(称为**平凡向量子空间**)．若$\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$是$E$的子向量空间的任意族，则交$\bigcap_{\alpha\in I} M_\alpha$也是向量子空间．若$A$是$E$的任一子集，则包含$A$的子空间(这样的子空间是存在的，例如$E$自身)的交$M$就是包含$A$的最小子空间．我们说**$M$由$A$生成**，或$A$是$M$的一个**生成系**.

(A.1.4) 由A生成的向量子空间M是A的元素的有限族的所有线性组合的集.

从上面可知，这样的线性组合属于包含A的每个向量子空间，因此属于M．反之，若$x=\sum_i \gamma_i x_i$与$y=\sum_j \delta_j y_j$是A的元素的两个线性组合，则$\lambda x+\mu y=\sum_i(\lambda\gamma_i)x_i+\sum_j(\mu\delta_j)y_j$亦然．于是所有这样线性组合的集是$E$的向量子空间，它包含$A$(由(II.4)，因而与$M$重合.

特别，取A为E的向量子空间族$(N_\beta)_{\beta\in J}$的并，则A的元素的每个线性组合都取$x_{\beta_1}+x_{\beta_2}+\cdots+x_{\beta_m}$的形式，这里$(\beta_j)_{1<j<m}$是$J$的元素的任一有限族，且对每个$j$，$x_{\beta_j}\in N_{\beta_j}$．因此所有这些和的集是包含所有$N_\beta$的最小向量子空间，称它为$N_\beta$的**和**(不要与它们的并混淆！)且记为$\sum_{\beta\in J} N_\beta$．当$J=\{1,2\}$时，也使用记号$N_1+N_2$，对指标集的任意有限集也类似．显然，$M+N=N+M$与$M+(N+P)=(M+N)+P$对$E$中任意三个向量子空间成立．关系$M\subset N$等价于$M+N=N$.

对每个$x\in E$，由x生成的E的子空间记为Kx(当$x\neq 0$时有时称它为“射线”)．若$(x_\alpha)_{\alpha\in A}$是E中任意向量族，则由这个族生成的子空间是$\sum_{\alpha\in A} Kx_\alpha$.

(A.1.5) 设$(E_\alpha)_{\alpha\in I}$是任一向量空间族．由这个族我们将构造一个新的向量空间E，称为族(E_α)的**直和**(或外部直和)并记为

$\bigoplus_{\alpha\in I} E_\alpha$. E 的元素是族 $x=(x_\alpha)_{\alpha\in I'}$，这里对所有 α，$x_\alpha\in E_\alpha$，且除去有限个附标外对每一个 α，$x_\alpha=0$. 向量 x_α 称为在 X 中附标 α 的分量. E 中的加法与纯量乘法由如下公式定义：

$$(x_\alpha)+(y_\alpha)=(x_\alpha+y_\alpha),$$
$$\lambda(x_\alpha)=(\lambda x_\alpha)$$

((λx_α) 属于 E，因为 $\lambda 0=0$). (A.1.1) 的条件可直接验证(E 的 0 元素是满足对任意 α 有 $x_\alpha=0$ 的族 (x_α)). 当 $J=\{1,2\}$时，使用记号 $E_1\oplus E_2$，对附标的任一有限集也类似. 当 J 为有限时，集 E 等于积集 $\prod_{\alpha\in J} E_\alpha$. 若 J 是任意的而 H 是 J 的子集(不是 ϕ 或 J)，则可由一个明显的方式使向量空间 $\bigoplus_{\alpha\in J} E_\alpha$ 恒同于 $\left(\bigoplus_{\alpha\in H} E^\alpha\right)\oplus\left(\bigoplus_{\alpha\in J-H} E_\alpha\right)$.

当所有 E_α 都等于 K 时，它们的直和记为 $K^{(I)}$. 它是 I 到 K 的所有这样的映射 $\alpha\to\lambda(\alpha)$ 的集：对除有限个附标 $\alpha\in I$ 之外，有 $\lambda(\alpha)=0$.

2. 线 性 映 射

(A.2.1) 设 E，F 是同一域 K 上的两个向量空间. 映射 u: $E\to F$ 称为**线性的**，如果它对任意纯量 λ，μ 与 E 中任意向量满足条件

(A.2.1.1) $u(\lambda x+\mu y)=\lambda u(x)+\mu u(y)$.

特别，我们有 $u(\theta)=0$. 由 (A.2.1.1) 对 n 用归纳法可得

(A.2.1.2) $u\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u(x_i)$,

这里 $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ 是 E 中任意有限向量族，$(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ 是纯量族.

E 到 E 的线性映射称为 E 的**自同态**. E 到 K 的线性映射称为 E 上的**线性型**.

(A.2.2) 设u: $E \to F$ 是线性映射. 若M是E的任一子空间(相应地，F的任一子空间N)，可以直接验证它的象$u(M)$(相应地，逆象$u^{-1}(N)$)是$F(E)$的子空间. 若M_α是E的任意子空间族，则$u\left(\sum_\alpha M_\alpha\right)=\sum_\alpha u(M_\alpha)$.

特别，$u(E)$(称为u的**象**，记为$\mathrm{Im}(u)$)是F的子空间，并且$u^{-1}(0)$(称为u的**核**，记为$\ker(u)$)也是E的子空间. 映射u是单射的当且仅当$u^{-1}(0)=\{0\}$，因为关系式$u(x)=u(x')$等价于$u(x-x')=0$.

若u是双映射，则称它为**E到F上的同构**.(若同时有$F=E$，则称它为E的**自同构**). 若u是双映射，显然逆映射u^{-1}: $F\to E$是线性的，因此是F到E上的同构. 两个向量空间E, F称为**同构的**，若存在E到F的同构. 此时，由对E证明的任何定理(包括对E的子空间)可以直接给出关于F的相应定理(包括问题中向量与子空间的象).

若u: $E\to F$ 是单线性映射，则u可看成E到它的象$u(E)$上的同构.

(A.2.3) 线性映射的例. 向量空间E到自身上的恒等映射(通常记为1_E或I_E，或简单地记为1或I)是线性的. E到仅由0组成的向量空间中的唯一的映射也是线性的. 对每个$\lambda\in K$，映射h_λ: $x\to\lambda x$是E的自同态，称为**关于比率λ的位似映射**. 若$\lambda=0$，则它的象是E中的零子空间$\{0\}$. 若$\lambda\neq 0$，则h_λ是双映射并且它的逆自同构是关于比率λ^{-1}的位似映射，因为由(II.3)，我们有$x=\lambda^{-1}(\lambda x)$. 对每个$x_0\in E$，$K$到$E$的映射$\xi\to\xi x$是线性的. 若$x_0=0$，它的象就是$\{0\}$；否则，这映射是单射，因若$\xi\neq 0$，我们有$\xi^{-1}(\xi x_0)=x_0\neq 0$(由II.3与II.4)并且得出$\xi x_0\neq 0$. 因而$E$中的每条"射线"$Kx_0$(这里$x_0\neq 0$)是到$K$中的同构，且对每个非零纯量$\lambda$，把它记为$K(\lambda x_0)$.

若F是E的任一向量子空间，典则单映射j: $F\to E$(1.6.1)是线性映射.

设 $(E_\alpha)_{\alpha\in I}$ 是向量空间族，且 $E=\bigoplus_{\alpha\in I}E_\alpha$ 是它们的直和. 对每个 $\alpha\in I$，我们由下述规则定义一线性映射 j_α: $E_\alpha\to E$，这里 $j_\alpha(x_\alpha)=(y_\beta)_{\beta\in I}, x_\alpha\in E_\alpha$；且若 $\beta\neq\alpha, y_\beta=0$，而 $y_\alpha=x_\alpha$. 显然，j_α 是单映射，因而它的象 $j_\alpha(E_\alpha)$ 是 E 的子空间，并同构于 E_α. 这个子空间称为附标 α 在 E 中的**分量子空间**，通常它与 E_α 恒同. 我们也定义线性映射 p_α: $E\to E_\alpha$（对每个 $\alpha\in I$）如下：若 $x=(x_\beta)_{\beta\in I}$ 是 E 中的元素，则 $p_\alpha(x)=x_\alpha$. 显然 p_α 是一个满映射. 若 I 有限，则 p_α 是关于附标 α 的射影(1.3). 对每个 $x\in E$，使 $p_\alpha(x)\neq 0$ 的附标 $\alpha\in I$ 所成的集 H 是有限的，且有 $x=\sum_{\alpha\in H}j_\alpha(p_\alpha(x))$.

(A.2.4) 若 u: $E\to F$ 与 u': $E\to F$ 是两个线性映射，而 λ 是纯量，可以直接验证：映射

$$x\to u(x)+u'(x)$$

与

$$x\to\lambda u(x)$$

是 E 到 F 的线性映射，分别记为 $u+u'$ 与 λu. 于是按常规可验证 E 到 F 的线性映射所成的集(记为 $\mathrm{Hom}_K(E,F)$，或简记为 $\mathrm{Hom}(E,F)$) 是关于加法 $(u,u')\to u+u'$ 与纯量乘法 $(\lambda,u)\to\lambda u$ 的向量空间. 换句话说，(A.1.1) 中的八个条件满足.

设 u: $E\to F$ 与 v: $F\to G$ 是线性映射. 则它们的合成 $v\circ u$: $E\to G$ 也是线性的. 此外，若 u': $E\to F$ 与 v': $F\to G$ 是另外的两个线性映射，λ 是纯量，则有

(A.2.4.1) $v\circ(u+u')=v\circ u+v\circ u'$,

(A.2.4.2) $(v+v')\circ u=v\circ u+v'\circ u$,

(A.2.4.3) $v\circ(\lambda u)=(\lambda v)\circ u=\lambda(v\circ u)$.

(如果记住两个映射相等的定义(1.4)，则上述关系的验证是显然的).

E 的自同构集 $\mathrm{Hom}(E,E)$ 也记作 $\mathrm{End}(E)$ 或 $\mathrm{End}_K(E)$. 赋

予这个集加法 $(u, v) \to u+v$ 与"乘法" $(u, v) \to u \circ v$，它就成为以 I_E 为单位元素的环(一般是不可换的). 这一点由上面的公式与由 1.7 节便可得到. 性质(A.2.4.3)，它把 $\mathrm{End}(E)$ 的环结构与它的向量空间结构联系起来，可用 $\mathrm{End}(E)$ 是 K 上的代数这种说法来表示。

3. 子空间的直和

(A.3.1) 设 $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ 是向量空间族，F 是向量空间，并且对每个 $\alpha \in I$，设 u_α: $E_\alpha \to F$ 是线性映射. 则存在直和 $E = \bigoplus_{\alpha \in I} E_\alpha$ 到 F 的唯一的线性映射 u，使得对所有 $\alpha \in I$，有 $u \circ j_\alpha = u_\alpha$ (这里 j_α: $E_\alpha \to E$ 是(A.2.3)中定义的典则单射).

对每个 $x \in E$，有 $x = \sum_{\alpha \in H} j_\alpha(p_\alpha(x))$，这里 H 是 I 中包含使 $p_\alpha(x) \neq 0$ 的所有 α 的任一有限子集. 因此必定有表示 $u(x) = \sum_{\alpha \in H} u(j_\alpha(p_\alpha(x))) = \sum_{\alpha \in H} u_\alpha(p_\alpha(x))$，由此可得出 u 的唯一性. 反之，如果我们用这个公式定义 u，就可直接验证 u 是线性的(利用如下事实：在 E 中给出 x 与 y，可以取 H 为 I 中包含使 $p_\alpha(x) \neq 0$ 或 $p_\alpha(y) \neq 0$ 的所有附标 α 的有限集). 证完.

(A.3.2) 设 E 是向量空间，$(M_\alpha)_{\alpha \in I}$ 是 E 的子空间族，且对每个 $\alpha \in I$，设 f_α: $M_\alpha \to E$ 是典则单射. 由(A.3.1)，存在 $M = \bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha$ 到 E 的线性映射 f，使对所有 $\alpha \in I$，有 $f \circ j_\alpha = f_\alpha$. 按定义，$f$ 的象是 E 的子空间 $M' = \sum_{\alpha \in I} M_\alpha$. 如果 f 是单映射，E 的子空间的和 $\sum_{\alpha \in I} M_\alpha$ 称为**直和**. 而这表示属于 $\sum_{\alpha \in I} M_\alpha$ 的每个向量 x 可以

唯一地表示为式 $\sum_{\alpha\in H} x_\alpha$，这里$H$是 I 的有限子集，而 $x_\alpha\in E_\alpha$ 且对所有 $\alpha\in H$ 有$x_\alpha\neq 0$.（若 $x=0$，我们必得取 $H=\phi$.）

通常我们将通过 f 把 $\sum_{\alpha\in I} M_\alpha$ 与 $\bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha$ 等同起来.

(A.3.3) 向量空间的子空间族 $(M_\alpha)_{\alpha\in I}$ 的和是直和，当且仅当对任意 $\alpha\in I$，$M_\alpha\cap\sum_{\beta\neq\alpha} M_\beta=\{0\}$.

因为，说(A.3.2)中定义的映射 f 不是单射，就意味着存在有限个非零元素 $x_{\alpha_i}\in M_{\alpha_i}(1\leqslant i\leqslant n)$ 使 $\sum_i x_{\alpha_i}=0$(A.2.2). 这方程可以写成 $x_{\alpha_1}=\sum_{j>1}(-x_{\alpha_j})$，它表示 x_{α_1} 属于$M_{\alpha_1}\cap\sum_{\beta\neq\alpha_1} M_\beta$. 因此结果得证.

(A.3.4) 若E等于两个子空间M与N的直和，我们称M与N是E的互余子空间（或M(相应地，N)是N的余(相应地，M)）. 这表示 $M+N=E$ 且 $M\cap N=\{0\}$. 因此我们有线性映射 p: $E\to M$ 与 q: $E\to N$，是E到M与N上的“射影”，使对所有 $x\in E$ 有 $x=p(x)+q(x)$. p（相应地，q）的核是 N（相应地，M），且 $p(p(x))=p(x)$，$q(q(x))=q(x)$.

说子空间M的“这个”余子空间一语是不合适的，因为一般说来余子空间多于一个. 然而有如下结果：

(A.3.5) 设 M，N，N' 是E的子空间，使M与N为互余的，而M与N'也互余，又设 q: $E\to N$ 是E到N上的射影，相应于直和分解 $E=M\oplus N$. 则 q 在 N' 的限制 q': $x\to q(x)$ 是 N' 到 N 的同构.

因为 q 的核是 M，q' 的核是 $M\cap N'=\{0\}$，因此 q' 是单射. 另一方面，若 x 是N中的任意元素，则存在 $y\in M$ 与 $z\in N'$，使 $x=y+z$，故 $q(z)=q(x)=x$，这是因为 $q(y)=0$. 于是 q' 是满射.

4. 基，维数与余维数

(A.4.1) 向量空间E中的向量族$(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ **称为自由的**，且其中向量称为**线性无关的**，若对I的每个有限子集H，关系式$\sum_{\alpha\in H}\lambda_\alpha x_\alpha=0$蕴含$\lambda_\alpha=0$对所有$\alpha\in H$成立．可以得出：对所有$\alpha\in I$，$x_\alpha\neq 0$，且若$\beta\neq\alpha$，有$x_\beta\neq x_\alpha$（否则就应当有$1\cdot x_\alpha+(-1)x_\beta=0$）．因此子空间$Kx_\alpha$是同构于$K$的"射线"，且$x_\alpha$线性无关可以表示为：所有$x_\alpha$都是非零元素，并且射线$Kx_\alpha$的和是直和．

(A.4.2) 族$(x_\alpha)_{\alpha\in I}$是自由的，当且仅当对每个$\alpha\in I$，向量x_α不属于由$x_\beta(\beta\neq\alpha)$生成的子空间．

这可由上面附注与(A.3.3)得到．

(A.4.3) 设u：$E\to F$是线性映射，且$(y_\alpha)_{\alpha\in I}$是$u(E)$中元素的自由族．对每个$\alpha\in I$，设$x_\alpha\in E$满足$u(x_\alpha)=y_\alpha$．则族$(x_\alpha)_{\alpha\in I}$是自由的，并且$\ker(u)$与$\sum_{\alpha\in I}Kx_\alpha$的和是直和．

假设对I的某个有限子集H有形如$\sum_{\alpha\in H}\lambda_\alpha x_\alpha+y=0$的关系，这里$y\in\ker(u)$．便可推出$\sum_{\alpha\in H}\lambda_\alpha u(x_\alpha)=0$，因为$u(y)=0$．又因族$(u(x_\alpha))_{\alpha\in H}$是自由的，我们推出对所有$\alpha$有$\lambda_\alpha=0$，因此$y=0$．证完．

(A.4.4) E的向量族$(b_\alpha)_{\alpha\in I}$称为**E的基**，如果它是自由的，并且生成E；或等价地，如果和$\sum_{\alpha\in I}Kb_\alpha$是直和且等于$E$；或又等价于：如果对每个$x\in E$，存在唯一的纯量有限族$(\lambda_\alpha)_{\alpha\in H}$，使$H\subset I$且对所有$\alpha\in H$，有$\lambda_\alpha\neq 0$，以及$x=\sum_{\alpha\in H}\lambda_\alpha b_\alpha$．

因此，每个自由族是向量子空间$\sum_{\alpha\in I}Kx_\alpha$的基．

在向量空间 $K^{(I)}$ 中，对任意 $\alpha\in I$，用 e_α 记这样的向量 $(\delta_{\beta\alpha})_{\beta\in I}$：使当 $\beta\neq\alpha$ 时 $\delta_{\beta\alpha}=0$，而 $\delta_{\alpha\alpha}=1$. 显然族 $(e_\alpha)_{\alpha\in I}$ 是 $K^{(I)}$ 的基. 称它为 $K^{(I)}$ 的**典则基**. 若向量空间 E 有基 $(b_\alpha)_{\alpha\in I}$，则存在 $K^{(I)}$ 到 E 上的唯一的同构，对每个 $\alpha\in I$，它把 e_α 映到 b_α (A.3.1).

(A.4.5) 设 V 是向量空间 E 的向量子空间，且设 E 由 V 与有限族 $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ 的向量集的并生成，则存在这样的子族 $(x_{i_k})_{1\leqslant k\leqslant r}$：它是 V 在 E 中的余子空间的基.

r 是满足下述条件的最大整数：存在 $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ 的子族 $(x_{i_k})_{1\leqslant k\leqslant r}$，使 V 与 Kx_{i_k} 的和 E' 是直和. 故只要证明 $E'=E$ 就够了.

假设 $E'\neq E$. 则存在附标 j，使 $1\leqslant j\leqslant n$ 与 $x_j\notin E'$（否则 E' 将包含 V 与所有 x_i，因此由假设条件得出 E' 等于 E）. 于是如果我们能证明 V，Kx_{i_k} 与 Kx_j 的和是直和，就会得出矛盾. 为此考虑形如 $\lambda x_j+\sum\limits_{K}\mu_k x_{i_k}+y=0$ 的关系，其中 $y\in V$. 首先，这蕴含 $\lambda=0$（否则 $x_j=-\sum\limits_{k}(\lambda^{-1}\mu_k)x_{i_k}-\lambda^{-1}y$，它属于 E'）. 则由 $(x_{i_k})_{1\leqslant k\leqslant r}$ 的定义知对所有 K，$\mu_k=0$ 与 $y=0$. 证完.

(A.4.6) 由向量的有限集生成的每个向量空间具有属于这个集的向量组成的基.

在(A.4.5)中取 $V=\{0\}$.

当除去“有限”这一条件时，上面最后两个结果仍然成立(参看[4])，但本书中却不需要用这种推广.

(A.4.7) 设 E 是具有有限基 $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ 的向量空间. 则 E 的每个基都恰好具有 n 个元素.

只要证明 E 的每个另外的基至多有 n 个元素就够了，因为我们此时可交换两个基的位置. 对 n 用归纳法，当 $n=0$ 时结果是显然的. 设 $(b'_\alpha)_{\alpha\in I}$ 是 E 的基，我们考虑这个基的元素 b'_γ 与 E 的射线 $V=Kb'_\gamma$. 子空间 $V'=\sum\limits_{\alpha\neq\gamma}Kb'_\alpha$ 与 V 在 E 中是互余的. 另

一方面，E 由 V 与 b_i 生成，因此存在 $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ 的子族 $(b_{i_k})_{1\leqslant k\leqslant r}$，使所有 i_k 互不相同，且使 $V''=\sum_k Kb_{i_k}$ 与 V 在 E 中互余(A.4.5)。我们不能有 $r=n$，否则将得出 $V''=E$，而这是荒谬的．因此 V'' 有 $r(\leqslant n-1)$ 个元素的基，故 V' 与 V'' 是同构的(A.3.5)，从而得到 V' 具有 $r(\leqslant n-1)$ 个元素的基．故归纳法假设表明 $I-\{\gamma\}$ 至多有 $n-1$ 个元素，因而 I 至多有 n 个元素．证完．

具有有限基的向量空间 E 称为**有限维的**．(A.4.7)中的整数 n，也就是 E 的任一基中元素的个数称为 E（在 K 上的）**维数**，记为 $\dim E$ 或 $\dim_K E$．如果 $\dim E=n$，则 E 同构于 K^n．不是有限维的向量空间称为**无限维的**．关系 $\dim E=0$ 等价于 $E=\{0\}$．

(A.4.8) (i) 在具有有限维 n 的向量空间 E 中，每个生成系包含 E 的一个基且至少有 n 个元素．由 n 个元素组成的任一个生成系是一个基．

(ii) 在具有有限维 n 的向量空间 E 中，向量的每一自由组含于 E 的一个基中，且至多有 n 个元素．由 n 个元素组成的自由组是一个基．

如果 $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ 是一自由组，把(A.4.5)应用到 $V=\sum_{i=1}^{m}Kx_i$ 与 E 的基 $(b_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ 上，便得出：存在一子族 $(b_{j_h})_{1\leqslant h\leqslant r}$，使 x_i 与 b_{j_h} 构成 E 的基．故(ii)得证．论断(i)由(A.4.7)与(A.4.6)(在有限生成系的情形下)推得．在一般情形下，只要证明生成系 S 包含 n 个元素的自由组就够了．如若不然，设从 S 中取出的自由组中元素的最大个数是 $m<n$．若 $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ 是这样的自由族，则由(A.4.7) $V=\sum_{i=1}^{m}Ky_i$ 不能等于 E，因此存在 $z\in S$ 而不含于 V．于是由(A.4.5)，y_i 与 z 形成 $V+Kz$ 的基，因而也构成 $m+1$ 个元素的自由族，这个矛盾完成了我们的证明．

(A.4.9) 向量空间 E 的子空间 V 称为**有限余维的**，如果 V 在 E 中

具有一个维数是有限的余子空间. 所述维数不依赖于余子空间的选择(A.3.5), 并称之为 V 在 E 中的**余维数**, 记为 $\operatorname{codim} V$ 或 $\operatorname{codim}_E V$. 如果 V 没有有限维余子空间, 则 V 称为在 E 中是**无限余维的**. 由(A.4.5), V 在 E 中是无限余维的当且仅当 E 由 V 与一有限的向量集的并生成.

(A.4.10) 若 E 是有限维向量空间, 则 E 的每个子空间 F 是有限维的, 并且在 E 中也是有限余维的, 还有

(A.4.10.1) $\dim F + \operatorname{codim} F = \dim E$.

应用(A.4.5)于 F 与 E 的基, 便推出: 存在 F 在 E 中的余子空间 F', 且 $\dim F' \leqslant \dim E$. 改变 F 与 F' 的位置, 并利用(A.3.5), 得知 F 也是有限维的. 若 $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ 是 F 的基, $(x'_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ 是 F' 的基, 则显然 x_i 与 x'_j 一起构成 E 的基.

(A.4.11) 设 E 是有限维向量空间, F 是 E 的子空间. 若 $\dim F = \dim E$, 则 $F = E$.

由(A.4.10.1)立即得出.

(A.4.12) 设 M 与 N 是向量空间 E 的两个有限维子空间. 则 $M+N$ 是有限维的, 且有

(A.4.12.1) $$\dim(M+N) + \dim(M\cap N) = \dim M + \dim N.$$

由 M 的一个基与 N 的一个基的元素组成的集将生成 $M+N$, 因而 $M+N$ 是有限维的(A.4.6). 设 P(相应地, Q)是 $M\cap N$ 在 M(相应地, N)中的余子空间. 显然 $M+N$ 是 $M\cap N$, P 与 Q 的直和(A.3.3), 因而 $\dim(M+N) = \dim(M\cap N) + \dim P + \dim Q$. 但又由(A.4.10)我们有 $\dim P = \dim M - \dim(M\cap N)$, 与 $\dim Q = \dim N - \dim(M\cap N)$. 因而结果得证.

(A.4.13) 设 M 与 N 是向量空间 E 中的两个有限余维向量子空间. 则 $M\cap N$ 在 E 中是有限余维的, 并有

(A.4.13.1) $$\operatorname{codim}(M+N) + \operatorname{codim}(M\cap N) = \operatorname{codim} M + \operatorname{codim} N.$$

设 V 是 M 在 E 中的余子空间. 则 V 是有限维的. 设 p: $E\to V$

是E到V上的射影，其核为M(A.3.4). 则子空间$p(N)$是有限维的(A.4.10). 设$(b_i)_{1<i<m}$是$p(N)$的基，且对每个i，设$c_i\in N$使得$p(c_i)=b_i$. 则N由$M\cap N$与c_i生成(A.4.3)，因此$M\cap N$在N中是有限余维的,从而它在E中也是有限余维的. 设P(相应地，Q)是$M\cap N$在M(相应地，N)中的余子空间,且R是$M+N$在E中的余子空间. 则E是$M\cap N$，P，Q与R的直和，故有$\text{Codim}(M\cap N)=\dim P+\dim Q+\dim R$，$\text{codim}M=\dim Q+\dim R$，$\text{codim}N=\dim P+\dim R$与$\text{codim}(M+N)=\dim R$. (A.4.13.1)可直接从这些公式得出.

(A.4.14) 向量子空间中余维数为1的子空间称为E中的**超平面**. 若E是n(有限)维的，则E中的每个超平面都是$n-1$维的(A.4.10.1).

(A.4.15) 若H是E中的超平面，且存在E上的线性型$f\neq 0$，使$f^{-1}(0)=H$. 又若f'是E上另一个满足$f'^{-1}(0)=H$的线性型，则存在一纯量$\gamma\neq 0$，使$f'=\gamma f$. 反之，若g是E上的任一非零线性型，则$g^{-1}(0)$是E中的超平面.

若H是一超平面，存在向量$a\notin H$，使E是H与Ka的直和，因此每个$x\in E$可唯一地表示为$x=y+f(x)a$的形式，这里$f(x)\in K$. 因$x\to f(x)a$是线性的(A.3.4)，故$x\to f(x)$也是线性的(A.2.3)；因而f是线性型，并且H是它的核(A.3.4). 若f'是任一满足$f'^{-1}(0)=H$的线性型，且令$f(a)=\alpha$，$f'(a)=\beta$，则我们有$\alpha\neq 0,\beta\neq 0$而且$\alpha f'-\beta f$是E上的线性型，它在H上与在a为0，因此在$E=H+Ka$上恒为0. 这表明$f'=\alpha^{-1}\beta f$. 最后，若$H'=g^{-1}(0)$，则存在向量$b\notin H'$，因为$g\neq 0$. 设$\gamma=g(b)\neq 0$. 于是对每个$x\in E$有$g(x-\gamma^{-1}g(x)b)=0$，故对某个$y\in H'$有$x=y+\gamma^{-1}g(x)b$. 这表明$E=Kb+H'$，且因$b\notin H'$，这个和是直和. 因此H'是超平面.

(A.4.16) 设u: $E\to F$是线性映射. 我们称u是**有限秩**的，若$u(E)$是有限维的. $u(E)$的维数就称为u的**秩**；记为$\text{rank}(u)$. 若$u(E)$是无限维的，则称u是**无限秩的.**

(A.4.17) 映射 u 是有限秩的当且仅当 $\ker(u)$ 是有限余维的，且有

(A.4.17.1) $\operatorname{rank}(u)=\operatorname{codim}_E(\ker(u))$.

若 $\ker(u)$ 具有有限维余向量子空间，则 u 在 V 上的限制是 V 到 $u(E)$ 上的同构，故 $u(E)$ 有有限维数，且等于 $\dim V$. 反之，若 $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ 是 $u(E)$ 的有限基，设 a_i 是 E 中满足 $u(a_i)=b_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 的向量. 则 E 是 $\ker(u)$ 与 Ka_i 的直和(A.4.3).

(A.4.18) 设 E, F 是两个向量空间，$u: E\to F$ 是线性映射.

(i) 若 F 是有限维的，则 $\operatorname{rank}(u)\leqslant\dim F$；而且 $\operatorname{rank}(u)=\dim F$ 当且仅当 u 是满射.

(ii) 若 E 是有限维的，则 $\operatorname{rank}(u)\leqslant\dim E$；而且 $\operatorname{rank}(u)=\dim E$ 当且仅当 u 是单射.

第一个论断是 $\operatorname{rank}(u)$ 的定义与(A.4.11)的直接推论. 为证明(ii)，只要注意到：若 $\dim E=n$，则由(A.4.17)与(A.4.10)知 $u^{-1}(0)$ 是 $n-\operatorname{rank}(u)$ 维的.

(A.4.19) 设 E 是有限维向量空间，u 是 E 的自同态映射. 则下列论断是等价的:

(i) u 是双映射；

(ii) u 是单映射；

(iii) u 是满映射；

(iv) $\operatorname{rank}(u)=\dim E$.

这直接由(A.4.18)得到.

(A.4.20) 设 E 是域 K 上的向量空间，K' 是 K 的子域. 设 $(b_\alpha)_{\alpha\in I}$ 是 E 在 K 上的基，且 $(\rho_\lambda)_{\lambda\in J}$ 是当 K 看作 K' 上的向量空间时的基. 则族 $(\rho_\lambda b_\alpha)$，这里 (λ, α) 取遍 $J\times I$，是 E 在 K' 上的一个基. 因为显然 E 由这个族的元素生成(在 K' 上). 另一方面，假设我们有 $\sum\limits_{\lambda,\alpha}\xi_{\lambda\alpha}\rho_\lambda b_\alpha=0$，其中纯量 $\xi_{\lambda\alpha}\in K'$. 这个关系也可写为 $\sum\limits_{\alpha}\left(\sum\limits_{\lambda}\xi_{\lambda\alpha}\rho_\lambda\right)b_\alpha=0$. 因为 b_α 在 K 上是线性无关的，便得出 $\sum\limits_{\lambda}$

$\xi_{\lambda\alpha}\rho_\lambda = 0$ 对每个附标 $\alpha \in I$ 成立，于是对每个 $(\lambda, \alpha) \in J \times I$，有 $\xi_{\lambda\alpha} = 0$，因为 ρ_λ 在 K' 上是线性无关的. 因此 $\rho_\lambda b_\alpha$ 在 K' 上是线性无关的，从而我们的论断得证. 特别地，有

(A.4.21) 若 E 在 K 上是有限维的，而 K 在 K' 上是有限维的，则 E 在 K' 上是有限维的，且有

(A.4.21.1) $\dim_{K'}E = \dim_K E \cdot \dim_{K'}K$.

5. 矩 阵

(A.5.1) 设 E，F 是域 K 上的向量空间，且 E 是 n（有限）维的. 设 $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ 是 E 的基，因而 E 是 Ka_i 的直和. 由 (A.3.1) 存在 E 到 F 的线性映射 u 与 F 的 n 个向量的族 $(b_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ 之间的一一对应；这个对应由 $b_i = u(a_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 确定. 于是向量空间 $\mathrm{Hom}(E, F)$ 与 F^n 是同构的.

(A.5.2) 进一步假设 F 是 m（有限）维的，且 $(b_j)_{1 \leqslant j \leqslant m}$ 是 F 的基. 则存在向量 $y \in F$ 与 K 的 m 个元素的族 $(\eta_j)_{1 \leqslant j \leqslant m}$ 之间的一一对应，由 $y = \sum_{j=1}^{m} \eta_j b_j$ 确定. 因而存在线性映射 u: $E \to F$ 与 K 中元素的"二重"族 (α_{ji}) $(1 \leqslant j \leqslant m, 1 \leqslant i \leqslant n)$ 之间的一一对应，它由关系式

(A.5.2.1) $u(a_i) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ji} b_j \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$

确定.

这样的族称为 K 上的 **m 行 n 列的矩阵**（或 **$m \times n$ 矩阵**）. 它们构成 K 上的一向量空间，与 K^{mn} 同构. 子族 $(\alpha_{ji})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ 是矩阵 $(\alpha_{ji})_{1 \leqslant j \leqslant m, 1 \leqslant i \leqslant n}$ 的第 j 行，而子族 $(\alpha_{ji})_{1 \leqslant j \leqslant m}$ 是它的第 i 列. 由 (A.5.2.1) 定义的矩阵 $M(u) = (\alpha_{ji})$ 称为 u 关于基 (a_i) 与 (b_j) 的矩阵. 若 u，u' 是 E 到 F 的两个线性映射，而 λ 是任一纯量，则

$$M(u + u') = M(u) + M(u'),$$

$$M(\lambda u) = \lambda M(u),$$

在上面每一情况下，矩阵都是关于E的同一基(a_i)与F的同一基(b_j)取的.

(A.5.3) 设G是K上的另一个有限维向量空间，$(c_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$是$G$的基. 设$u$: $E\to F$ 与 v: $F\to G$ 是两个线性映射，且设 $w=v\circ u$: $E\to G$. 假设u关于(a_i)与(b_j)的矩阵$M(u)$，v关于(b_j)与(c_k)的矩阵$M(v)$是已知的，让我们来计算w关于(a_i)与(c_k)的矩阵$M(w)$. 若 $M(u)=(\alpha_{ji})$，$M(v)=(\beta_{kj})$，$M(w)=(\gamma_{ki})$，则由定义有

$$w(a_i)=\sum_{k=1}^{p}\gamma_{ki}c_k=v\left(\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ji}b_j\right)=\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ji}v(b_j)$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ji}\left(\sum_{k=1}^{p}\beta_{kj}c_k\right),$$

由此推得

(A.5.3.1) $$\gamma_{ki}=\sum_{j=1}^{m}\beta_{kj}\alpha_{ji}.$$

$p\times n$ 矩阵$M(w)$称为$p\times m$矩阵$M(v)$与$m\times n$矩阵$M(u)$的积，记为

$$M(v\circ u)=M(v)M(u).$$

因而两个矩阵的积是由“第一个矩阵的行乘以第二个矩阵的列”来计算的.

给出这些定义后，我们对线性映射建立的大多数结果当然都能转换为矩阵语言. 我们将继续做这一转换工作：其实，在实际中，当矩阵代数的问题出现时，用相当灵活与合适的线性映射的语言改述它，几乎总是有益的. 例如，对于线性映射的核与象的重要概念，如果借用矩阵的语言，就没有简单的解释.

6. 多重映射，行列式

(A.6.1) 设 $E_1,\cdots,E_r$ 与F是域K上的 $r+1$ 个向量空间. 映

射 $u: E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_r \to F$ 称为 r **线性的**，若它"关于每个变元是线性的"；也就是说，对每个 $i = 1, 2, \cdots, r$ 与任选的每个元素 $a_j \in E_j (j \neq i)$，E_i 到 F 的偏映射

$$x_i \to u(a_1, \cdots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \cdots, a_r)$$

是线性的. 特别，这蕴含对 a_j 的所有选择，有

$$u(a_1, \cdots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \cdots, a_r) = 0.$$

对 n 用归纳法，由定义得到

$$\text{(A.6.1.1)} \quad u\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_{1j} x_{1j}, \sum_{j=1}^{n} \xi_{2j} x_{2j}, \cdots, \sum_{j=1}^{n} \xi_{rj} x_{rj}\right)$$
$$= \sum_{(j_i)} \xi_{1j_1}, \xi_{2j_2}, \cdots, \xi_{rj_r} u(x_{1j_1}, x_{2j_2}, \cdots, x_{rj_r}),$$

这里右边的和在所有满足 $1 \leqslant j_1 \leqslant n, \cdots, 1 \leqslant j_r \leqslant n$ 的组 $(j_1, \cdots, j_r)$ 上取的；ξ_{ij} 是纯量而 x_{ij} 是 E_i 的元素 $(1 \leqslant i \leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant n)$.

$E_1 \times \cdots \times E_r$ 到 K 的 r 线性映射称为 r **线性型**.

(A.6.2) 设每个向量空间 $E_i (1 \leqslant i \leqslant r)$ 具有有限基 $(b_{ij})_{1 \leqslant j \leqslant n_i}$. 则由公式 (A.6.1.1) 得知，$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_r$ 到 F 的 r 线性映射 u 由 $n_1 n_2 \cdots n_r$ 个向量 $u(b_{1j_1}, b_{2j_2}, \cdots, b_{rj_r}) \in F$（对每个 $i = 1, 2, \cdots, r$ 有 $1 \leqslant j_i \leqslant n_i$）唯一确定. 反之，若我们给出 F 中 $n_1 n_2 \cdots n_r$ 个向量的任意组 $(c_{j_1 j_2 \cdots j_r})$，则存在 $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_r$ 到 F 的唯一的 r 线性映射，使对每组附标 $(j_1, j_2, \cdots, j_r)$ 有 $u(b_{1j_1}, b_{2j_2}, \cdots, b_{rj_r}) = c_{j_1 j_2 \cdots j_r}$. 为看出这一点，只要用公式(A.6.1.1)（在那里取比所有 n_i 大的 n，并对 $j \leqslant n_i$ 有 $x_{ij} = b_{ij}$ 而对 $j > n_i$ 有 $x_{ij} = 0$）来定义 u 就够了，而且可直接验证这样定义的映射 u 确实是 r 线性的.

(A.6.3) 考虑所有 E_i 都等于同一个向量空间 E 的情形. r 线性映射 u: $E^r \to F$ 称为交错的，若每当二不同附标 $i < j$ 满足 $x_i = x_j$ 时就有 $u(x_1, \cdots, x_r) = 0$. 由定义推得，对所有 $x_i \in E$，有

$$0 = u(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i + x_j, x_{i+1}, \cdots, x_{j-1}, x_i + x_j, x_{j+1}, \cdots, x_r)$$
$$= u(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_r) + u(x_1, \cdots, x_j, \cdots,$$

$x_i, \cdots, x_r)$.

换句话说，若我们交换 u 中两变量 x_i, x_j, u 的值改变符号. 因集 $\{1,2,\cdots,r\}$ 的每个置换 σ 可以表示成轮换的积，故容易得到下述推论：

(A.6.3.1) $u(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(r)}) = \varepsilon_\sigma u(x_1, x_2, \cdots, x_r)$,

这里 ε_σ 是置换 σ 的符号.

若 E 是有限维的，而 $(b_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ 是它的基，则由定义，每当附标 $j_1, \cdots, j_r$ 中的两个相等时，$u(b_{j_1}, b_{j_2}, \cdots, b_{j_r})$ 为零. 由于(A.6.3.1)，对不同附标 (j_i) 的递增序列 $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$, $u(b_{j_1}, \cdots, b_{j_r})$的值是确定的. 反之，若我们对递增序列取 F 的任意元素 $c_{j_1 j_2 \cdots j_r}$, 则存在唯一的交错 r 线性映射 u: $E^r \to F$, 使当 $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$ 时，$u(b_{j_1}, b_{j_2}, \cdots, b_{j_r}) = c_{j_1 j_2 \cdots j_r}$. 这个叙述的验证留给读者.

(A.6.4) 考虑 E^n 上的交错 n 线性型这一特殊情形，这里 n 是 E 的维数. 上面的附注指出：这样的型 f 由它的值 $f(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 完全确定，其中 (b_i) 是 E 的任一基；并且 f 恒等于零当且仅当 $f(b_1, \cdots, b_n) = 0$. 可以推出：若 f_0 是这些非零型中的一个，则 E^n 上每个其它的交错 n 线性型都能写成 λf_0, 这里 λ 是纯量. 在本节后面的部分，这些假设与记号仍然保持.

(A.6.5) 设 u 是 E 的自同态. 则存在唯一的纯量 $\det(u)$，使得若 f 是 E^n 上的任一交错 n 线性型，就有

(A.6.5.1) $f(u(x_1), u(x_2), \cdots, u(x_n)) = \det(u) \cdot f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

对选取的所有 $x_i \in E (1 \leqslant i \leqslant n)$ 都成立.

只要对 $f = f_0$ 证明就够了，而这种情形的结果又可由(A.6.4)与下述事实推得：$(x_1, \cdots, x_n) \to f_0(u(x_1), \cdots, u(x_n))$ 是 E^n 上的交错 n 线性型.

纯量 $\det(u)$ 称为 u 的**行列式**. 显然我们有

(A.6.5.2) $\det(I_E) = 1$.

(A.6.6) 若 u, v 是 E 的两个自同态，则有

(A.6.6.1) $\det(u \circ v) = \det(u)\det(v)$,

把(A.6.5)应用于交错n线性式

$$(x_1, \cdots, x_n) \to f_0(u(x_1), \cdots, u(x_n))$$

与同态v，便得

$$f_0(u(v(x_1)), \cdots, u(v(x_n))) = \det(v) f_0(u(x_1), \cdots, u(x_n))$$
$$= \det(v)\det(u) f_0(x_1, \cdots, x_n).$$

因f_0是非零的，故公式(A.6.6.1)立即由$\det(u \circ v)$的定义得出.

(A.6.7) $\det(u) \neq 0$ 当且仅当u是双映射.

若u是双映射，则它有逆映射u^{-1}，满足$u \circ u^{-1} = 1_E$. 因此由(A.6.6)与(A.6.5.2)，我们有$\det(u)\det(u^{-1}) = 1$，显然$\det(u) \neq 0$. 反之，若u不是双射，则它不是单射(A.4.19)，因此存在$b_1 \neq 0$使$u(b_1) = 0$. 这样，存在包含b_1的E的一个基$(b_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ (A.4.5)，因而我们有$f_0(b_1, \cdots, b_n) \neq 0$，于是$f_0(u(b_1), \cdots, u(b_n)) = 0$. 故$\det(u) = 0$.

(A.6.8) 设$(b_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$是$E$的基，且$M(u) = (\alpha_{ji})$是$u$关于$E$的两个基$(b_i)$与$(b_i)$的矩阵（或如通常所说，$u$关于基$(b_i)$的矩阵）. 因$f_0(b_1, \cdots, b_n) \neq 0$，公式(A.6.1.1)与(A.6.5.1)给出

(A.6.8.1) $$\det(u) = \sum_{\sigma} \varepsilon_\sigma \alpha_{\sigma(1)1} \alpha_{\sigma(2)2} \cdots \alpha_{\sigma(n)n},$$

这里σ取遍$\{1, 2, \cdots, n\}$的所有置换的对称群$\mathscr{S}_n$.

矩阵$M(u)$的行列式定义为u的行列式. 这提供了我们的理论与原始形式下行列式的古典理论之间的联系. 我们并不需要用后一理论，并且把我们的结果转写成古老记号下的工作，留给对这类计算有兴趣的读者. 在应用中，回到定义(A.6.5)总是比较简单的，因为我们将用自同态的固有值来解释.

(A.6.9) 自同态u的固有值的定义由(11.1.1)给出，只要把那里的域$\boldsymbol{C}$用任意的域K来代替. 由(A.6.7)直接得出，这些固有值是方程（称为u的特征方程）

(A.6.9.1) $$\det(u - \lambda \cdot I_E) = 0$$

的根. 由公式(A.6.8.1)直接证明，上述方程的左边是首项系数为$(-1)^n \lambda$的n次多项式. 下面我们将假定域K是代数封闭的，故

$\det(u-\lambda\cdot 1_E)$ 可分解为线性因子：$(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda)$.

(A.6.10) 存在E的基$(b_1,\cdots,b_n)$，使

(A.6.10.1) $u(b_i)=\lambda_i b_i+\alpha_{i,i+1}b_{i+1}+\cdots+\alpha_{in}b_n(1\leqslant i\leqslant n)$.

反之，若$(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$是具有这样性质的基，则

$$\det(u-\lambda\cdot 1_E)=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda).$$

证明可对n用归纳法得到. 由假设，存在E中向量$b_n\neq 0$，它是u的关于固有值λ_n的固有向量；换句话说，$u(b_n)=\lambda_n b_n$. 我们把E分解为直和Kb_n+V，且设$p: E\to V$是相应的射影(A.3.4). 映射$x\to p(u(x))$是V的自同态，因此存在V的一个基$(b_1,\cdots,b_{n-1})$使

$$p(u(b_i))=\mu_i b_i+\alpha_{i,i+1}b_{i+1}+\cdots+\alpha_{i,n-1}b_{n-1}\quad(1\leqslant i\leqslant n-1),$$

从而

$$u(b_i)=\mu_i b_i+\alpha_{i,i+1}b_{i+1}+\cdots+\alpha_{i,n-1}b_{n-1}+\alpha_{i,n}b_n\quad(1\leqslant i\leqslant n-1),$$

其中α_{in}为适当的纯量. 于是我们有

$$\begin{aligned}&f_0(u(b_1)-\lambda b_1,\cdots,u(b_n)-\lambda b_n)\\&=f_0((\mu_1-\lambda)b_1+\cdots+\alpha_{1n}b_n,(\mu_2-\lambda)b_2+\cdots\\&\quad+\alpha_{2n}b_n,\cdots,\cdots,(\mu_{n-1}-\lambda)b_{n-1}+\alpha_{n-1,n}b_n,\\&\quad(\lambda_n-\lambda)b_n).\end{aligned}$$

如果借助于(A.6.1.1)把右边展开并利用交错多重线性型的定义就容易看出，不为零的项仅是

$$(\mu_1-\lambda)(\mu_2-\lambda)\cdots(\mu_{n-1}-\lambda)(\lambda_n-\lambda)f_0(b_1,\cdots,b_n),$$

因此

$$\det(u-\lambda\cdot 1_E)=(\mu_1-\lambda)(\mu_2-\lambda)\cdots(\mu_{n-1}-\lambda)(\lambda_n-\lambda).$$

这就证明了μ_i是(除了顺序以外)纯量$\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1}$，且上述计算也建立了(A.6.10.1)的第二个论断.

u关于满足(A.6.10)条件的基的矩阵称为**下三角形矩阵**.

(A.6.11) 对每个整数$k>0$，我们有

(A.6.11.1) $\det(u^k - \lambda \cdot 1_E) = (\lambda_1^k - \lambda)(\lambda_2^k - \lambda)\cdots(\lambda_n^k - \lambda)$.

因由公式(A.6.10.1)得

$$u^k(b_i) = \lambda_i^k b_i + \alpha_{i,i+1}^{(k)} b_{i+1} + \cdots + \alpha_{in}^{(k)} b_n \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

故结果由(A.6.10)得出.

(A.6.12) 自同态 u 是环 End(E) 中的幂零元素当且仅当它的所有固有值为零.

若 u 是幂零元素，则由 (A.6.11) 知 u 的所有固有值是零. 反之，若所有 λ_i 为零，则公式(A.6.10.1)指出，对 k 用归纳法，有 $u^k(E) \subset Kb_{k+1} + Kb_{k+2} + \cdots + Kb_n$ (当 $k < n$ 时)，最后 $u^n(E) = \{0\}$，这就是说 $u^n = 0$.

7. 行列式的子式

(A.7.1) 设 E 是 K 上的 n 维向量空间，$(b_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ 是 E 的基. 对附标集 $A = \{1, 2, \cdots, n\}$ 的每个子集 I，设 $E(I)$ 是由 $b_i (i \in I)$ 生成的子空间. 则 E 是 $E(I)$ 与 $E(A - I)$ 的直和. 若 $I = \{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$，这里 $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$，设 j_I 是 K^r 到 $E(I)$ 上的双映射，满足 $j_I(e_k) = b_{i_k} (1 \leqslant k \leqslant r)$，其中 $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant i}$ 是 K^r 的典则基(A.4.4). 又设 p_I 是 E 到 K^r 上的线性满映射，使得对 $1 \leqslant k \leqslant r$ 有 $p_I(b_{i_k}) = e_k$，而对 $j \notin I$，有 $p_I(b_j) = 0$. 则 p_I 的核是 $E(A - I)$，而 p_I 在 $E(I)$ 上的限制是 $E(I)$ 到 K^r 上的双映射.

(A.7.2) 设 u 是 E 的自同态，$M(u) = (\alpha_{ji})$ 是 u 关于基 (b_i) 的矩阵 (A.6.8). 若 I, J 是附标集 A 的具有同样多个 (r 个)元素的子集，考虑 K^r 的自同态 $u_{JI} = p_J \circ u \circ j_I$. 它关于 K^r 的典则基 (e_k) 的矩阵由 α_{ji} 组成，其中 $i \in I$，$j \in J$. 这个矩阵的行列式(也就是说，$\det(u_{JI})$) 称为 $\det(u)$ 的相应于 E 的基 $(b_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ 及其附标集 A 的子集 I, J 的 $r \times r$ **子式**.

(A.7.3) E 的自同态 u 的秩为 r 当且仅当 $\det(u)$ 关于 (b_i) 的 $s \times s$ 子式 (这里 $s > r$) 是零，并且至少有一个非零的 $r \times r$ 子式.

设 $\rho=\operatorname{rank}(u)$，用(A.7.2)的记号，我们有 $u_{JI}(K^r)=p_J(u(E(I)))$，因此据 (A.4.18) 有 $\operatorname{rank}(u_{JI})=\dim(u_{JI}(K^r))\leqslant\dim(u(E(I)))\leqslant\dim u(E)=\operatorname{rank}(u)=\rho$. 若 $r>\rho$，则由(A.4.19)与(A.6.7)有 $\det(u_{JI})=0$. 另一方面，存在 A 的子集 I_0，包含 ρ 个元素，使得 $E(I_0)$ 是 $\ker(u)$ 的余集；也存在 A 的子集 J_0，包含 ρ 个元素，使得 $E(A-J_0)$ 是 $u(E)$ 的余集(A.4.5). 我们推得：限制于 $E(I_0)$ 上的 u 是 $E(I_0)$ 到 $u(E)$ 上的双射(A.4.19)，而限制在 $u(E)$ 上的 p_{J_0} 是 $u(E)$ 到 K^ρ 上的双射(A.3.5)，因此 $u_{J_0I_0}$ 是双映射，故 $\det(u_{J_0I_0})\neq 0$ (A.6.7). 本命题直接从这些附注中得出.

(A.7.4) 用前面的记号，如果我们取 $I=J=\{1,2,\cdots,m\}$，因而 $A-I=A-J=\{m+1,\cdots,n\}$，再假设 $u_{A-I,I}=0$，换句话说，矩阵 $M(u)$ 具有下述形式

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix},$$

这里 $X=M(u_{II})$ 是 $m\times m$ 矩阵，$Y=M(u_{I,A-I})$ 是 $m\times(n-m)$ 矩阵，$Z=M(u_{A-I,A-I})$ 是 $(n-m)\times(n-m)$ 矩阵 (0 表示 $(n-m)\times m$ 的零矩阵)，则有

(A.7.4.1) $\det(M(u))=\det(X)\det(Z)$.

因为若 v 是 $E(I)$ 的自同态，以 X 为其关于 $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ 的矩阵，用(A.6.10)的记号，便有

$$f(u(b_1),\cdots,u(b_m),u(b_{m+1}),\cdots,u(b_n))$$
$$=f(v(b_1),\cdots,v(b_m),u(b_{m+1}),\cdots,u(b_n)).$$

但映射

$$(x_1,\cdots,x_m)\to f(x_1,\cdots,x_m,u(b_{m+1}),\cdots,u(b_n))$$

是 $(E(I))^m$ 上的交错 m 线性型，因此，由(A.6.5)得

$$f(v(b_1),\cdots,v(b_m),u(b_{m+1}),\cdots,u(b_n))$$
$$=(\det X)f(b_1,\cdots,b_m,u(b_{m+1}),\cdots,u(b_n)).$$

对每个 $j\geqslant m+1$，我们记 $u(b_j)=c'_j+c''_j$，其中 $c'_j\in E(I)$，$c''_j\in E(A-I)$. 由交错多重线性型的定义，有

$$f(b_1,\cdots,b_m,u(b_{m+1}),\cdots,u(b_n))$$

$$= f(b_1,\cdots,b_m,c''_{m+1},\cdots,c''_n).$$

再设w是$E(A-I)$的自同态，以Z为其关于$(b_j)_{m+1\leqslant j\leqslant n}$的矩阵；并对$j\in A-I$定义$w(b_j)=c''_j$. 映射

$$(x_{m+1},\cdots,x_n)\to f(b_1,\cdots,b_m,x_{m+1},\cdots,x_n)$$

是$(E(A-I))^{n-m}$上的交错$(n-m)$线性型，因此类似地得到

$$f(b_1,\cdots,b_m,w(b_{m+1}),\cdots,w(b_n))$$
$$=(\det Z)f(b_1,\cdots,b_n)=\det Z.$$

故(A.7.4.1) 得证. 对r用归纳法，得出对任意"矩阵的三角阵"

$$U=\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12}\cdots X_{1r} \\ 0 & X_{22}\cdots X_{2r} \\ & \vdots \\ 0 & 0\cdots X_{rr}\end{pmatrix},$$

这里X_{ij}是$m_i\times m_j$矩阵，我们有

(A.7.4.2) $\det U=\det(X_{11})\det(X_{22})\cdots\det(X_{rr})$

("分块行列式的计算法").

参考文献

[1] Ahlfors, L., Complex Analysis, McGraw-Hill, New York, 1953.

[2] Bachmann, H., Transfinite Zahlen, Ergebnisse der Math., Neue Folge, Heft 1, Springer, Berlin, 1955.

[3] Bourbaki, N., Eléments de Mathématique: Livre I, Théorie des Ensembles, Actual. Scient. Ind. Chap. I. N. No. 1212, Chap. III, No. 1243, Hermann, Paris, 1954—1956.

[4] ——————, ibid: Livre II. Algèbre, Chap. II, Actual Scinet Ind., No 1032, 1236 (3rd éd.). Hermann, Paris, 1962.

[5] ——————, ibid: Livre III, Topologie générale. Actual. Scinet. Ind., Chap. I, II, n° 1142 (4e éd.), Chap. IX, n° 1045 (2e éd.). Chap. X, n° 1084 (2e éd.), Hermann, Paris, 1958—1961.

[6] ——————, ibid: Livre V, Espaces Vectoriels topologiques, Actual. Scient. Ind., Chap. I, II, n° 1189, Chap. III-V, n° 1229, Hermann, Paris, 1953—1955.

[7] Cartan, H., Séminaire de l'École Normale Supérieure, 1951-52; Fonctions analytiques et faisceaux analyliques.

[8] Cartan, H., Théorie élémentaire des fonctions analytiques, Hermann, Paris, 1961.

[9] Coddington, E. and Levinson, N., Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill, New York, 1955.

[10] Courant, R., Hilbert, D., Methoden der mathematischen Physik, I, (2e éd.), Springer, Berlin, 1931.

[11] Halmos, P., Finite Dimensional Vector Spaces (2e éd.), D. Van Nostrand, New York, 1958.

[12] Ince, E., Ordinary Differential Equations, Dover Publications, New York, 1949.

[13] Jacobson, N., Lectures in Abstract Algebra: II, Linear Algebra, D. Van Nostrand, New York, 1953.

[14] Kamke, E., Differentialgleichungen reeller Funktionen, Akad. Verlag, Leipzig, 1930.

[15] Kelley, J., General Topology, D. Van Nostrand, New York, 1955.

[16] Landau, E., Foundations of Analysis, Chelsea. New York, 1951.

[17] Springer, G., Introduction to Riemann Surfaces, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1957.

[18] Weil, A., Introduction à l'étude des variétés kählériennes,'' Actual, Scient. Ind. n° 1267, Hermann, Paris, 1958.

[19] Weyl, H., ''Die Idee der Riemannschen Fläche'' (3e éd.), Teubner, Stuttgart, 1955.

符　　号　　表

在下列符号中，第一个数字指该符号所在章数，第二个数字指节数. 例如，1.4 指第一章第四节.

$=$　等于：1.1

$\neq$　不等于：1.1

$\in$　属于：1.1

$\notin$　不属于：1.1

$\subset$　含于：1.1

$\supset$　包含：1.1

$\not\subset$　不含于：1.1

$\{x \in X | P(x)\}$　X 中具有性质 P 的元的集：1.1

ϕ　空集：1.1

$\{a\}$　单元素 a 的集：1.1

$\mathfrak{P}(X)$　X 的子集的集：1.1

$X-Y, C_xY, CY$　Y 在 X 中的余：1.2

$\cup$　并 1.2

$\cap$　交 1.2

(a,b)　序偶：1.3

$\mathrm{pr}_1 c, \mathrm{pr}_2 c$　第一与第二射影：1.3

$G(x), G^{-1}(y)$　$G \subset X \times Y$ 的交叉截痕：1.3

$X \times Y$　两个集的积：1.3

$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$　n 个集的积：1.3

$\mathrm{pr}_i z$　第 i 射影：1.3

$\mathrm{pr}_{i_1 \cdots i_k}(z)$　偏射影：1.3

X^n　n 个集 X 的积：1.3

$F(x)$　映射 F 在 x 的值：1.4

$]a,b[$, $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$ $\boldsymbol{R}$中的区间：2.1

$\boldsymbol{R}_+,\boldsymbol{R}_+^*$　　$\geqslant 0$的实数集，>0的实数集：2.2

$|x|,x^+,x^-$　绝对值，实数的正部与负部：2.2

$\boldsymbol{Q}$　　有理数集：2.2

$\boldsymbol{Z}$　　整数集：2.2

l.u.b.X, sup$X$　集的上确界：2.3

g.l.b.X, inf$X$　集的下确界：2.3

$\sup\limits_{x\in A} f(x)$, $\inf\limits_{x\in A} f(x)$　f在A中的上确界与下确界：2.3

$\bar{\boldsymbol{R}}$　　广义实直线：3.3

$+\infty,-\infty$　$\bar{\boldsymbol{R}}$中的无穷大点：3.3

$x\leqslant y, y\geqslant x$　$\bar{\boldsymbol{R}}$中的序关系：3.3

$d(A,B)$　两集间的距离：3.4

$B(a;r), B'(a;r), S(a;r)$　开球，闭球，中心为a半径为r的球：3.4

$\delta(A)$　　直径：3.4

$\mathring{A}$　　内部：3.7

$\overline{A}$　　闭包：3.8

Fr(A)　　边缘：3.8

$\lim\limits_{x\to a,\, x\in A} f(x)$　函数的极限：3.13

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$　序列的极限：3.13

$\Omega(a;f)$　函数的振幅：3.14

$\log_a x$　　实数的对数：4.3

a^x　　底为a的指数（x为实数）：4.3

$\boldsymbol{C}$　　复数集：4.4

$z+z'$, zz'　复数的和，积：4.4

$0,1,i$　　$\boldsymbol{C}$的元素：4.4

$\mathscr{R}z$, $\mathscr{I}z$　实部与虚部：4.4

$\bar{z}, |z|$　　复数的共轭，绝对值：4.4

$x+y$, λx, $x\lambda$　向量空间中的和与数积：5.1 与（A.1）

$\bigoplus_{\alpha \in I} E_\alpha$　　向量空间族的直和：A.1

$\operatorname{Im} u$，$\operatorname{Ker} u$　线性映射的象，核：A.2

$\operatorname{Hom}(E,F)$，$\operatorname{Hom}_K(E,F)$　线性映射空间：A.2

$\operatorname{End}(E)$，$\operatorname{End}_K(E)$　自同态的代数：A.2

$1_E, I_E, I$　　恒等映射：A.2

$\dim E$，$\dim_K(E)$　向量空间的维数：A.4

$\operatorname{Codim}_E F$，$\operatorname{codim} F$　E 的子空间的余维数：A.4

$\operatorname{rank}(u)$　　线性映射的秩：A.4

$M(u)$　　线性映射的矩阵：A.5

$\det(u)$　　自同态的行列式：A.6

索　引

在下列索引中，第一个数字指该概念所在章数，第二个数字指节数．例如“一一映射 One-to-one mapping: 1.6”表示在第一章第六节中可找到“一一映射”．

一　画

二　画

三　画

四　　画

五　　画

六　画

七 画

八 画

九 画

十 画

十 一 画

十 二 画

十 三 画

十 四 画

十 六 画

带人名的定理或公式